1 Trigonalisation

Que faire quand on ne peut diagonaliser un endomorphisme f ?

Une réduction qui parait intéressante est la réduction à la forme triangulaire.

Si cette réduction est posible, notons $A' = (a_{ij})$ la matrice triangulaire représentant f.

Le polynôme caractéristique de f est $P(\lambda) = \det(A' - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$.

Il est donc scindé. Nous allons montrer que cette condition nécessaire pour pouvoir trianguler est également suffisante.

Remarquons avant que les problèmes de réduction à des formes triangulaires supérieures et inférieures sont équivalents : si on a trouvé une base $(v_1, \dots, v_n)$ par rapport à laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure, alors la matrice de f est triangulaire inférieure par rapport à la base $(v_n, \dots, v_1)$.

Proposition 1

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ un endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique de f est scindé dans $K[\lambda]$. Alors f est triangularisable.
En particullier, si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est triangularisable.

Proof.

Raisonnons par récurrence sur la dimension de E.

le résultat est vrai pour les espaces de dimension 1.

Supposons-le vrai pour les espaces de dimension $\leqslant n-1$ et soit E de dimension n.

Soit $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ dans $k[\lambda]$. ■

Les valeurs propres λ_i ne sont pas nécéssairement distinctes. Notons $v_1$un vecteur propre associé à λ_1.

D'aprés le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E de la forme $\mathcal{B}' = (v_1, e_2, e_3, \dots e_n)$.

Par rapport à cette base, la matrice de f est de la forme :

$$A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La famille $\mathcal{B}_1 = (e_2, \dots, e_n)$ est une base du sous-espace $F = Vect\,(\mathcal{B}_1) =< e_1, \dots, e_n >$ de E.

Notons g l'endomorphisme défini par :

$$\begin{array}{rccc} g & : F & \rightarrow & F \\ & x & \rightarrow & g(x) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Comme $P_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_{n-1}) = (\lambda_1 - \lambda) \times \det(A - \lambda I_{n-1}) = (\lambda_1 - \lambda) \times P_A(\lambda)$

et $P(\lambda)$ est sciendé et comme $\dim F = n - 1$, il existe une base $\mathcal{B}_2 = (v_2, \dots, v_n)$ de F telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(g)$ soit triangulaire supérieure. Si on pose $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n), \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & & a_{22} & .... & ..... & a_{2n} \\ 0 & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remark 2

1. *Si A est trigonalisable, la matrice $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ a sur la diagonale les valeurs propres de A*

   $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & . \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est trigonalisable.*

3. $tr(A) = \sum_i \lambda_i \quad , \det(A) = \prod_i \lambda_i$

Example 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

1. $\boxed{P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) =} \boxed{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 5-\lambda & -7 \\ 1 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}} \boxed{= -\lambda(\lambda-1)^2}$

   $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ ; } m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \text{ ; } m_2 = 2 \end{cases}$

   $E(\lambda_1) = E(0) = < v_1 >$ *où* $v_1 = (1,1,1)$ $\boxed{\dim E(\lambda_1) = 1 = m_1}$

   $E(\lambda_2) = E(1) = < v_2 >$ *où* $v_2 = (1,3,2)$, *et* $\boxed{\dim E(\lambda_2) - 1 \neq m_2}$

   Donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable :

   On choisit un vecteur complétant la famille libre (v_1, v_2) *en une base, par exemple le vecteur* e_1.

   On prend $v_3 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *car* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

   On a $\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 & \ldots(1) \\ v_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 & \ldots(2) \\ v_3 = e_1 \end{cases}$

   De $2 \times (1) - (2) : 2v_1 - v_2 = v_3 - e_2 \Rightarrow e_2 = -2v_1 + v_2 + v_3$

   De $(1) : e_3 = v_1 - v_2 - 2v_3$

   $\begin{cases} e_1 = v_3 \\ e_2 = -2v_1 + v_2 + v_3 \\ e_3 = 3v_1 - v_2 - 2v_3 \end{cases}$

   $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = (e_1 e_2 e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $f(v_1) = \lambda_1 v_1 = 0$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2 = v_2$ *et* $f(v_3) = f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 = v_3 + 2(-2v_1 + v_2 + v_3) + 3v_1 - v_2 - 2v_3 = -v_1 + v_2 + v_3$

   Finalement $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

2 Polynômes annulateurs

Soit E un K-espace vectoriel et $R \in K[\lambda]$

$$R(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0$$

Si $f \in End_k(E)$, on note $R(f)$ l'endomorphisme de E définie par

$$R(f) = a_n f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \ldots + a_2 f^2 + a_1 f^1 + a_0 id$$

Ou bien

$$R(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 I_n$$

Remark 4
On a $P(f) \circ \varphi(f) = \varphi(f) \circ P(f)$.

Definition 5
Soit $f \in End_k(E)$, un polynôme $R(\lambda) \in K[\lambda]$ est dit annulateur de f si

$$R(f) = 0 \quad ou \quad R(A) = 0$$

Theorem 6 ***de Cayley Hamilton***
Soit $f \in End_k(E)$ et $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de f, alors $P(f) = 0$ (ou $P(A) = 0$).

Proof.
Supposons $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ dans ce cas f est trigonalisable.
Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ une base de E telle que

$$T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$P(\lambda) = \det(T - \lambda I_n)$
On a
$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$
$P(f) = (\lambda_1 id - f) \circ (\lambda_2 id - f) \circ \ldots \circ (\lambda_n id - f)$
On a : $P(f)(v_1) = (\lambda_1 id - f) \circ (\lambda_2 id - f) \circ \ldots \circ \underbrace{(\lambda_n id - f)(v_1)}$ $=$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1 id - f) \quad \circ(\lambda_2 id - f) \quad \circ \ldots \quad \circ \underbrace{(\lambda_n id - f) \circ (\lambda_1 id - f)(v_1)} = 0 \\
&P(f)(v_2) \;=\; (\lambda_3 id - f) \circ \ldots \circ (\lambda_n id - f) \circ (\lambda_1 id - f) \circ (\lambda_2 id - f)(v_2) \\
&\qquad\quad\;\; =\; (\lambda_3 id - f) \circ \ldots \circ (\lambda_n id - f) \circ (\lambda_1 id - f) \circ \ldots \circ \underbrace{(\lambda_1 id - f)(-a_{12} v_1)}_{=0} = 0
\end{aligned}
$$

Et par récurrence on trouve :

$$
\begin{aligned}
P(f)(v_i) &= 0, \forall\ i = \overline{1, n} \\
\text{D'où } P(f) &= 0
\end{aligned}
$$

■

Remark 7

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda id)$

$P(f) = \det \underbrace{(f - f)}_{=0} = 0$

Example 8

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$

Comme $\det(A) = P(0) = 2 \neq 0$

A est inversible.

D'après le théorème de Cayley Hamilton.

$P(A) = 0 \Rightarrow P(A) = -A^3 + 4A^2 - 5A + 2I_3 = 0$

Donc $\quad -A^3 + 4A^2 - 5A = -2I_3$

$$A\left[-A^2 + 4A - 5I_3\right] = -2I_3 \Rightarrow A\left[\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I_3\right] = I$$

D'où $\ A^{-1} = \dfrac{1}{2}A^2 - 2A + \dfrac{5}{2}I_3$

Comme $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 1/2 \\ 10 & 3 & -1 \\ -10 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 20 & 6 & -2 \\ -20 & -2 & 2 \end{pmatrix}$