Université de Mohammed Boudiaf, M'sila
Faculté des mathématiques
L2 (S3) : 2020/2021
Mr. Bougherara Brahim

Module : Topologie des espaces métriques

Table des matières

1 Définitions, Propriétés et exemples fondamentales **2**
1.1 Définitions et propriétés . . . 2
1.2 Exemples de distances fondamentales . . . 4
1.2.1 Distances sur $\mathbb{R}^n$ . . . 4
1.2.2 Distances sur $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ . . . 6

2 Ouverts et fermés **8**
2.1 Boule ouverte et fermée . . . 8
2.2 Ouverts et fermée, Adhérence, intérieur et frontière . . . 12

3 Suites et applications dans un espace métrique **16**
3.1 Suites dans un espaces métriques . . . 16
3.2 Espaces métrique complet et notion de suite de Cauchy . . . 18
3.3 Applications continue . . . 19
3.3.1 Continuité en un point . . . 19
3.3.2 Continuité globale . . . 20
3.3.3 Homéomorphisme . . . 21

4 Espaces topologiques **22**
4.1 Préliminaire . . . 22

Chapitre I : Espaces métriques (cours 01)

1 Définitions, Propriétés et exemples fondamentales

Soit E un ensemble non vide.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Une distance d sur E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait pour tout $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Séparation)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (E, d) s'appelle espace métrique.

☞ **Exemple 1.1.** L'exemple fondamental d'un espace métrique est l'espace $\mathbb{R}$ avec la distance définie par d(x,y) = |x-y|. Cette distance s'appelle distance usuelle sue $\mathbb{R}$.

☞ Il est facile de vérifie que d est une distance. En effet, on a pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. $d(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.
3. $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Deux propriétés importantes de la distance sont données par la proposition suivante :

Proposition 1.1. Soit (E, d) un espace métrique. Alors la distance d satisfait les deux propriétés suivantes :

a. La distance d est positive : $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E$.

b. Pour tout $x, y, z \in E$:

$$\boxed{|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)} \tag{1.1}$$

Démonstration. a. Soient $x, y \in E$. En utilisant successivement les propriétés 1, 2, 3, on obtient

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

D'où $d(x, y) \geq 0$.

b Soient $x, y, z \in E$. On a d'après 2 :

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

d'où par 2, on obtient

$$d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y).$$

En changeant le rôle entre x et y et par 2, on a

$$d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y).$$

On en déduit que

$$\boxed{|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)}. \tag{1.2}$$

□

☞ Le nombre positive $d(x,y)$ s'appelle distance entre x et y ou distance de x à y.

☞ Pour vérifie que d est une distance, en générale seul, la propriété 3 qui pose un difficulté (parfois grande) contrairement aux propriétés 1 et 2 qui sont faciles à vérifier .

☞ **Exemple 1.2.** Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$\forall x, y \in E : d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Montrons que d est une distance. Soient $x, y, z \in E$. On a

1 Si $x = y$ alors $d(x,y) = 0$ (par définition) et si $x \neq y$ alors $d(x,y) = 1 \neq 0$. D'où

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

2 On a $d(y,x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \neq x \\ 0 & \text{si} \quad y = x \end{cases} = d(x,y)$

3 • Si $x = y$ alors

$$0 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0} + \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0}.$$

• Si $x \neq y$ alors $x \neq z$ ou $y \neq z$. D'où

$$1 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}_{=1 \vee 2}.$$

Dans les deux cas, on a : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Donc d est une distance sur E. Elle s'appelle distance discrète.

1.2 Exemples de distances fondamentales

1.2.1 Distances sur $\mathbb{R}^n$

☞ **Exemple 1.3.** La distance notée d_1, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_1(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|} \tag{1.3}$$

où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_N) \in \mathbb{R}^n$ Vérifions que d_1 est bien une distance. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

1 On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x_i - y_i| = 0, \ \forall i = 1, ...n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x_i = y_i, \ \forall i = 1, ..., n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

2 Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

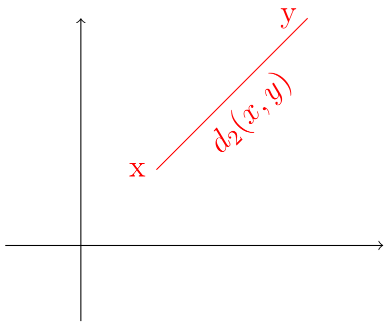
$$d_1(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x).$$

3 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |x_i - y_i|) \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d_1(z,y). \end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.4.** On définit sur $\mathbb{R}^n$ la distance usuelle (la distance euclidienne), notée d_2 par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_2(x,y) \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \tag{1.4}$$



On vérifie que d_2 est une distance.

$\boxed{1}$ On a

$$d_2(x,y)=0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=0 \Longleftrightarrow |x_i-y_i|^2=0,\ \forall i=1,...n.$$
$$\Longleftrightarrow x_i=y_i,\ \forall i=1,...,n.$$
$$\Longleftrightarrow x=y$$

$\boxed{2}$ Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. On a

$$d_2(x,y)\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2\right)^{1/2}=d_2(y,x).$$

$\boxed{3}$ Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Minkowski suivant : Pour tout $a=(a_1,...,a_n)$, $b=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}} \tag{1.5}$$

On a pour tout $x,y,z\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{i=1}^{n}|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|^2\right)^{1/2}\\ &\overset{(1.5)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2\right)^{1/2}\\ &= d_2(x,z)+d_2(z,y). \end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.5.** La distance notée d_∞, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}^n : d_\infty(x,y)\overset{\text{def}}{=}\max_{i=1}|x_i-y_i|} \tag{1.6}$$

Vérifions que d_∞ est bien une distance. On a pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$:

1 On a

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y)=0 \Longleftrightarrow \max_{i=1}|x_i-y_i|=0 &\Longleftrightarrow |x_i-y_i|=0,\ \forall i=1,...n. \\ &\Longleftrightarrow x_i=y_i,\ \forall i=1,...,n. \\ &\Longleftrightarrow x=y \end{aligned}$$

2 Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. On a

$$d_\infty(x,y)\overset{\text{def}}{=}\max_{i=1}|x_i-y_i|=\max_{i=1}|x_i-y_i|=d_\infty(y,x).$$

3 Soient $x,y,z\in\mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y)=\max_{i=1}|x_i-y_i| &= \max_{i=1}|x_i-z_i+z_i-y_i| \\ &\leq \max_{i=1}\left(|x_i-z_i|+|x_i-y_i|\right) \\ &\leq \max_{i=1}|x_i-z_i|+\max_{i=1}|z_i-y_i|=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

1.2.2 Distances sur $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$

Notons que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle borné $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur cette espace les trois distances suivantes

$$\boxed{d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x} \tag{1.7}$$

$$\boxed{d_2(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}} \tag{1.8}$$

$$\boxed{d_\infty(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|} \tag{1.9}$$

pour tout $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On vérifie que d_2 est une distance sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Les autres distances sont laissées à l'étudiant. Soient $f,g,h\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

1 On a :

$$\begin{aligned} d_2(f,g)=0 \Longleftrightarrow \int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x=0 &\Longleftrightarrow |f(x)-g(x)|=0,\quad \forall x\in[a,b] \\ &\Longleftrightarrow f(x)=g(x)\quad \forall x\in[a,b] \\ &\Longleftrightarrow f=g. \end{aligned}$$

2 Pour la symétrie, c'est évidente.

3 Pour l'inégalité triangulaire, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivant

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \ \forall f,g, \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}).} \tag{1.10}$$

On a

$$\begin{aligned}
d_2(f,g)^2 &= \int_a^b |f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b |(f-h)+(h-g)|^2\mathrm{d}x\\
&\leq \int_a^b (|f-h|+|h-g|)^2\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b |f-g|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b |f-h||h-g|\mathrm{d}x\\
&\overset{(1.10)}{\leq} \int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\
&= \left(\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right)^2\\
&= (d_2(f,h)+d_2(h,g))^2
\end{aligned}$$

Exercice 1. Est ce que d définit une distance sur $\mathbb{R}$ dans tous les cas suivants :

1 $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \forall x,y \in \mathbb{R}$

2 $d(x,y) = |x^2 - y^2|, \forall x,y \in \mathbb{R}$

3 $d(x,y) = |\sin x - \sin y|, \forall x,y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit d une distance sur E. Posons $\delta = \frac{d}{1+d}$. Montrer que δ définit une distance sur E.

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective et soit d une distance sur F. On pose

$$\delta(x,y) := d(f(x),f(y)), \quad \forall x,y \in E.$$

Montrer que δ est une distance sur E.

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique. Soit $\varphi : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que

$$\varphi(0)=0, \ \forall t>0 : \varphi(t)>0, \quad \forall t,s \geq 0 : \varphi(t+s) \leq \varphi(t)+\varphi(s), \ .$$

1 Démontrer que l'application $\varphi \circ d$ définit une distance sur E.

2 Déduire que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}$:

$$d^\alpha, \quad 0<\alpha\leq 1, \qquad \ln(1+d), \qquad \min\{1,d\}.$$

Chapitre I : Espaces métriques (cours 02)

2 Ouverts et fermés

2.1 Boule ouverte et fermée

On définit certains notions mathématiques, en s'inspirant de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

Définition 2.1. Soient (E, d) en espace métrique, $a \in E$, $r > 0$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{B(a,r) := \{x \in E : d(a,x) < r\}.}$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{\overline{B}(a,r) := \{x \in E : d(a,x) \leq r\}.}$$

3. La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{S(a,r) := \{x \in E : d(a,x) = r\}.}$$

Exercice 5 (Très facile). *Montrer que* $\boxed{\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r).}$ $\boxed{(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r).}$

☞ **Exemple 2.1.** 1. Soit $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x - y|$ On a montré que d est une distance sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} B(a,r) := \{x \in \mathbb{R} : d(a,x) < r\} &= \{x \in \mathbb{R} : |x - r| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x - a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} \\ &=]a - r, a + r[\end{aligned}$$

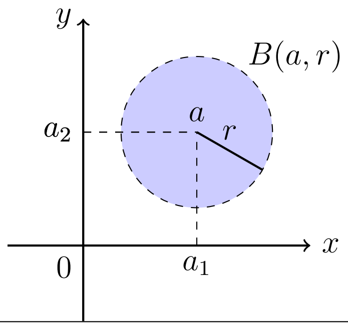
De la même façon, on obtient la boule fermée $\overline{B}(a,r) = [a - r, a + r]$. Pour la sphère, on a

$$S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r) = \{a - r, a + r\}.$$

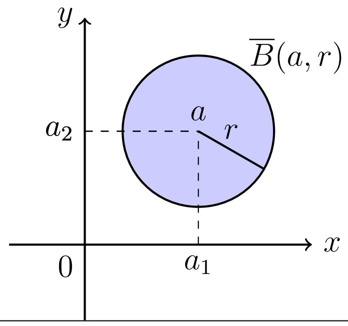
2. $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne $d_2(x,y) := ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$. (ici, on a $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.) Alors, on a pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

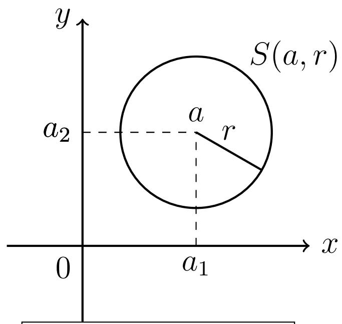
C'est le disque de centre a et de rayon r privée de sa frontière.



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

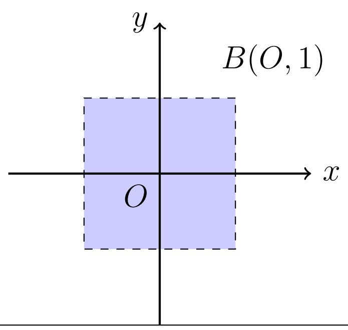


La sphère dans $\mathbb{R}^2$

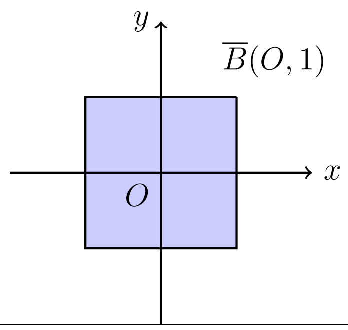
3 $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance $d_\infty(x,y) := \max\{|x_1 - x_2|, |x_2 - y_2|\}$. Calculons la boule unité (de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1).

$$B(O,1) := \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-0|, |y-0|\} < 1\} \quad (2.1)$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \wedge |y| < 1\} \quad (2.2)$$

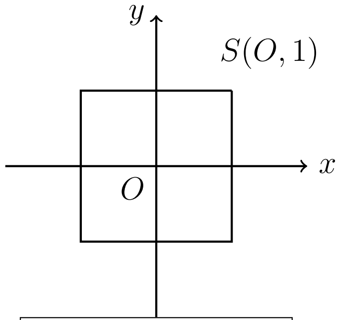
C'est le carré centré en O et de longueur de coté 2, comme la figure le montre :



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

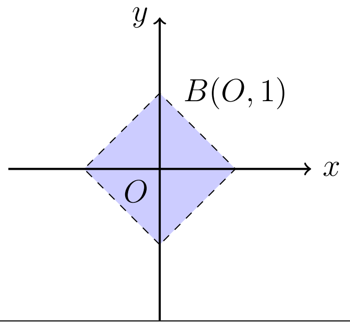


La sphère dans $\mathbb{R}^2$

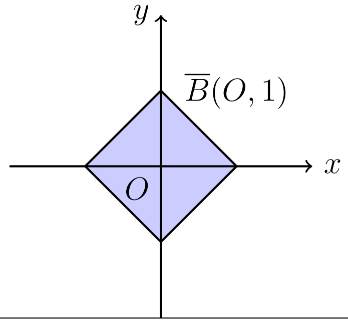
$\boxed{4}$ $E=\mathbb{R}^2$ avec la distance $d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$. Calculons La boule unité (ouverte). On a

$$\begin{aligned} B(O,1) &:= \{(x,y):|x-0|+|y-0|<1\}=\{(x,y):|x|+|y|<1\} \\ &= \{(x,y):x+y<1 \wedge x-y<1 \wedge -x+y<1 \wedge -x-y<1\}. \end{aligned}$$

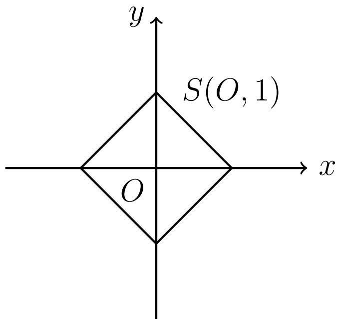
(ici, on a distingué les 4 cas : $x,y\geq 0,\ x\geq 0,\ y\leq 0,\ x\leq 0,\ y\geq 0$ et $x,y\leq 0$) On obtient donc un losange. et les figures suivantes montrent les boules ouverte et fermée et la sphère.



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



La sphère dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 6. *Soit (E,d) un espace métrique. Calculer la boule ouverte, fermé et la sphère (de centre a et de rayon $r>0$) par rapport aux distances suivantes.*

$$d(x,y)=\left\{\begin{array}{lll} 1 & si & x\neq y \\ 0 & si & x=y \end{array}\right. ,\quad \delta(x,y)=\ln(1+d(x,y)),\quad \delta(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Proposition 2.1. *Soit (E, d) un espace métrique.*

1 *La boule ouverte $B(a, r)$ satisfait la propriété suivante :*

$$\forall x \in B(a,r), \exists \varrho > 0 : B(x,\varrho) \subset B(a,r). \tag{2.3}$$

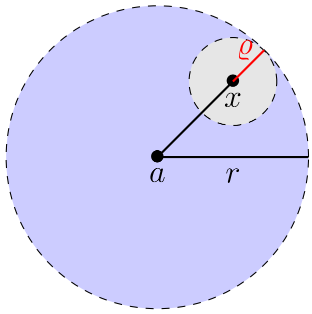
2 *A réunion des boules ouvertes si et seulement si*

$$\forall x \in A, \exists \varrho > 0 : B(x,\varrho) \subset A. \tag{2.4}$$

Démonstration. 1 Soit $x \in B(a, r)$.

Il suffit de choisir $0 < \varrho \leq r - d(a, x)$. En effet, on vérifie que $B(x, \varrho) \subset B(a, r)$. Soit $y \in B(x, \varrho)$. Montrons que $y \in B(a, r)$. Il suffit de montrer que $d(a, y) < r$. On a par l'inégalité triangulaire

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varrho = r.$$



2 On démontre les deux implications.

$\Longrightarrow$) Supposons que A est réunion des boules ouvertes. Alors

$$A = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i), \quad \text{où } I \text{ est un ensemble non vide.}$$

Montrons (2.4). Soit $x \in A$, Alors $\exists\ i \in I : x \in B(x_i, r_i) \subset A$ et d'après (2.3), $\exists\ \varrho > 0 : B(x, \varrho) \subset B(x_i, r_i)$. Par conséquent $B(x, \varrho) \subset A$.

$\Longleftarrow$) Supposons que (2.4) est satisfait et montrons que A est un réunion des boules ouvertes. A'après (2.4), $\forall x \in A : \exists\ r_x > 0 : B(x, r_x) \subset A$. D'où

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subset A.$$

D'autre part, on a

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

On en déduit que $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$ (c'est un réunion des boules ouvertes). CQFD.

□

2.2 Ouverts et fermée, Adhérence, intérieur et frontière

La proposition précédente motive la définition suivante

Définition 2.2 (ouvert, fermé)**.** Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$.

a On dit que A est un ouvert s'il est réunion de boules ouvertes (ou s'il satisfait la propriété (2.4)).

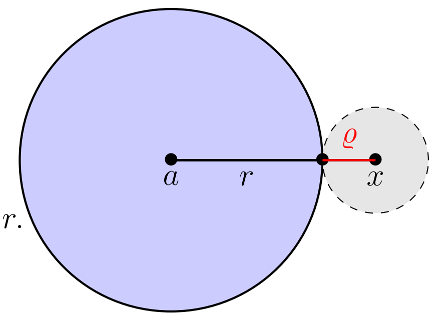
b On dit que A est fermé si son complémentaire est ouvert.

☞ **Exemple 2.2.** 1 La boule ouverte est un ouvert (évidente).

2 La boule fermé est un fermé : En effet, il suffit de montrer que $C_E\overline{B}(a, r)$ est ouvert. Pour cela on montre que

$$\forall x \in C_E\overline{B}(a, r), \exists \varrho > 0 : B(x, \varrho) \subset C_E\overline{B}(a, r).$$

Soit $x \in C_E\overline{B}(a, r)$. Alors $d(x, a) > r$. Posons $\varrho = d(x, a) - r > 0$. On alors $B(x, \varrho) \subset C_E\overline{B}(a, r)$, car si $y \in B(x, \varrho)$, alors



$$\begin{aligned} d(a, y) &\geq |d(a, x) - d(x, y)| \\ &= |r + \varrho - \underbrace{d(x, y)}_{<\varrho}| > r + \varrho - \varrho = r. \end{aligned}$$

Donc $y \notin \overline{B}(a, r)$, i.e. $y \in C_E\overline{B}(a, r)$.

On a besoin de cette notion de distance entre un élément x et un ensemble A.

Définition 2.3. Soient (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et A une partie non vide de E. On appelle distance de x à A le nombre positive

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}. \tag{2.5}$$

☞ **Remarque 2.1.** *a* *En utilisant la caractérisation de la borne inférieur, on a*

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap B(x, \varepsilon) \neq \phi. \end{aligned}$$

b *Si $x \in A$ alors $d(x, A) = 0$. En effet*

$$0 \leq d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, x) = 0.$$

c *Si $A = \phi$, alors on prolonge la définition en posant $d(x, A) = +\infty$.*

Exercice 7. *Soit A un ensemble non vide d'un espace métrique (E, d). Montrer que*

$$\forall x, y \in E : |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{2.6}$$

Définition 2.4. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E.

1. L'adhérence de A, noté $\overline{A}$, est défini par

$$\boxed{\overline{A} := \{x \in E : d(x, A) = 0\}} \tag{2.7}$$

et un point de $\overline{A}$ s'appelle **point adhérent de A**.

2. L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble défini par

$$\boxed{\overset{\circ}{A} := \{x \in A \ / \ \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}} \tag{2.8}$$

et un point x de $\overset{\circ}{A}$ s'appelle **point intérieur de** A et dans ce cas, on dit que A est **un voisinage** de x.

3. La frontière de A, noté $\mathsf{Fr}A$,est l'ensemble :

$$\boxed{\mathsf{Fr}A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.} \tag{2.9}$$

☞ **Remarque 2.2.** *1. D'après les définition, il est claire que $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $A \subset \overline{A}$.*

2. A est ouvert si et seulement si A est un voisinage de tous ses points.

☞ **Exemple 2.3.** a Si E est muni de la distance discrète $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Soit $A = \{a\} \subset E$. Calculons $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$. Pour $\overset{\circ}{A}$, on a $\overset{\circ}{A} \subset A$. Il suffit donc de tester si $a \in \overset{\circ}{A}$ ou pas. On a

$$B(a, 1/2) := \{x \in E : d(a, x) < 1/2\} = \{x \in E : d(a, x) = 0\} = \{a\}.$$

Par conséquent $a \in B(a, 1/2) \subset A$. Donc $\overset{\circ}{A} = \{a\} = A$. Pour $\overline{A}$, on a $A \subset \overline{A}$ et donc $a \in \overline{A}$. Soit $x \neq a$, alors $d(x, A) := d(x, a) = 1 \neq 0$. Donc $a \notin \overline{A}$. D'où $\overline{A} = \{a\} = A$.

b Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Posons $A = [0, 1[$. Calculons $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$. Pour $\overset{\circ}{A}$, on a $\overset{\circ}{A} \subset A$. Soit $x \in A = [0, 1[$. Si $x = 0$, alors pour tout $r > 0 : B(0, r) =]1 - r, 1 + r[\not\subset [0, 1[$ et donc $x = 1 \notin \overset{\circ}{A}$. Si $x \in]0, 1[$, alors $B(x, r) =]x - r, x + r[\subset [0, 1[$, où $r = \min\{x, 1 - x\}$. Donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$. Pour $\overline{A}$. On a $A \subset \overline{A}$. Soit $x \in A^c$. Si $x = 1$ alors pour tout $y \in A$:

$d(x,y) = 1 - y$. D'où $d(1,A) = \inf_{y\in A} d(1,y) = \inf_{y\in A}(1-y) = 0$. Donc $1 \in \overline{A}$. Si $x < 0$ ou $x > 1$, alors pour tout

$$\begin{aligned}
\forall y \in A : d(x,y) = |x-y| &= \begin{cases} x-y & \text{si} \quad x > 1 \\ y-x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \\
&> \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x > 1 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \\
&\geq \min\{-x, x-1\} > 0
\end{aligned}$$

Donc $d(x,A) > 0$. Donc $x \notin \overline{A}$. Par conséquent $\overline{A} = [0,1]$.

La proposition suivante donne des propriétés très importantes à ces notions :

Proposition 2.2. Soient (E,d) un espace métrique et A est un ensemble non vide de de E. Alors :

$\boxed{1}$ $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

$\boxed{2}$ $\overline{A}$ est fermé.

$\boxed{3}$ $\overline{A}^{\,c} = \overset{\circ}{A^c}$ (le complémentaire de l'adhérence est égale à l'intérieur de complémentaire).

$\boxed{4}$ $\overset{\circ}{A}$ est le plus grande ouvert inclus dans A.

$\boxed{5}$ $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.

Démonstration. $\boxed{1}$ Montrons que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert. c'est à dire on montre que

$$\forall x \in \overset{\circ}{A}, \exists r > 0 : B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}.$$

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors, par définition, $\exists r > 0 : B(x,r) \subset A$. Montrons que $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $y \in B(x,r)$, d'où d'après (2.3) $\exists\ \varrho > 0 : B(y,\varrho) \subset B(x,r) \subset A$ et donc $y \in \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$.

$\boxed{2}$ Il suffit de montrer que $(\overline{A})^c$ est ouvert. Soit $x \in (\overline{A})^c$. Alors $d(x,A) := r > 0$. c'est à dire

$$\forall y \in A : d(x,y) \geq d(x,A) = r \quad (\text{car } d(x,A) := \inf_{z\in A} d(x,z) \leq d(x,y)).$$

Ce qui implique $A \cap B(x,r) = \phi$. Montrons que $B(x,r) \subset (\overline{A})^c$. Soit $y \in B(x,r)$, alors d'après (2.3), $\exists\ \varrho > 0 : B(y,\varrho) \subset B(x,r)$. D'où $B(y,\varrho) \cap A = \phi$, c'est à dire

$$\forall z \in A : (y,z) \geq \varrho > 0.$$

Par conséquent $d(y,A) := \inf_{z\in A} d(y,z) \geq \varrho > 0$. D'où $y \notin \overline{A}$ et et donc $y \in (\overline{A})^c$. D'où $B(x,r) \subset (\overline{A})^c$. Donc $(\overline{A})^c$ est ouvert.

$\boxed{3}$ On a

$$\begin{aligned} x \in (\overline{A})^c \iff d(x,A) > 0 \iff & \inf_{y\in A} d(x,y) := r > 0 \\ \iff & \forall y \in A : d(x,y) \geq r \iff \forall y \in A : y \notin B(x,r) \\ \iff & A \cap B(x,r) = \phi \iff B(x,r) \subset A^c \\ \iff & x \in \overset{\circ}{A^c}. \end{aligned}$$

D'où $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{A^c}$.

$\boxed{4}$ Soit B un ouvert inclus dans A. Montrons que $B \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $x \in B$. Comme B est un ouvert alors $\exists r > 0 : B(x,r) \subset B \subset A$. Donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

$\boxed{5}$ Soit F un fermé qui contient A. Montrons que $\overline{A} \subset F$. On a $F^c \subset A^c$ et comme F^c est ouvert, d'après les deux point précédents $F^c \subset \overset{\circ}{A^c} = (\overline{A})^c$. Donc $\overline{A} \subset F$.

□

Corollaire 2.3. Soient (E,d) un espace métrique et A est un ensemble non vide de de E. Alors :

$\boxed{1}$ $\boxed{(\text{A est fermé}) \iff A = \overline{A}.}$

$\boxed{2}$ $\boxed{(\text{A est ouvert}) \iff A = \overset{\circ}{A}.}$

$\boxed{3}$ $\boxed{x \in \overline{A} \iff \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \phi.}$

$\boxed{4}$ $\boxed{x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0 : B(x,r) \subset A.}$

Démonstration. En exercice. □

Exercice 8. *Soit (E,d) un espace métrique, où d est la distance discrète.*

1. *Calculer la boule ouverte et la boule fermé de centre de centre a et de rayon 1.*
2. *Calculer l'adhérence de $B(a,1)$.*
3. *Conclure.*

Proposition 2.4. Soient (E,d) un espace métrique, A et B deux parties de E.

$\boxed{1}$ $\boxed{A \subset B \Longrightarrow (\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \wedge \overline{A} \subset \overline{B}).}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B},\ \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}.}$

$\boxed{3}$ $\boxed{\overline{A\cap B}\subset \overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}.}$

Démonstration. En exercice. □

Exercice 9. Calculer l'adhérence et l'intérieur de la boule ouverte et la boule fermée.

Exercice 10. Soit (E,d) un espace métrique. Soit $a\in E$. On définit l'application d_a sur $E\times E$ par

$$d_a(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=y \\ d(a,x)+d(a,y) & \text{si} \quad x\neq y \end{cases}$$

1. Montrer que d_a est une distance sur E.
2. Calculer la boule ouverte $B_{d_a}(a,r)$ en fonction de $B_d(a,r)$.
3. Même question pour la boule ouverte $B_{d_a}(b,r)$ avec $b\neq a$.
4. Si $A\subset E$ et $a\notin A$, montrer que A est un ouvert de (E,d_a).
5. Si $A\subset E$ et $a\in A$, montrer que A est un ouvert de (E,d_a) si et seulement si A est un voisinage de a par rapport à d (i.e. $a\in\overset{\circ}{A}$).

3 Suites et applications dans un espace métrique

3.1 Suites dans un espaces métriques

Rappelons la définition d'une suite de E. C'est une application $\mathbb{N}\longrightarrow E$, qui à n associe $u_n\in E$. La définition naturelle de la convergence d'une suite dans un espace métrique (E,d) est comme suivant :

Définition 3.1. *Soient (E,d) un espace métrique, $(u_n)_n$ une suite de E et $u\in E$. On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers u si*

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n,u)=0$$

et u s'appelle une limite de u.

☞ **Remarque 3.1.**

- Comme $d(u_n,u)\in\mathbb{R}$, alors il est bien connue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(u_n,u)=0 &\iff \forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}: n\geq N\Longrightarrow d(u_n,u)\leq\varepsilon \\ &\iff \forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}: n\geq N\Longrightarrow u_n\in B(u,\varepsilon)\end{aligned}$$

- La limite u de la suite $(u_n)_n$ est unique. En effet s'il y a une autre limite $v\in E$ alors

$$0\leq d(u,v)\leq d(u,u_n)+d(u_n,v)$$

  et en passant à la limite quand $n\to\infty$, on obtient $0\leq d(u,v)\leq 0$. Par conséquent $d(u,v)=0$ et donc $u=v$.

- Une suite stationnaire est convergente dans tout espace métrique. En effet, si $(u_n)_n$ est stationnaire alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N : u_n = u(\text{ est constante }).$$
D'où $d(u_n, u) = 0$, $\forall n \geq N$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$

Définition 3.2. Soit $(u_n)_n$ une suite d'un espace métrique (E, d).

1. Une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_n$ est la suite $(u_{\varphi(n)})_n$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
2. On dit que $u \in E$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ convergente vers u.

La proposition suivante donne une caractérisation entre l'adhérence d'un ensemble via les suite.

Proposition 3.1. *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). alors*
$$\boxed{\overline{A} = \{x \in E, \exists (x_n)_n \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.} \tag{3.1}$$
d'autre manière, on a
$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Démonstration. On a
$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} d(x, A) := \inf_{y\in A} d(x, y) = 0 \\ &\overset{\text{caractérisation de l'inf}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in A : d(x, y_n) < \frac{1}{n} \\ &\Longleftrightarrow (y_n)_n \subset A \text{ et } x = \lim_{n\to\infty} y_n. \end{aligned}$$
□

☞ **Exemple 3.1.** Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Considérons l'ensemble
$$A := \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$
Calculons $\overline{A}$. On a $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite de A converge vers x. Uns suite $(x_n)_n$ de A est définie par $x_n = \frac{1}{p_n}$, $p_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :
$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Longleftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} p_n} \\ &\Longleftrightarrow x = \begin{cases} 0 & \text{si } \ p_n \to +\infty \\ 1/p & \text{si } \ p_n \to p \in \mathbb{N}^* \end{cases} \end{aligned}$$
D'où $A = \{0\} \cup \{1/p,\ p \in \mathbb{N}^*\} = \{0\} \cup A$.

Corollaire 3.2. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Alors

$$\boxed{(A \text{ est fermé }) \Longleftrightarrow (\text{ toute suite convergente } (a_n)_n \subset A, \text{ sa limite appartient à A}).} \tag{3.2}$$

Exercice 11. Soit $(\mathbb{R}, d)$ un espace métrique où d est la distance usuelle. Trouver l'adhérence et l'intérieur des ensemble suivantes

$$A := \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ p, q \in \mathbb{N}^*\},\ B = \{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 12. Soit (E, d) l'espace métrique discrète (d est la distance discrète). Trouver toutes les suites convergente.

3.2 Espaces métrique complet et notion de suite de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique. Si la suite de $(u_n)_n$ de E est convergente vers une certaine limite ℓ, alors $d(u_n, \ell) \to 0$ quand $n \to \infty$, et grâce à l'inégalité triangulaire $d(u_p, u_q) \to 0$, quand $p, q \to \infty$. C'est à dire les terme

Définition 3.3. Une suite $(u_n)_n$ d'un espace métrique (E, d) est dite de Cauchy si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : q > p \geq N \Longrightarrow d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.} \tag{3.3}$$

Autrement dit,

$$\lim_{p,q \to \infty} d(u_p, u_q) \longrightarrow 0.$$

☞ **Remarque 3.2.** Toute suite de convergent est de Cauchy (ce n'est pas difficile à vérifier), mais le contraire n'est pas toujours vraie dans un espace métrique. Pour cela, on donne la définition suivante

Définition 3.4. Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Proposition 3.3. Toute suite de Cauchy d'un espace métrique (E, d) est bornée. C'est à dire

$$\boxed{\exists a \in E,\ \exists M > 0 : d(a, u_n) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Démonstration. En exercice. □

☞ **Exemple 3.2.** L'espace $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ est complet. En effet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. D'après la proposition précédente, elle est bornée. Il existe donc une sous-suite notée $(u_{k_n})_k$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ (Voir le théorème de Bolzano-Weierstrass). Montrons que la suite est convergente vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} : \begin{cases} q > p \geq N_1 & \Longrightarrow & d(u_p, u_q) \leq \varepsilon/2 \\ n \geq N_1 & \Longrightarrow & d(u_{k_n}, \ell) \leq \varepsilon/2 \end{cases}$$

D'où, pour $N = \max\{N_1, N_2\}$. alors

$$n \geq N \Longrightarrow d(u_n, \ell) \leq d(u_n, u_{k_n}) + d(u_{k_n}, \ell) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ce donne la convergence de $(u_n)_n$. Donc $(\mathbb{R}, d)$ est un espace complet.

☞ **Exemple 3.3.** L'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$, n'est pas complet. En effet, on considère la suite de terme générale $u_n = n$. Montrons que $(u_n)_n$ est de Cauchy, mais elle n'est pas convergente. Soient $\varepsilon > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q > p$. On a

$$d(u_p, u_q) = |\arctan p - \arctan q| = |\arctan \frac{p-q}{1+pq}| \leq \arctan \frac{q}{pq} = \arctan 1/p.$$

et on a

$$\arctan \frac{1}{p} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{p} \leq \arctan \varepsilon \Longleftrightarrow p \geq \frac{1}{\arctan \varepsilon}$$

D'où, en choisissant $N := [1/\arctan \varepsilon] + 1 > 1/\arctan \varepsilon$, on obtient

$$q > p \geq N \Longrightarrow d(u_p, u_q) \leq 1/p \leq \varepsilon.$$

Donc $(u_n)_n$ est de Cauchy. Il reste à montrer que $(u_n)_n$ n'est pas convergente. Par absurde. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Alors $\lim_{n\to\infty} d(n,a) = 0$. D'où $d(n,a) = \arctan \frac{n-a}{1+an} \to 0$ et donc $\frac{n-a}{1+an} \to 0$, quand $n \to \infty$. Mais $\frac{n-a}{1+an}$ tends vers $1/a$ si $a \neq 0$ et tends vers $+\infty$ si $a = 0$. Contradiction. Donc la suite n'est pas convergente et l'espace $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{N}$, $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$d(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = q \\ |\frac{1}{p} - \frac{1}{q}| & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite de terme générale $u_n = n$, est de Cauchy.
3. Est elle convergente ?
4. Conclure.

3.3 Applications continue

3.3.1 Continuité en un point

Définition 3.5. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$. On dit que ℓ est la limite de $f(x)$ quand $x \longrightarrow a$ si

$$\delta(\ell, d(a)) \longrightarrow 0 \text{ quand } \; d(x,a) \longrightarrow 0.$$

Autrement dit, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : 0 < d(a,x) < r \Longrightarrow \delta(\ell, f(x)) < \varepsilon.} \tag{3.4}$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la limite de f en un point a par les suites.

Proposition 3.4. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Pour toute suite non stationnaire $(u_n)_n$ de E convergente vers a, la suite $(f(x_n))_n$ est convergente vers ℓ.

Démonstration. jkhgiu sjguys jhguys □

Définition 3.6. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$. On dit que f est continue en a si

$$\delta(f(x), d(a)) \longrightarrow 0 \text{ quand } \ d(x,a) \longrightarrow 0.$$

Autrement dit, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : d(a,x) < r \Longrightarrow \delta(f(a), f(x)) < \varepsilon.} \tag{3.5}$$

☞ **Remarque 3.3.** La définition précédente est équivalente à

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : x \in B_d(a,r) \Longrightarrow f(x) \in B_\delta(d(a), \varepsilon).} \tag{3.6}$$

ou

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : B_d(a,r) \subset f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon)).} \tag{3.7}$$

Exercice 14. Soit d $id : (E,d) \longrightarrow (E,\delta)$ l'application identique avec δ est la distance discrète. Montrer que id n'est pas continue en tout point de E.

La proposition suivante donne une caractérisation de la limite de f en un point a par les suites.

Proposition 3.5. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- f est continue en a.
- Pour toute suite $(u_n)_n$ de E convergente vers a, la suite $(f(x_n))_n$ est convergente vers $f(a)$.

3.3.2 Continuité globale

Définition 3.7. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est continue sur E (ou continue) si elle est continue en tout point $a \in E$.

La proposition suivante donne une caractérisation très importante de la continuité globale.

Proposition 3.6. L'application $f : (E,d) \longrightarrow (F,\delta)$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est ouvert de E.

Démonstration. On démontre les deux implications.

$\Longrightarrow$) Supposons que f est continue sur E. Soit O un ouvert de (F, δ). Alors $O := \bigcup_{i \in I} B_i$ où B_i est une boule ouverte de (F, δ). Montrons d'abord que $f^{-1}(B_i)$ est un ouvert de (E, d). Soit $x \in f^{-1}(B_i)$. Alors $f(x) \in B_i$. Donc d'après (2.3), $\exists \varepsilon > 0 \ : B(f(x), \varepsilon) \subset B_i$. D'après la continuité de f en x, il existe $r > 0$ tel que

$$B_d(x, r) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon) \subset f^{-1}(B_i).$$

On a montré que

$$\forall x \in f^{-1}(B_i), \exists r > 0 : B_d(x, r) \subset f^{-1}(B_i).$$

Donc $f^{-1}(B_i)$ est un ouvert de (E, d). D'où

$$f^{-1}(O) = f(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \text{ est aussi ouvert de } (E, d).$$

$\Longleftarrow$) Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de F est ouvert de E. Montrons que f est continue en tout $a \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de (E, d) et $x \in f^{-1} B_\delta(f(a), \varepsilon))$. D'après la définition de l'ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B_d(x, r) \subset f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon))$. D'où la continuité en a.

□

Exercice 15. Trouver toute les applications continues $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ lorsque :

1. d est la distance discrète,
2. δ est la distance discrète.

Exercice 16. Montrer que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de (F, δ) est un fermé de (E, d).

3.3.3 Homéomorphisme

Définition 3.8. Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est un homéomorphisme si

- f est bijective.
- f et f^{-1} sont continues (où f^{-1} est l'application réciproque de f).

S'il existe une telle application, on dit que les espaces (E, d) et (F, δ) sont **homéomorphes**.

La proposition suivante est immédiate (c'est une conséquence de la proposition 3.5.

Proposition 3.7. L'application $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est une homéomorphisme si et seulement si l'image directe (resp. réciproque) de tout ouvert de (E, d) (resp. de (F, δ)) est un ouvert de (F, δ) (resp. de (E, d)).

Exercice 17. Montrer que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est une homéomorphisme si et seulement si l'image directe (resp. réciproque) de tout fermé de (E, d) (resp. de (F, δ)) est un fermé de (F, δ) (resp. de (E, d)).

4 Espaces topologiques

4.1 Préliminaire

Le but de ce cours et de dégager la structure nécessaire d'un ensemble E, qui nous permet de parler de la limite d'une suite et application et par conséquent la convergence et la continuité. On a vu dans le cours précédent la définition naturelle de la limite dans un espace métrique. La question qui se pose : Est ce que la structure métrique de l'espace est nécessaire pour parler de la limite ? La réponse est non. La structure métrique d'espace n'est pas nécessaire mais elle est suffisante. En fait, on peut parler de la limite sans avoir une distance. Il suffit d'avoir une structure sur l'espace qui s'appelle structure topologique. La structure métrique engendre cette structure qui dépends de la nature des parties. En effet, rappelons la définition de la limite d'une suite. La suite $(u_n)_n$ converge vers u dans un espace métrique (E, d) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow d(u_n, u) < \varepsilon.$$

On peut écrire cette définition de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n \in B(u, \varepsilon).$$

Cette définition est équivalente à

$$\text{Pour tout ouvert } \mathcal{O}, \exists x \in \mathcal{O}, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longleftrightarrow u_n \in \mathcal{O}. \tag{4.1}$$

Exercice 18. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers u si et seulement si (4.1) est satisfait (utiliser la propriété caractéristique de l'ouvert (2.4) de la proposition 2.1).