Université de M'sila(2019/2020)
Département des Sciences Techniques ($1^{ère}$ année ST)

Le 19/01/2020
Durée: 1^h30mn

Epreuve du 1^{er}semestre
Module: Mathématiques 01

Exercice 01 (5pts)

Soit U l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-2,+\infty[$ définie par $\forall x \in, U(x) = e^x - 2$

1. $U^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}, U(x) \in \{0\}\}$, $U(x) = e^x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \ln 2$, alors $U^{-1}(\{0\}) = \{\ln 2\}$ (1)

et $U([0, \ln 2]) = \{U(x) \in]-2,+\infty[\,,\ x \in [0, \ln 2]\} = [-1, 0]$ (1)

2 Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

a) L'injectivité, Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, supposons que $U(x) = U(x') \Longrightarrow e^x - 2 = e^{x'} - 2 \Longrightarrow x = x'$ alors U est injective (1)

b) La surjectivité, Soit $y \in]-2,+\infty[$, Supposons que $y = U(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $y = U(x) \Longrightarrow e^x - 2 = y \Longrightarrow x = \ln(y+2)$ (1)

Alors, pour tout $y \in]-2,+\infty[$, $\exists x = \ln(y+2) \in \mathbb{R}$ tel que $y = U(x)$, alors U st surjective. U est injective et surjective alors elle est bijective et
$$U^{-1} :]-2,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow U^{-1} = \ln(x+2)$$ (1)

Exercice 02 (5pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \dfrac{1}{a} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin ax}{x} + (x-a)[x] - \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq a \end{cases}$

$[x]$ est la partie entière de x, et a un réel positif ($a > 0$).

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue sur son domaine de définition D_f.

0,5

$D_f =]-\infty, a]$, $f$est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, a[$ et en $x_0 = a$ on a $\lim\limits_{x \stackrel{\leq}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \stackrel{\leq}{\to} 0} x^2 + x + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a}$, 0,5

et $\lim\limits_{x \stackrel{\geq}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \stackrel{\geq}{\to} 0} \dfrac{\sin ax}{x} + (x-a)[x] - \sqrt{x} = \lim\limits_{x \stackrel{\geq}{\to} 0} a\dfrac{\sin ax}{ax} + (x-a)[x] - \sqrt{x} = a$ 0,5

f est continue en $0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \stackrel{\leq}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \stackrel{\geq}{\to} 0} f(x) = f(0) \Longrightarrow \dfrac{1}{a} = a \Longrightarrow a = 1$ ou $a = -1$ 0,5

et tantque a est positif alors la valeur de a pour que f soit continue est $a = 1$ (1)

2 Pour la valeur de a trouvée dans (1). Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = 0$.

Pour $a = 1$. f est continue sur $]0, a[$, et on a $f(0) = 1 > 0$, et $f(a) = f(1) = \sin 1 - 1 < 0$ (1)
alors par le théorème de valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in c \in]0, a[$, tel que $f(c) = 0$. (1)

Exercice 03 (6pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(\cosh x)}{x\ln(1+x)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f

Le premier terme dans le dénominateur $(x\ln(1+x))$ est de dégrée 2 alors on effectue le D.L à l'ordre 4

$$\ln(\cosh x) = \ln(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)) = \left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right) + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$ 1

$$x\ln(1+x) = x(x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)) = x^2 - \frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}\,o(x^4)$$ 1

$$f(x) = \frac{\ln(\cosh x)}{x\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}\,o(x^4)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\,o(x^2)} = \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$ 1

2 $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$. 0,5 D'après la formule de Taylor on a $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ alors $f^{(n)}(0) = n!c_n$

$f'(0) = 1!c_1 = 1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, 0,5 $f''(0) = 2!c_2 = 2\times\frac{-1}{8} = \frac{-1}{16}$ 0,5

3 Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

L'équation de la tangente est 0,5 $y = \frac{1}{2}+\frac{x}{4}$, $f(x)-y = -\frac{x^2}{8}+o(x^2) \leq 0$ alors la courbe de f est en dessus de sa tangente au voisinage de 0. 1

1. **Ind:** $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$
   $\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$

Exercice 04 (4pts)

On considère sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ la loi de composition interne $*$ définie par
Pour tout $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a*b = a+b+ab$

1. Montrer que $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},*)$ est un groupe.

a L'associativité; Pour tout $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a*(b*c) = (a*b)*c$ 1

b l'élément neutre; Pour tout $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, supposons que $a*e = e*a = a$ pour certain $e\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$a*e = e*a = a \Longrightarrow e = 0$, alors la loi $*$ admet un élément neutre $e = 0$ 1

c la symétrie; Pour tout $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, supposons que $a*a' = a'*a = e = 0$ pour certain $a'\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$a*a' = a'*a = 0 \Longrightarrow a' = \dfrac{-a}{1+a}$. Alors tout élément $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ admet un symétrie $a^{-1} = \dfrac{-a}{1+a}$ pour la loi $*$ 1

2 Le groupe $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},*)$ est-il abélien?.

On a $a*b = b*a$, alors la loi $*$ est commutatif donc le groupe $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},*)$ est abélien. 1