Université De M'sila
Faculté des Mathematiques et de l'Informatique
Departement de Mathematiques

Première année Master EDPs et Applications
Semestre I

N. Benhamidouche

Problème de Cauchy pour les EDPS d'évolution

Année: **2020/2021**

Table des matières

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Définitions et propriètés

1.1.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle trés important dans la modélisation mathématiques des problèmes physiques, où plusieurs phénomènes physiques peuvent être décrits par des systèmes d'équations aux dérivée partielles. Ils existent deux types de problèmes, la première catégorie est constituée des problèmes dits "stationnaires", où la solution dépent uniquement des variables d'espaces. La deuxième catégorie est constituée des problèmes dits "d'évolution", où la solution dépent des variables d'espaces et du temps. on s'interresse dans ce cours à la deuxième catégorie. Les problèmes d'évolution prennent diverses formes,

il y'a tout d'abord les "problèmes aux limites", c'est à dire définis sur des domaines ou intervalles finis, on doit dans ce cas avoir des conditions aux bords sur la solutions ou sur ses dérivées partielles, en plus des conditions dites initiales. ensuite il y'a les "problèmes de Cauchy ", dans ce cas on travaille sur un domaine ou interval non borné, la seule condition connue est la condition initiale.

Les équation les plus connues en physique, sont l'équation de la chaleur et l'équation des ondes, en plus de l'équation du transport.

L'objectif de ce cours est de présenter une étude mathématique de ces équations, notamment le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur.

Définition 1.1.1 *Le problème qui consiste à chercher une solution* $u(x,t)$ *d'une EDP avec condition initiale en* $t = 0$ *, notée en général* $u(x,0) = u_0(x)$ *; est appelé problème de Cauchy.*

Exemple 1.1.1 *Equation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in R, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x),$$

1.1.2 Problème bien posé:

Définition 1.1.2 *Un problème est dit bien posé s'il satisfait les conditions suivantes:*

1- la solution du problème existe.

2- La solution est unique

3- La solution du problème est "stable" par rapport à la condition initiale, c'est à dire si on opère un" petit changment" dans la condition iniatile on obtiendra un "petit changment" dans la solution.

Si une des conditions n'est pas vérifiée, on dit que le problème est mal posé.

1.1.3 Solutions classique et faible

Soit $P(x,t,u,\ldots) = 0$, une équation aux dérivées partielles alors, la fonction $u(x,t)$ est dite solution "classique" si elle satisfait l'équation et sa condition initiale et elle est suffisament "régulière" , c'est à dire qu'elle est différentiable à un ordre égale ou supérieur à l'ordre de l'équation.

Une solution est dite "faible" si elle vérifie l'équation et ses conditions sans être suffisamen régulière.

1.1.4 Quelques espaces fonctionels

1- L'espace noté $C[a,b]$ est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$,

2- L'espace noté $C^k[a,b]$ est l'espace des fonctions k-fois dérivables dont toutes les dérivées sont continues sur l'intervalle $[a,b]$,

3- L'espace noté $C^\infty[a,b]$ est l'espace des fonctions infiniment continuement dérivables sur l'intervalle $[a,b]$,

4- L'espace noté $L^1[R]$ est l'espace des fonctions intégrables sur R,

5- L'espace noté $L^2[R]$ est l'espace des fonctions carrée intégrables sur R,

6- L'espace noté $L^\infty[R]$ est l'espace des fonctions bornées sur R,

Chapitre 2

Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

2.1 Problème de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Définition 2.1.1 *Soit le problème de l'équation de la chaleur*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & \end{array} \tag{I-1}$$

De point de vue physique, ce problème décrit la diffusion de la chaleur sur un tube(unidimensionel) infini, dans ce cas la condition initiale représente la concentration initiale de la chaleur sur le tube.

La solution générale de ce problème est non connue, mais pour certaines conditions sur $u_0(x)$,la solution existe; on a le théorème suivant ;

Théorème 2.1.1 *Si la condition initiale $\varphi(x)$ est continue bornée , alors la solution $u(x,t)$ du problème (I) ,existe et elle s'écrit comme ;*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int \varphi(y)\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4ct}} dy, \tag{I-2}$$

de plus la solution $u\left(x,t\right)$ est une foncction $C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_{+}^{*}\right)$.

La fonction

$$G\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}e^{\frac{-x^{2}}{4ct'}} \tag{I-3}$$

est dite solution fondamentale ou fonction de Green du problème de la chaleur, dans ce cas on a ;

$$u\left(x,t\right)=\int\varphi\left(y\right)G\left(x-y,t\right)dy \tag{I.4}$$

Remarque 2.1.1 *Le résultat reste valable si :*

1- La condition initiale n'est pas continue, par exemple $\varphi\ \epsilon\ L^{1}$.

2- La condition initiale est continue par morceau.

Remarque 2.1.2 *La solution u peut s'ecrire également comme*

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int\varphi\left(x-y\right)e^{\frac{-y^{2}}{4ct}}dy \tag{I.5}$$

Corollaire 2.1.1 *Soit* $G\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}e^{\frac{-x^{2}}{4xt}}$, *le noyaux de l'équation de la chaleur* (*le noyaux Gaussien*) , *alors*

1-

$$\frac{\partial G}{\partial t}=c\frac{\partial^{2}G}{\partial x^{2}} \tag{I.6}$$

2-

$$G\epsilon C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_{+}^{*}\right). \tag{I.7}$$

3-

$$\int G\left(x,t\right)dx=1 \tag{I.8}$$

Preuve du corollaire

1. C'est facile de vérifier que $\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}e^{\frac{-x^{2}}{4xt}}\right)=c\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}e^{\frac{-x^{2}}{4xt}}\right)=c\frac{\partial^{2}G}{\partial x^{2}}$. (à faire)

2. Pour montrer que $G\epsilon C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_{+}^{*}\right)$, il suffit de voir que cette fonction est indéfiniment différentiable par rapport aux deux variables x et t.

3. pour montrer que $\int G(x,t)\,dx = 1$, c'est à dire $\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int e^{\frac{-y^2}{4ct}}dy = 1$, on utitlise l'intégrale de Gauss:

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{I.9}$$

en faisant le changement de variable $s = \frac{y}{\sqrt{4ct}}$, cela implique $\sqrt{4ct}\; ds = dy$, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int e^{\frac{-y^2}{4ct}}dy = \frac{1}{\pi}\int e^{-s^2} ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = 1, \text{ d'aprés la relation } I.9.$$

Revenons au théorème principale

Preuve du théorème

Vérifiant tout d'abord que la fonction $u(x,t)$ est solution du problème de la chaleur écrite sous la forme I.4, en effet on a ;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \varphi(y)\, G(x-y,t)\, dy\right) = \left(\int \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial t} G(x-y,t)\, dy\right) \\
&= c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int \varphi(y)\, G(x-y,t)\, dy\right) = \left(\int \varphi(y)\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x-y,t)\, dy\right) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int \varphi(y)\,\left(\frac{\partial}{\partial t}G(x-y,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x-y,t)\right)dy = 0, \text{et cela d'aprés la relation I.6.} \qquad \text{CQFD}$$

.

On démontre maintenant que la solution I.2 existe ,

si la condition initiale $\varphi(x)$ est continue , bornée , alors on a

$$|u(x,t)| = \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int \varphi(x-y)\, e^{\frac{-y^2}{4ct'}} dy\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int \varphi(x-y)\, G(y,t)\, dy\right| \leqslant Sup\left|\varphi(x-y)\right| \int G(y,t)\, dy,$$

on pose $M = Sup\left|\varphi(x-y)\right|_{x\epsilon R}$, or d'aprés I.7 , on obtient donc

$$|u(x,t)| \leqslant Sup\left|\varphi(x-y)\right| \int G(y,t)\, dy \leqslant M$$

donc la solution existe.

Pour montrer que $u(x,t)$ est une fonction $C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*\right)$, d'aprés I.4, la solution dépend du noyaux de Gauss, or ce dernier est $G\epsilon C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*\right)$ d'aprés I.7. Donc la solution u est $C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*\right)$.

Exercice 2.1.1 *Montrer que si la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ est une fonction de l'espace L^1, alors la solution I.4 existe .*

Exemple 2.1.1 *Soit la condition initiale suivante*

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2T & \textit{pour} \quad x < 0 \\ 0 & \textit{pour} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

T indique ici une température constante positive.

on a

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int \varphi(y)\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4ct}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int \varphi(x-y)\, e^{\frac{-y^2}{4ct}} dy,$$

la condition initiale peut s'écrire comme

$$\varphi(x-y) = \begin{cases} 2T & \text{pour} \quad x < y \\ 0 & \text{pour} \quad x \geq y \end{cases}$$

d'où

$$u(x,t) = \frac{2T}{\sqrt{4\pi ct}} \int_x^{\infty} e^{\frac{-y^2}{4ct}} dy \tag{I.10}$$

on pose $\frac{y}{\sqrt{4ct}} = s$, cela implique $y = 2\sqrt{ct}s$, d'où $\mathrm{d}y = 2\sqrt{ct}ds$, en remplaçant dans l'intégrale (I-5), on obtient

$$u(x,t) = \frac{2T}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

cela donne comme solution la fonction d'erreur que nous allons étudier tout à l'heure .

Définition 2.1.2 *Fonction d'erreur*

Elle est définie comme suit

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds \tag{I.11}$$

on a aussi la fonction d'erreur complémentaire qui est définie comme

$$\mathrm{erf}_c(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-s^2} ds \tag{I.12}$$

ainsi on a $erf_c\left(x\right)+erf\left(x\right)=1$, car $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}ds+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-s^2}ds=\int_0^{\infty} e^{-s^2}ds=1$, d'aprés I.9.

Donc pour l'exemple qu'on a vu la solution I.10 s'écrit comme

$$u\left(x,t\right)=\frac{2T}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-s^2}ds=T.erf_c\left(\frac{x}{2\sqrt{ct}}\right)$$

Exercice 2.1.2 *Montrer que*

1. $erf\left(-\infty\right)=-1$, $erf\left(0\right)=0$, $erf\left(\infty\right)=1$.
2. $erf_c\left(-\infty\right)=2$, $erf_c\left(0\right)=1$, $erf_c\left(\infty\right)=0$,
3. Tracer le graphe des deux fonctions $erf\left(x\right)$, et $erf_c\left(x\right)$.

Exercice 2.1.3 *Calculer la solution du problème* ***I.1*** *écrite sous la forme* ***I.2*** *ou bien* ***I.5****,*

pour les conditions initiales suivantes:

1. $u(x,0)=\varphi\left(x\right)=\begin{cases}1 & \text{pour} \quad |x|<1\\ 0 & \text{pour} \quad |x|\geq 1\end{cases}$, Résultat ; $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{ct}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{ct}}\right)\right]$
2. $u(x,0)=\varphi\left(x\right)=\begin{cases}1 & \text{pour} \quad x>0\\ 3 & \text{pour} \quad x<0\end{cases}$, Résultat ; $u(x,t)=2-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{ct}}\right)$
3. $u(x,0)=\varphi\left(x\right)=e^{-x}$, Résultat ; $u(x,t)=e^{ct-x}$

2.2 Problème de l'équation de la chaleur avec source

Théorème 2.2.1 *Soit* $f=f(x,t)$, *et soit* $\varphi=\varphi\left(x\right)$, *une fonction continue bornée ; alors le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur non homogène suivant*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), && x\in R, \quad t>0\\ &u(x,0)=\varphi\left(x\right),\end{aligned} \tag{I-13}$$

admet une solution classique de la forme

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) G(x-y,t)\, dy + \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t-s) f(y,s) dyds \tag{I.14}$$

avec G, le noyaux de Gauss.

Méthode de calcul de la solution

La méthode consiste à séparer le problème I.13 en deux problèmes suivants

Problème A

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u_1}{\partial t} = c\tfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, && x \epsilon R, \quad t>0 \\ &u_1(x,0) = \varphi(x), \end{aligned} \tag{I-15}$$

Problème B

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u_2}{\partial t} = c\tfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t), && x \epsilon R, \quad t>0 \\ &u_2(x,0) = 0, \end{aligned} \tag{I-16}$$

on peut vérifier que la solution I.14 du problème I.15 s'écrit comme $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, (à vérifier),

on connait déja la solution du problème A $(I.15)$, qui s'écrit d'aprés I.4, comme

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) G(x-y,t)\, dy$$

reste à trouver la solution du problème B,

soit le problème suivant qu'on le note B'

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial v(x,t-s)}{\partial t} = c\tfrac{\partial^2 v(x,t-s)}{\partial x^2}, && x \epsilon R, \quad t-s>0, \\ &v(x,t=s) = f(x,t=s), \end{aligned} \tag{I.17}$$

la solution de ce problème est donnée par

$$v(x,t-s) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t-s) f(y,s)\, dy$$

on a la proposition dite de "Duhamel" suivante;

la fonction u_B définie par

$$u_B(x,t) = \int_0^t v(x,t-s) ds, \tag{I.18}$$

est solution du problème B ($I.16$), en effet

$$\frac{\partial u_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t v(x, t-s)ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x, t-s)ds,$$

on a également

$$c\frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2} = c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t v(x,t-s)ds = c\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t-s)ds = \frac{c}{c}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x,t-s)ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x,t-s)ds,$$

Exercice 2.2.1 *Trouver la solution du problème suivant*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, & x \in R \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad t > 0 & \end{array}$$

Résultat

$$u(x,t) = \frac{1}{c}\left(1 - e^{-ct}\right)\sin x$$

2.2.1 Problème de l'équation de la chaleur avec source inconnue

Soit le problème suivant

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(x,t), & x \in R, \quad t > 0 \text{ , } b \text{ cste} \\ u(x,0) = \varphi(x), & \end{array} \tag{I.19}$$

En faisant le changement de variable suivant $u(x,t) = e^{bt}v(x,t)$ dans le problème I.19, on obtient

$$be^{bt}v(x,t) + e^{bt}\frac{\partial v}{\partial t} = ce^{bt}\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + be^{bt}v(x,t),$$

en simplifiant, on trouve

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & x \in R, \quad t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x), & \end{array}$$

on revient au problème de la chaleur, qu'on connait la solution ;

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, G(x-y,t)\, dy.$$

Ainsi la solution du problème I.19 s'écrit comme

$$u(x,t) = e^{bt}v(x,t) = e^{bt}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, G(x-y,t)\, dy$$

2.2.2 Problème de l'équation de la chaleur avec flux

Il s'agit du problème suivant

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V\frac{\partial u}{\partial x}, & x \,\epsilon\, R, \quad t > 0 \ , V \ \ \text{cste} \\ u(x,0) = \varphi\left(x\right), & \end{array} \tag{I.20}$$

pour résoudre ce problème , on procède à la substitution suivante $z = x + Vt$, dans le problème I.20, on obtient

$$V\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + V\frac{\partial u(z,t)}{\partial z},$$

en simplifiant , cecic nous amène au problème de la chaleur sur la variable y , qu'on connait la solution ;

$$u\left(z,t\right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(y\right) G\left(z - y, t\right) dy,$$

donc la solution du problème I.20, s'écrit comme

$$u\left(x,t\right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(y\right) G\left(x + Vt - y, t\right) dy$$

2.3 Problème de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+$

On considère maintenant le problème de la chaleur sur $\mathbb{R}^+$, soit le problème suivant;

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \ > 0, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & \\ u(x,0) = \varphi\left(x\right), & \end{array} \tag{I.21}$$

pour traiter ce problème on procède à une extension sur tout $\mathbb{R}$, en posant

$$\widetilde{\varphi}\left(x\right) = \begin{cases} \varphi\left(x\right) & \text{pour} \quad x \ > 0 \\ -\varphi\left(-x\right) & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases} \ , \text{ avec } \ \widetilde{\varphi}\left(0\right) = 0 \tag{I.22}$$

on considère alors le problème suivant

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial v}{\partial t} = c\tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, && x > 0, \quad t > 0\\
&v(x,0) = \widetilde{\varphi}(x),
\end{aligned}$$

on connait la solution de ce problème sur $\mathbb{R}$; qui s'écrit comme

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\varphi}(y)\, G(x-y,t)\, dy,$$

qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \int_{-\infty}^{0} \widetilde{\varphi}(y)\, G(x-y,t)\, dy + \int_{0}^{\infty} \widetilde{\varphi}(y)\, G(x-y,t)\, dy\\
&= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(-y)\, G(x-y,t)\, dy + \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\, G(x-y,t)\, dy, \quad \text{et cela en utilisant la relation } I.2
\end{aligned}$$

alors

$$v(x,t) = -\int_{\infty}^{0} \varphi(y)\, G(x+y,t)\, dy + \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\, G(x-y,t)\, dy = \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\left[G(x-y,t) - G(x+y,t)\right] dy$$

donc la solution $u(x,t)$ du problème I.19 s'écrit alors comme

$$u(x,t) = \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\left[G(x-y,t) - G(x+y,t)\right] dy,$$

c'est à dire la restriction de la solution $v(x,t)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2.3.1 *Calculer la solution $u(x,t)$ du problème suivant .*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial u}{\partial t} = c\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && x > 0, \quad t > 0\\
&u(0,t) = 0,\\
&u(x,0) = 1,
\end{aligned}$$

Réferences

[1] Pavel Drabek, Gabriela Holubova, Element of partial differential Equations, *de Gruyter, Berlin New york*, (2007).

[2] P.L. Sachdev · Ch. Srinivasa Rao, Large Time Asymptotics for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC (2010).