0.1 Quelques applications

1. Calcul de puissances de A :

   Pour calculer une puissance élevée d'un endomorphisme ou d'une matrice, on peut utiliser une diagonalisation :

   $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow$

   $$A^n = PD^nP^{-1}$$

   Exemple.

   Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

   trouver A^n

   polynôme caractèristique : $P(\lambda) = (5-\lambda)(-6-\lambda)$

   Valeurs propres : $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & -4, m_1 = 1 \\ \lambda_2 & = & 3, m_2 = 1 \end{array} \right.$ il y a deux valeurs propres simples.

   Vecteurs propres (Espaces propres) :

   $E(\lambda_1) = E(-4) =< v_1 >$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\dim E(\lambda_1) = 1$

   $E(\lambda_2) = E(3) =< v_2 >$ où $v_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\dim E(\lambda_2) = 1.$

   $P = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ 6/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

   $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ 6/7 & -2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

   $\Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1} \Longrightarrow$

   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ 6/7 & -2/7 \end{pmatrix} =$

   $\begin{pmatrix} (-4)^n & \frac{1}{2}3^{n+1} \\ 3(-4)^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ 6/7 & -2/7 \end{pmatrix} =$

   $\begin{pmatrix} -\frac{2}{7}(-4)^n + \frac{1}{7}3^{n+2} & \frac{3}{7}(-4)^n - \frac{1}{7}3^{n+1} \\ -\frac{6}{7}(-4)^n + \frac{6}{7}3^n & \frac{9}{7}(-4)^n - \frac{2}{7}3^n \end{pmatrix}$

   Donc $A^n = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}(-4)^n + \frac{1}{7}3^{n+2} & \frac{3}{7}(-4)^n - \frac{1}{7}3^{n+1} \\ -\frac{6}{7}(-4)^n + \frac{6}{7}3^n & \frac{9}{7}(-4)^n - \frac{2}{7}3^n \end{pmatrix}$

2. Systèmes différentiels linéaires du premier ordre.

Il s'agit de trouver l'ensemble des fonctions dérivables

$x_1, x_2, ..., x_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & ... & a_{1n}x_n \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}x_1 & ... & a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Le système se présente sous la forme $X' = AX$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$

on peut utiliser une diagonalisation : $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$ le système s'écrit donc $X' = AX = PDP^{-1}X$,

soit $P^{-1}X' = DP^{-1}X$. En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient l'èquation

$Y' = DY$. Si on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$,

l'èquation $Y' = DY$ équivaut au système

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y\prime_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}$$

équivaut au système :

$y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t)$
....
$y_n'(t) = \lambda_n y_n(t)$

On en déduit
$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1}$
....
$y_n(t) = C_n e^{\lambda_n}$

Pour trouver les fonctions $x_1, x_2, ..., x_n$, il suffit de calculer $X = PY$.

Example 1

Résoudre le système différentiel :

$$(I)\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x_3' = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

$(I) \Longleftrightarrow X' = AX$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A est diagonalisable : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ *et* $P = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = PDP^{-1}$$

$X' = AX = PDP^{-1}X$, *on pose* $Y = P^{-1}X \Rightarrow \boxed{X = PY \ldots (1)}$

$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}PDY \Rightarrow \boxed{Y' = DY \ldots (2)}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^t \\ y_3 = c_3 e^{2t} \end{cases}$$

de (1) : $X = PY \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ x_2 = c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ x_3 = c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{cases}$$

0.2 Résoudre un système récurrent

Il s'agit de trouver l'ensemble des suites $x_n, y_n, \ldots$ telle que :

$$X_{n+1} = AX_n \quad , \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Résoudre le système récurrent : $X_{n+1} = AX_n$

Première méthode : on utilise une diagonalisation

$$(I)\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n - 5z_n \\ z_{n+1} = 2y_n - 2z_n \end{cases} \qquad x_n,\ y_n \text{ et } z_n \text{ sont des suites}$$

$(I) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

A est diagonalisable : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$D = P^{-1}AP \Rightarrow \boxed{A = PDP^{-1}}$

$X_{n+1} = PDP^{-1}X_n$

On pose $Y_n = P^{-1}X_n \Rightarrow \boxed{X_n = PY_n \ldots (1)}$

$Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}PDY_n \Rightarrow \boxed{Y_{n+1} = DY_n \ldots (2)}$ avec $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

De (2) :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & 0 \\ v_{n+1} & = & v_1 \\ w_{n+1} & = & 2w_n \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} u_n & = & 0 & & \\ v_n & = & v_0 & = & \alpha \\ w_n & = & w_0 2^n & = & \beta 2^n \end{array} \right.$$

De (1) :

$$X_n = PY_n \Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta 2^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_n = \alpha + \beta 2^n \\ y_n = 3\alpha + \beta 2^n \\ z_n = 2\alpha + \beta 2^n \end{array} \right.$$

Deuxième méthode : on utilise A^n

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X_n & = & AX_{n-1} \\ X_{n-1} & = & AX_{n-2} \\ & \vdots & \\ X_2 & = & AX_1 \\ X_1 & = & AX_0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{X_n = A^n X_0}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & A_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Exemple.

Résoudre le système récurrent :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 5x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = 6x_n - 6y_n \end{array} \right.$$

$(I) \Longleftrightarrow \quad X_{n+1} \quad = \quad AX_n \Longrightarrow X_n = A^n X_0 \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}(-4)^n + \frac{1}{7}3^{n+2} & \frac{3}{7}(-4)^n - \frac{1}{7}3^{n+1} \\ -\frac{6}{7}(-4)^n + \frac{6}{7}3^n & \frac{9}{7}(-4)^n - \frac{2}{7}3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} x_n = \left[-\frac{2}{7}\left(-4\right)^n + \frac{1}{7}3^{n+2}\right]\alpha' + \left[\frac{3}{7}\left(-4\right)^n - \frac{1}{7}3^{n+1}\right]\beta' \\ y_n = \left[-\frac{6}{7}\left(-4\right)^n + \frac{6}{7}3^n\right]\alpha' + \left[\frac{9}{7}\left(-4\right)^n - \frac{2}{7}3^n\right]\beta' \end{cases}$

0.3 Exponentielle d'une matrice

On a $e^x = \sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

0.4 Matrice nilpotente

$\exists\, m \;/\; A^m = 0$ et $A^{m-1} \neq 0$

m est l'indice de nilpotence

Si A est nilpotente d'indice m, alors

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!}$$

Example 2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

donc

$$A^3 = 0$$

i.e. A est nilpotente d'indice 3.

calcul de e^A :

$e^A = I_3 + A + \frac{A^2}{2}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode (système diffirentiel) :

On utilise la formule exponentielle

$X' = \dfrac{dx}{dt} = AX \Rightarrow$

$$X = X_0 e^{tA}$$

où $X_0 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$

Example 3

Résoudre le système différentiel :

$(I)\begin{cases} x_1' &= x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= 0 \end{cases}$

$(I) \Longleftrightarrow X' = AX \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = X_0 e^{tA}$

et $X_0 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

or $tA = \begin{pmatrix} 0 & t & -t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{tA} = I_3 + tA + \dfrac{(tA)^2}{2} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & -t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & t & -t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & -t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

finalement $\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 t + c_3 \left(-t + t^2/2\right) \\ x_2 = c_2 + c_3 t \\ x_3 = c_3 \end{cases}$

Remark 4

Si A est diagonalisable, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ lesvaleurs propres, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les vecteurs propres, alors

$X' = AX \Rightarrow$

$$X = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

Example 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X' = AX \Rightarrow X = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ x_2 &= c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ x_3 &= c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{cases}$$

Example 6

Résudre un problème qui contient une suite récurente linéaire (U_n).

$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

On pose $U_{n+1} = V_n$

$$\textit{Donc} \quad (I) \begin{cases} V_n &= U_{n+1} \\ V_{n+1} &= U_{n+1} \quad + U_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_n \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$$