

### III. Calcul des éléments de transmission de mouvement.

#### III.1 Introduction

Le premier problème qui se pose dans le dimensionnement d'une transmission est le recensement des efforts. L'étude de cette question nous permettra du reste d'envisager le fonctionnement d'un certain nombre d'éléments courants de transmission.

#### III.2 Principe

La démarche fondamentale consiste à déterminer le chemin de la puissance. On en déduit aisément les efforts actifs, c'est-à-dire ceux qui travaillent. Mais la plupart des transmissions ne peuvent exister que moyennant des efforts secondaires destinés à maintenir les liaisons. Contrairement à ce que pourrait faire penser l'adjectif secondaire, ces efforts ne sont pas nécessairement plus petits que les efforts actifs. Ils induisent de la flexion et parfois de l'extension et jouent souvent un rôle fondamental dans la résistance des arbres et de leurs supports.

La détermination des efforts secondaires fait l'objet d'une deuxième étape de calcul, où interviennent les efforts actifs et le type de transmission considéré.

#### III.3. Rhéogramme de la puissance

La puissance fournie par le ou les moteurs est amenée aux récepteurs par la transmission, ce qui occasionne d'ailleurs certaines pertes. On a donc en général la relation

$$\sum P_{\text{mot}} = \sum P_{\text{réc}} + \sum P_{\text{pertes}}$$

Dans le plus grand nombre de transmissions mécaniques, les pertes sont faibles devant la puissance à transmettre, c'est-à-dire que le rendement

$$\eta = \frac{\sum P_{\text{réc}}}{\sum P_{\text{mot}}}$$

est voisin de l'unité. C'est pourquoi, en dehors de cas très particuliers, il est d'usage, au moins dans une première analyse, de négliger les pertes (ce qui équivaut à poser  $\eta = 1$ ). Dans ces conditions, la puissance des moteurs passe aux récepteurs sans perte ni profit, à la manière d'un fluide incompressible. On peut alors remonter de chaque récepteur vers son générateur pour établir le chemin que prend sa puissance. L'ensemble des chemins de tous les récepteurs forme dans le cas général un circuit maillé, que nous appellerons rhéogramme de la puissance.

À partir du rhéogramme, il est aisé de déterminer les efforts moteurs, car la puissance  $P$  est toujours de la forme

$$P = Qv$$

où  $v$  est une vitesse généralisée et  $Q$ , l'effort actif associé. En pratique, on rencontre des vitesses de translation pour lesquelles la formule de la puissance s'applique sans modification, et des vitesses de rotation, pour lesquelles cette formule doit s'entendre comme

$$P = M_t \omega = M_t \cdot 2\pi N$$

où  $M_t$  est le moment de torsion,  $\omega$ , la vitesse angulaire (nombre de radians par unité de temps) et  $N$ , la fréquence de rotation (nombre de tours par unité de temps). Nous allons illustrer cette manière de faire par quelques exemples.

#### III.3.1 Réducteur à engrenages

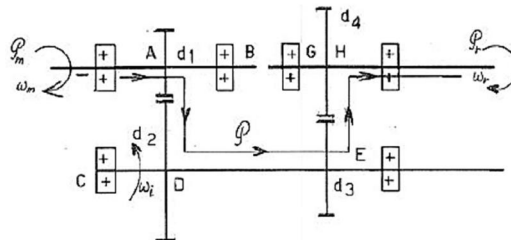


Figure III.1. Réducteur à engrenages à deux étages.

Un réducteur est destiné à transformer une puissance à grande vitesse de rotation  $\omega_m$  en une puissance à faible vitesse de rotation  $\omega_r$ . Le réducteur à engrenages de la figure III.1 possède deux étages de réduction. Le rendement des engrenages est élevé (pertes de l'ordre du pourcent), ce qui permet de négliger les pertes en première approximation. On a donc immédiatement

$$M_{tm} = \frac{P}{\omega_m} \quad \text{et} \quad M_{tr} = \frac{P}{\omega_r}$$

C'est-à-dire que le couple récepteur est beaucoup plus important que le couple moteur. Remarquons que cela signifie que ces deux couples ne sont pas en équilibre et que, dès lors, si l'on fait le bilan d'équilibre du réducteur complet, on constate qu'il faut bien que la différence

$$\Delta M_t = M_{tr} - M_{tm}$$

passé quelque part. Ce quelque part, c'est la liaison entre le réducteur et la fondation. Il est donc essentiel d'attacher le réducteur à la fondation !

Examinons à présent le chemin de la puissance. Elle passe de l'entrée au point A par l'arbre moteur. Elle passe alors par les roues dentées sur l'arbre intermédiaire, où elle fait le chemin DE. De là, elle passe par le second engrenage à l'arbre récepteur, où elle fait le chemin du point H à la sortie. Ceci nous permet d'obtenir directement le moment de torsion dans toutes les portions d'arbres :

Portion d'arbre	Moment de torsion
Entrée - A	$P/\omega_m$
A - B	0
C - D	0
D - E	$P/\omega_i$
E - F	0
G - H	0
H - Sortie	$P/\omega_r$

On peut tout aussi aisément déduire les efforts actifs dans les engrenages. Nous traiterons le premier engrenage pour fixer les idées (fig. III.2). Grâce à la présence des dents, deux circonférences (une sur chaque roue) roulent sans glisser l'une sur l'autre. C'est ce que l'on appelle les circonférences primitives. Si  $d_1$  et  $d_2$  sont leurs diamètres respectifs, elles ont en leur point de contact  $I$  une vitesse commune  $v$  donnée par

$$v = \omega_m \frac{d_1}{2} = \omega_i \frac{d_2}{2}$$

Ce qui implique évidemment

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_2}{d_1}$$

Pratiquement, pour que les deux roues puissent engrener, il faut qu'elles aient le même pas  $p$ . Ce pas est donné par

$$p = \frac{\pi d}{Z}$$

Où  $Z$  est le nombre de dents de la roue considérée. Cependant, le pas est une grandeur désagréable, car le diamètre est normalement un nombre rationnel, de même évidemment que le nombre entier de dents. Il en résulte que le pas est un nombre irrationnel. Du reste, sur les plans, on ne voit pas la circonférence, mais le diamètre. C'est pourquoi on ne parle jamais du pas, mais bien du module

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{Z}$$

qui est un nombre rationnel. Ce sont les modules qui sont normalisés. Les deux roues, ayant le même pas, ont donc le même module. Il en découle également que

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{mZ_2}{mZ_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

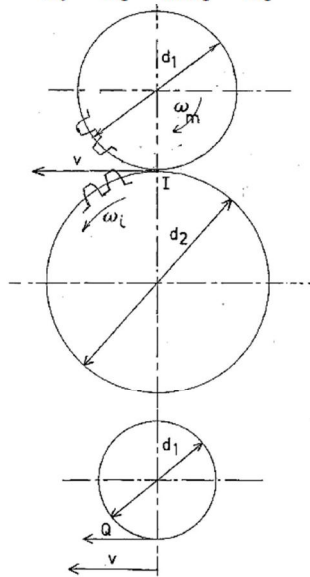


Figure III.2. Effort actif dans le premier engrenage.

C'est-à-dire que les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux nombres de dents. Ceci étant, la roue motrice fournit une puissance

$$P = Qv$$

$Q$  étant la composante tangentielle de l'effort d'interaction entre les deux roues, ce qui donne

$$Q = \frac{P}{v}$$

C'est l'effort actif. Nous verrons plus loin quels sont les efforts secondaires qui l'accompagnent.

### III.4. Répartition des efforts dans les engrenages

#### III.4.1. Engrenage droit

Commençons par préciser le vocabulaire exact relatif aux engrenages. Un engrenage est un système dans lequel deux roues dentées engrènent entre elles. On appelle généralement pignon la petite roue dentée, l'autre étant simplement dénommée roue. Affectons ici d'un indice 2 les grandeurs relatives au pignon et d'un indice 1 les grandeurs relatives à la roue (fig.III.3). Nous savons que l'effet des dents est d'amener les circonférences primitives à rouler sans glisser l'une sur l'autre. Leur vitesse commune au point de contact est donc

$$v = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

Pour que les dents des deux roues puissent entrer et sortir des entredents de la roue conjuguée, il faut évidemment qu'elles soient plus étroites en leur sommet qu'en leur base. Au point de contact, le profil de la dent a donc sa normale inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à la tangente au cercle passant par ce point de contact. Cet angle est appelé angle de pression. La dent conjuguée doit à ce moment avoir, au point de contact, le même angle. C'est à partir de ces conditions que l'on détermine le profil des dents, dont l'étude précise relève de cours spécialisés. En mécanique de puissance, on utilise exclusivement le profil en développante de cercle. Il possède cette propriété fondamentale que l'angle de pression reste constant tout au long de l'engrènement. À l'heure actuelle, cet angle est normalisé à la valeur

$$\beta = 20^\circ$$

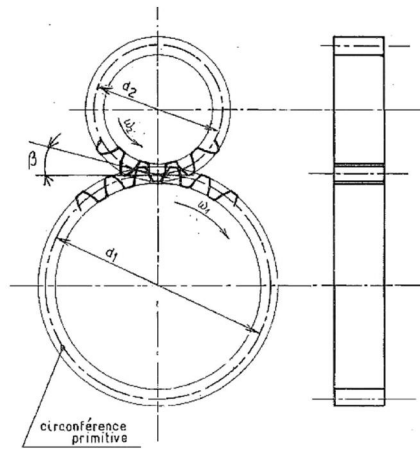


Figure III.3. Engrenage droit.

Si l'on néglige les frottements, l'action de la roue menante sur la roue menée est située sur la normale commune aux deux profils. On a donc (fig. III.4)

$$\text{Force tangentielle : } F_t = Q = \frac{P}{v} = \frac{P}{\omega \frac{d}{2}}$$

$$\text{Force radiale : } F_r = F_t \operatorname{tg} \beta$$

Pour un angle de pression de 20°, la tangente vaut 0,36, ce qui signifie que l'effort secondaire vaut ici 36% de l'effort actif. Les forces ci-dessus induisent les sollicitations suivantes pour l'arbre :

- ❖ Moment de torsion  $M_t = F_t (d/2)$ ;
- ❖ Flexion dans le plan  $xOz$ , sous l'effet de l'effort tranchant  $F_t$ ;
- ❖ Flexion dans le plan  $yOz$ , sous l'effet de l'effort tranchant  $F_r$ .

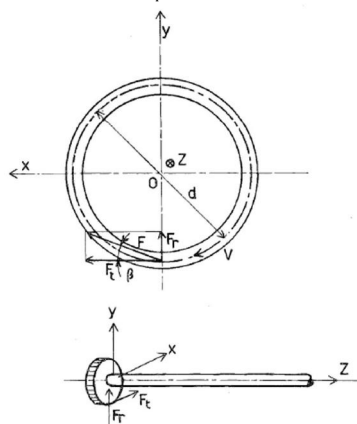


Figure III.4. Efforts dans un engrenage droit.

### III.4.2. Engrenage à denture hélicoïdale

Diverses considérations pratiques, au rang desquelles interviennent le silence de fonctionnement et la régularité de l'engrènement, conduisent à préférer dans bien des cas la denture hélicoïdale. Sa caractéristique est que les dents sont inclinées par rapport à la génératrice du cylindre primitif d'un certain angle  $\gamma$ .

Cet angle d'hélice varie entre 8 et 20° selon les applications. Il vaut souvent 10°. Sur une dent, on a toujours (fig. III.5)

$$F = F_t + F_r \text{ avec } F_r = F_t \operatorname{tg} \beta$$

Et l'angle de contact reste en général de 20°. Mais du fait de l'angle d'hélice  $\gamma$ , la force tangentielle  $F_t$  se décompose elle-même en une composante active  $Q$  et une force axiale  $F_a$ . On a donc

$$F_a = Q \operatorname{tg} \gamma \text{ et } F_t = \frac{Q}{\cos \gamma}$$

soit en définitive

$$Q = \frac{P}{\omega \frac{d}{2}}, \quad F_a = Q \operatorname{tg} \gamma, \quad F_r = Q \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \gamma}$$

Ces efforts soumettent l'arbre à

- ❖ un moment de torsion  $M_t = Q (d/2)$ ;
- ❖ une flexion dans le plan  $xOz$ , due aux efforts  $F_r$  et  $F_a$ ;
- ❖ une flexion dans le plan  $yOz$ , due à l'effort  $Q$ ;
- ❖ un effort axial  $F_a$  qui devra être repris par une butée.

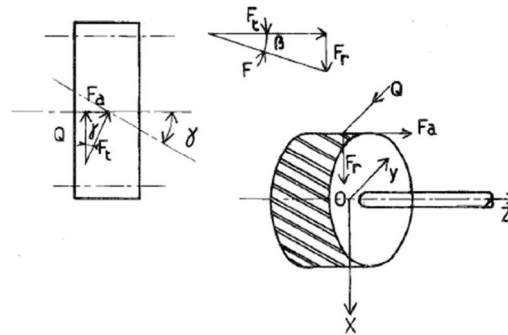


Figure III.5 . Engrenage à denture hélicoïdale.

### III.4.3 Engrenage conique droit

Nous nous limiterons au cas courant de l'engrenage entre deux arbres perpendiculaires. Les deux demi-angles au sommet des cônes,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  (fig. III.6) sont liés par les relations

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 &= \frac{\pi}{2} \\ \frac{D_1}{2} \operatorname{tg} \delta_2 &= \frac{D_2}{2} \\ \frac{D_2}{2} \operatorname{tg} \delta_1 &= \frac{D_1}{2} \end{aligned}$$

ce qui implique, en notant toujours  $Z$  le nombre de dents,

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}, \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

La force active vaut

$$Q = \frac{P}{\omega_1 \frac{D_1}{2}} = \frac{P}{\omega_2 \frac{D_2}{2}}$$

La composante normale à la ligne  $OA$ , dans le plan  $BAC$ , vaut

$$F_n = Q \operatorname{tg} \beta$$

$\beta$  étant l'angle de pression. Elle se décompose en

$$\begin{aligned} F_{r1} = F_{a2} &= F_n \cos \delta_1 = F_n \sin \delta_2 \\ F_{r2} = F_{a1} &= F_n \sin \delta_1 = F_n \cos \delta_2 \end{aligned}$$

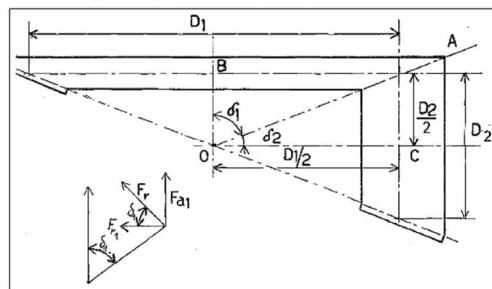


Figure III.6. Engrenage conique droit.

### III.5. Efforts dans les transmissions par courroie

#### III.5.1. Courroies plates

Nous commencerons par les courroies plates qui sont les plus simples. Du reste, les résultats obtenus se transposeront sans peine au cas des courroies trapézoïdales.

##### III.5.1.1. Géométrie de la transmission

La géométrie d'une transmission classique par courroie sans tendeur est représentée en figure III.7. Les deux poulies ont pour diamètres respectifs  $D$  pour la grande et  $d$  pour la petite. L'arc sur lequel la courroie s'enroule sur la jante d'une poulie s'appelle arc embrassé. Nous le noterons  $\alpha_G$  sur la grande poulie et  $\alpha_P$  sur la petite poulie. Entre celles-ci, pour autant que la tension de la courroie soit suffisante, la courroie suit la tangente commune aux deux poulies. Ces parties de la courroie qui sont en l'air sont appelées brins. La distance  $e$  entre les axes des deux poulies est appelée entraxe.

Appelons  $\beta$  la différence  $((1/2) - (\alpha_P / 2))$  Il ressort de la figure que

$$\sin \beta = \frac{D - d}{2e}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \pi - 2\beta \\ \alpha_G &= \pi + 2\beta \end{aligned}$$

Enfin, la longueur de la courroie en service se calcule par

$$\mathcal{L} = \frac{d}{2} \alpha_P + \frac{D}{2} \alpha_G + 2e \cos \beta$$

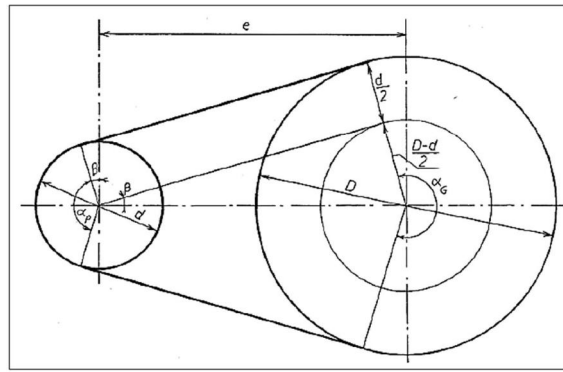


Figure III.7. Transmission par courroie sans tendeur.

Ce n'est pas sa longueur relaxée, car la courroie est montée sous une tension de pose  $N_0$ . La longueur relaxée est, en vertu de la loi de Hooke, égale à

$$C_0 = \frac{L}{1 + \frac{N_0}{ES}}$$

où  $E$  est le module de Young de la courroie et  $S$  sa section.

### III.5.2 Courroies trapézoïdales

Les courroies trapézoïdales permettent d'obtenir un frottement équivalent plus grand que les courroies plates. En effet (fig. III.8), elle reposent sur leurs flancs, qui sont inclinés. Les pressions par unité de longueur  $p_1$  sur chaque flanc ont une résultante radiale

$$p = 2p_1 \sin \frac{\delta}{2}$$

Les efforts tangentiels sur les flancs sont, par unité de longueur,  $q_1$  sur chacun d'eux. Lors du glissement, elles sont liées aux forces de pression par unité de longueur  $p_1$  par la condition de Coulomb

$$q_1 = \mu_1 p_1$$

Où  $\mu_1$  est le coefficient de frottement entre la courroie et les flasques de la poulie. La résultante de ces efforts tangentiels est

$$q = 2q_1 = 2\mu_1 \frac{p}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = \mu_1 \frac{p}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

On se ramène donc à la théorie des courroies plates en introduisant un coefficient de frottement équivalent

$$\mu = \frac{q}{p} = \frac{\mu_1}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

En pratique, l'angle  $\delta$  est de l'ordre de  $34^\circ$ , ce qui donne

$$\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = 3,420$$

On obtient ainsi des coefficients de frottement équivalents de l'ordre de 1 à 2,5. Les courroies trapézoïdales peuvent donc transmettre un effort actif plus grand pour la même tension moyenne à l'arrêt, mais elle ne permet pas de travailler avec des vitesses aussi grandes que les courroies plates. On ne dépasse guère 30m/s avec les courroies trapézoïdales, alors que les courroies plates permettent d'atteindre 50m/s.

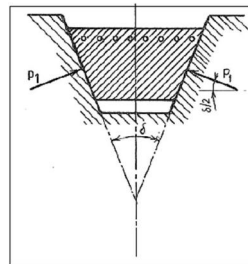


Figure III.8. Courroie trapézoïdale.

### III.6 Efforts dans les transmissions par dans chaîne à rouleaux

Dans les transmissions par chaînes à rouleaux, les rouleaux transmettent l'effort à la roue dentée avec une certaine obliquité égale au demi-angle de la dent (fig. III.9). Cette obliquité est de l'ordre de  $15$  à  $19^\circ$ . On a donc, si  $\gamma$  est l'angle entre deux maillons, les relations

$$N_0 = N_1 \cos \beta + R_1 \cos \gamma$$

$$N_1 \sin \beta = R_1 \sin \gamma$$

De la dernière relation on tire immédiatement

$$R_1 = N_1 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Ce qui implique

$$N_0 = N_1 \left( \cos \beta + \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} \right) = N_1 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}$$

Cette relation se reproduit de maillon en maillon, si bien qu'après  $n$  maillons, il subsiste l'effort

$$N_n = N_0 \left( \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)^n$$

Il est bien clair que  $\beta = (2\pi / Z)$  où  $Z$  est le nombre de dents de la roue. Le nombre de dents en prise  $Z_P$  est la fraction de ce nombre de dents située dans l'arc embrassé  $\alpha$ , soit

$$Z_P = \text{partie entière de } \left( Z \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

L'effort au brin mou  $t$  est donc relié à l'effort au brin tendu  $T = N_0$  par

$$t = T \left( \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)^{Z_P}$$

Ainsi, par exemple, pour  $\gamma = 15^\circ$  et  $Z = 17$  dents, on a

$$\beta = \frac{360}{17} = 21,18^\circ$$

et  $\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin(15^\circ)}{\sin(36,18^\circ)} = 0,4384$

Pour un arc embrassé de  $180^\circ$ , le nombre de dents en prise vaut

$$Z_P = \text{partie entière de } \left( 17 \frac{180}{360} \right) = 8$$

ce qui donne

$$\frac{t}{T} = (0,4384)^8 = 0,001364$$

L'effort dans le brin mou est donc négligeable et on peut écrire sans grande erreur  $T = Q$ . L'effort sur l'axe est dès lors approximativement égal à l'effort actif, dans la direction du brin tendu. C'est là l'avantage des chaînes sur les courroies : à effort actif égal, elles soumettent l'arbre à des efforts bien moindres.

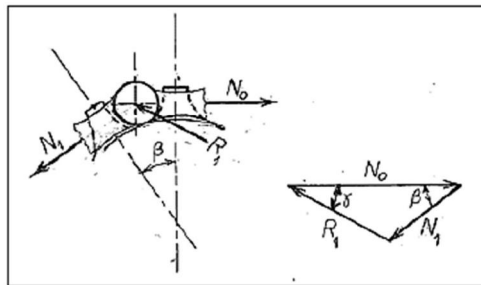


Figure III.9. Transmission par chaîne à rouleaux.

Il existe cependant un inconvénient aux transmissions par chaînes. Il s'agit de l'effet de polygone, qui consiste en ceci : supposons que la roue de la figure III.10 soit motrice et tourne à une vitesse de rotation constante  $\omega$ . Dans la première configuration, à gauche de la figure, la vitesse du brin tendu est donnée par

$$v = \omega R$$

tandis que dans la seconde configuration, à droite de la figure, elle vaut

$$v = \omega R \cos \frac{\beta}{2}$$

Le rapport de transmission n'est donc pas strictement constant. Cet effet s'accroît pour les roues à faible nombre de dents, pour lesquelles l'angle  $\beta$  est relativement grand.

Les courroies crantées s'apparentent aux chaînes pour la transmission de l'effort, avec  $\gamma = 20 \dots 25^\circ$ . Elles n'ont pas d'effet de polygone.

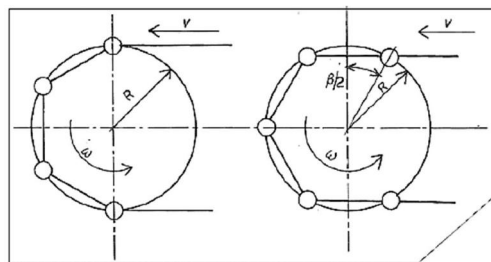


Figure III.10. Effet de polygone.

Chapitre. IV Calcul des transmissions par engrenages.

IV.1. Considérations générales

IV.1.1. Définitions de base

L'**engrenage** est la transmission constituée par deux roues dentées conjuguées, mobiles autour de deux axes de rotation qui ont des positions relatives invariables; les roues dentées transmettent les mouvements de d'une roue à l'autre par engrènement (fig. IV.1 donne une image 3D qui indique les axes de rotation par lignes continues).

La **roue dentée** est un élément de machine prévu avec des dents disposées régulièrement par rapport à une surface théorique caractéristique de la roue, en général de révolution (surface primitive) ou une autre surface.

La **roue dentée conjuguée** est chacune des deux roues qui peuvent constituer un engrenage par rapport à sa paire, dans l'acception que l'engrenage ainsi constitué assure une certaine loi d'engrènement (plus tard on présentera la loi de base de l'engrènement plan frontal).

Les **dents** sont les proéminences des roues, séparées par des espaces qui s'appellent des entredents. La totalité des dents et des entredents forme la denture de la roue dentée.

L'**engrènement** représente le processus de contact entre les dents de la roue dentée.

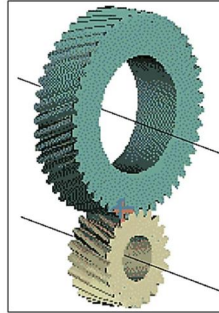


Fig. V.1. Image 3D d'un engrenage (cylindrique)

IV.1.2. Classifications

On présente sur la fig. IV.2 le schéma d'une classification restreinte (seulement à certains points de vue) **des engrenages à rapport de transmission constant** (celles à rapport de transmission variable ont une utilisation extrêmement restreinte) **et avec un entraxe constant**. Les points de vue de classification considérés sont très représentatifs :

- a) la position relative des roues dentées ;
- b) la position relative des surfaces caractéristiques ;
- c) la possibilité des mouvements relatifs des axes de roues dentées.

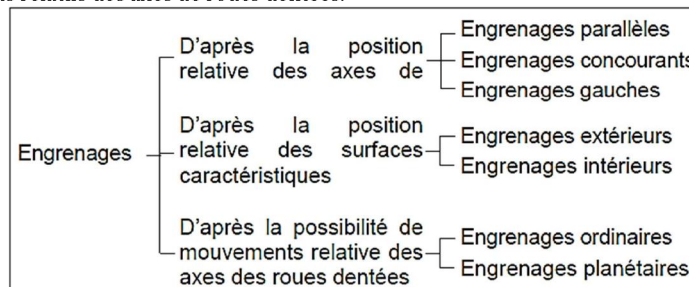


Fig. V.2. Classification générale des engrenages

IV.1.3. Surface primitives et types d'engrenages ordinaires et de roues dentées correspondantes

IV.1.3.1. Surfaces primitives pour les engrenages cylindriques extérieurs

On fait une discussion analytique seulement sur surfaces primitives de **engrenages cylindriques extérieurs**. Pour les autres types d'engrenages nous voulons présenter seulement les formes des surfaces primitives.

Soit deux axes parallèles que nous voulons relier par des roues dentées de telle sorte que leurs vitesses angulaires  $\vec{\omega}_1$  et  $\vec{\omega}_2$  soient de sens contraires (fig. IV.3). Nous voulons démontrer que dans ce cas il existe deux surfaces cylindriques qui roulent sans glissement l'une sur l'autre.

Considérons pour cela le mouvement relatif de la roue future 2 par rapport à la roue future 1 (nous avons utilisé le terme "futur" puisque les roues ne sont pas définies encore). Ce mouvement résulte de la composition des deux rotations:

$\vec{\omega}_2$  et  $-\vec{\omega}_1$  à la roue 2, ce qui donne la résultante (vitesse angulaire relative de la roue 2 par rapport à la roue 1):

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1;$$

$\vec{\omega}_1$  et  $-\vec{\omega}_1$  à la roue 1, qui devient évidemment fixe.

Trouvons la position de la vitesse angulaire relative de la roue 2 par rapport à la roue 1,  $\vec{\omega}_{21}$ . On voit que la dernière expression conduit à la composition des vecteurs  $\vec{\omega}_2$  et  $-\vec{\omega}_1$ . On sait du cours de "Mécanique" que la position de la résultante de ces vecteurs est donnée par l'expression:

$$\omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2}, (1)$$

où  $r_{w1}$  et  $r_{w2}$  sont les bras correspondants de  $\vec{\omega}_{21}$  par rapport aux directions des vecteurs  $\vec{\omega}_2$  et  $-\vec{\omega}_1$  respectivement La fig. IV.3 montre la construction graphique de l'expression ci-dessus par des triangles semblables. Il en résulte le vecteur  $\vec{\omega}_{21}$ .

Chaque point sur l'axe de  $\vec{\omega}_{21}$  (par exemple, C) a une vitesse relative nulle perpendiculaire sur cet axe. Vraiment, les vitesses absolues de ce point sont des vecteurs perpendiculaires sur la ligne des centres des roues,  $O_1O_2$ , donc ces vecteurs ont la même direction; leurs grandeurs sont:

$$V_{t1} = \omega_1 r_{w1} ;$$

$$V_{t2} = \omega_2 r_{w2} .$$

Mais l'expression (1) montre que ces deux vitesses sont égales :

$$V_{t1} = V_{t2} ;$$

$$\vec{V}_{t1} = \vec{V}_{t2} .$$

D'où on obtient la vitesse tangentielle relative nulle :

$$\vec{V}_{t21} = \vec{V}_{t2} - \vec{V}_{t1} = \vec{0} ..$$

Voilà pourquoi les lieux géométriques produits par la rotation de l'axe de  $\vec{\omega}_{21}$  par rapport à chaque axe de  $\vec{\omega}_1$  et  $\vec{\omega}_2$  sont deux cylindres de rayons  $r_{w1}$  et  $r_{w2}$ , qui roulent sans glissement l'un sur l'autre sur l'axe de  $\vec{\omega}_{21}$ . Cet axe porte le nom **d'axe instantané de rotation relative** (AIR sur la fig. IV.3) et les cylindres sont dénommés des **surfaces primitives**.

Il en résulte aussi le rapport de transmission en fonction des éléments géométriques, si on utilise (1):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$$

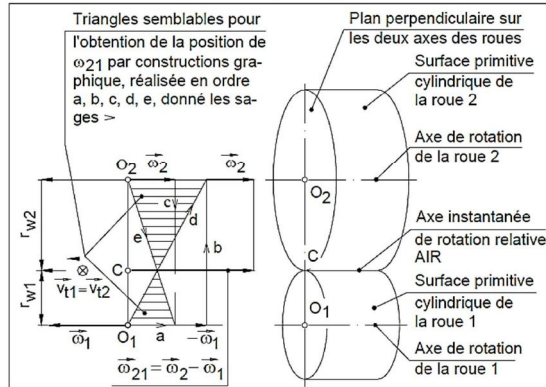


Fig. IV.3. Obtention de l'axe instantané de rotation et des surfaces primitives cylindriques à l'engrenage parallèle extérieur

#### IV.1.3.2. Surfaces primitives pour autres types d'engrenages

**Vue générale.** Les surfaces primitives (de roulement) pour différents types d'engrenages peuvent être définies conformément de la discussion antérieure. Elles sont représentées sur la fig. IV.4 pour les suivants engrenages:

- ❖ parallèle cylindrique extérieur (fig. IV.4, a) et intérieur (fig. IV.4, b);
- ❖ concurrent conique extérieur (fig. IV.4, c);
- ❖ gauche (théorique) (fig. IV.4, d).

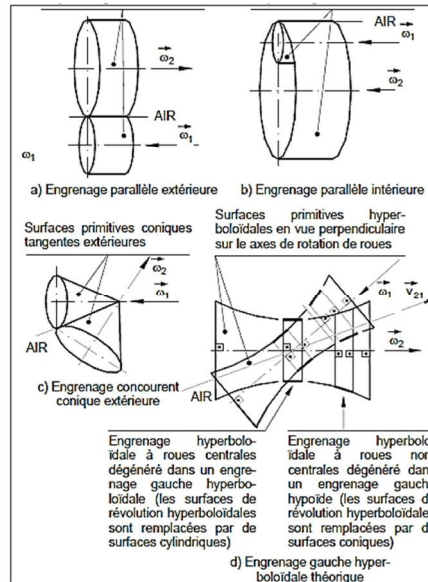


Fig. IV.4. Surfaces primitives et types d'engrenages correspondants AIR - axe instantané de rotation relative

Sur la fig. IV.4 non été pas représentés aussi les surfaces primitives dans le cas de l'engrenage concurrent conique intérieur qui est moins utilisé dans la pratique industrielle.

En ce qui concerne l'engrenage hyperboloidal extérieur, qui a été représenté en projection sur la fig. IV.4, d - on fait de suivantes observations :

1. l'axe instantané de rotation relative AIR se trouve (comme on a été démontré antérieurement) entre les axes de rotation des roues dentées composants, ayant par rapport à eux des angles différentes qui sont définies par le rapport de transmission ;
2. l'engrenage hyperboloidal ne s'utilise pas en pratique à cause de deux raisons de base :



- \* difficultés technologiques de taillage des dentures sur une surface hyperboloïdale ;
- \* dans le cas du cet engrenage apparais une vitesse de glissement  $v_{21}$  le longue de AIR.

Mais - comme on va voir plus tard - ce glissement apparais et est accepté comme existence dans le cas des autres types d'engrenages très utilisés: les engrenages hypoides et les engrenages à vis. Le glissement n'apparais pas aux engrenages parallèles. C'est pourquoi ces dernières engrenages ont le plus grand rendement et sont les plus utilisés.

**Surfaces primitives ou de références pour des engrenages obtenues par la dégénération de l'engrenage hyperboloïdal théorique.** Parce que l'engrenage hyperboloïdal définit antérieurement (fig. IV.4, d) est seulement technique (il n'est pas utilisé dans la technique dans cette forme), il se remplace en pratique par des engrenages qui ont des surfaces primitives obtenues par la dégénération des surfaces primitives hyperboloïdales :

1. des roues centrales ; les surfaces hyperboloïdales se remplacent par des surfaces primitives cylindriques ;
2. des roues non centrales : les surfaces hyperboloïdales se remplacent par des surfaces primitives coniques.

Les **engrenages dégénérés de l'engrenage hyperboloïdal** sont représentés sur la fig. IV.5. Le premier engrenage dégénéré à roues centrales et **l'engrenage gauche cylindrique hélicoïdal** (ou plus simple, **l'engrenage hélicoïdal**, fig. IV.5, a). Il est un engrenage gauche cylindrique (à dents inclinées ou hélicoïdales; la définition de ce type de denture sera faite plus tard). Ses surfaces primitives sont cylindriques, elles étant tangentes dans un seul point. A cause de se tangence désavantageuse des deux surface primitives, qui se transmet similairement vers le contact des dents, l'engrenage hélicoïdal a une portance réduite.

Le deuxième type d'engrenage dégénéré avec roues centrales est **l'engrenage gauche cylindrique orthogonal** (fig. IV.5, b). Comme l'engrenage hélicoïdal, cet engrenage a aussi une portance réduite et il n'est pas utilisé dans la technique. L'engrenage a une denture hélicoïdale et le suivante particularité spécifique: une roue dentée a le diamètre très petite par rapport à l'autre. Comme résultat, on peut obtenir à ce diamètre petit un angle d'inclinaison (primitive) qui assure l'autofreinage entre les dents, donc l'engrenage travaille comme un frein (on évite ainsi l'utilisation d'un frein supplémentaire dans le système).

Parce que l'engrenage gauche orthogonal (fig. IV.5, b) a une portance réduite, on a cherché la modification de ses surfaces primitives cylindriques.

Dans cette idée, la surface primitive de la roue grande est dégénérée dans une surface toroïdale, qui embrasse la surface cylindrique de la roue petite dans la section axiale de cette roue (fig. IV.5, c). On obtient ainsi

**L'engrenage à vis cylindrique**, auquel on ne peut pas définir les surfaces primitives conformément à leur définition, mais seulement des *surfaces de références* ou *caractéristiques* :

- a) surface cylindrique de la roue petite qui est appelée *vis cylindrique* ;
- b) surface toroïdale de la roue grande qui est appelée *roue à vis*.

On a dit que l'engrenage à vis cylindrique a des dents hélicoïdales. C'est pourquoi le sens de rotation de la roue à vis peut être différent au même sens de rotation de la vis (fig. IV.5, c), en fonction de sens d'inclinaison de la denture.

On peut faire l'augmentation de la portance de l'engrenage à vis par application d'une mesure supplémentaire (fig. IV.5, d) : la surface de référence cylindrique de la vis cylindrique peut être remplacée par une surface de référence toroïdale, qui embrasse l'autre surface de référence toroïdale de la roue à vis, dans la section axiale de la vis. On obtient ainsi *l'engrenage à vis globique*.

On discute maintenant *l'engrenage gauche conique*. Les surfaces hyperboloïdales des roues non centrales de l'engrenage hyperboloïdal théorique sont dégénérées dans des surfaces primitives coniques (fig. IV.4, d). En pratique on utilise *l'engrenage gauche conique orthogonal*, qui est appelé *engrenage hypoidé*.

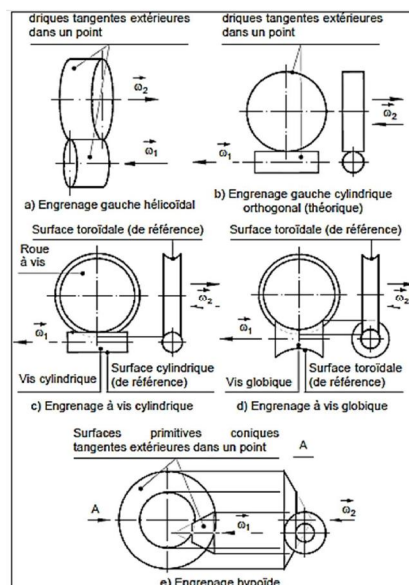


Fig. IV.5. Surfaces primitives ou de références pour des engrenages dégénérés de l'engrenage gauche hyperboloïdal

**Surfaces primitives des engrenages obtenues par la dégénération de l'engrenage parallèle cylindrique ou concurrent conique.** On sait que les engrenages cylindriques à l'engrènement extérieur ou intérieur ont des surfaces primitives cylindriques (fig. IV.4, a et b).

Quand un des cylindres primitifs a le rayon infini, il se transforme en plan primitive (**fig. IV.6, a**). On obtient ainsi *l'engrenage cylindrique à crémaillère*.

Ainsi on sait que les engrenages concourants coniques ont des surface primitives coniques (**fig. IV.4, c**). Si l'angle à vif de l'une des surfaces devient égale à  $11/2$ , elle se transforme dans un disque (plan) primitif (**fig. IV.6, b**). On obtient ainsi *l'engrenage conique à roue plane*.

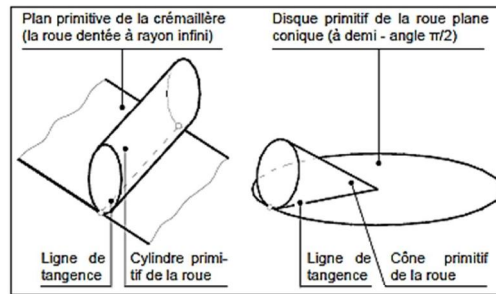


Fig. IV.6. Surfaces primitives pour des engrenages dégénères obtenue de l'engrenage parallèle cylindrique (a) et concurrent conique (b)

#### IV.1.4. Forme des roues dentées

La forme des roues dentées est définie en général par la forme des surfaces primitives spécifiques à l'engrenage dont elles font partie. Ainsi il existe :

1. roues cylindriques - à l'engrenage parallèle cylindrique (**fig. IV.4, a**) ou à l'engrenage gauche hélicoïdal (**fig. IV.5, a**) ;
2. roues conique. à l'engrenage concourant conique (**fig. IV.4, b**) ou à l'engrenage hypoïde (gauche pseudo conique) (**fig. IV.5, e**) ;
3. roue plane. à l'engrenage conique à roue plane (**fig. IV.6, b**).

Dans les autres cas, les dénominations des roues dentées sont spécifiques, elles n'étant liées de la forme de la surface de référence (caractéristique) :

1. à l'engrenage à vis :
  - a) vis cylindrique (**fig. IV.5, c**) ;
  - b) vis globique (**fig. IV.5, d**) ;
  - c) roue à vis (**fig. IV.5, c et d**) ;
2. à l'engrenage cylindrique à crémaillère : la crémaillère (**fig. IV.6, a**).

#### IV.1.5. Éléments de la denture

Quelques éléments de la denture sont représentés dans la **fig. IV.7**. À cause la simplicité de l'exposition et de compréhension, ces éléments sont représentés à une roue cylindrique.

Les dents sont limitées par les surfaces de la tête et du pied. **La surface de la tête** est celle (cylindrique et coaxiale de la surface primitive à la roue cylindrique) qui contient les bouts des dents.

- ❖ **La surface du pied** est celle (cylindrique et coaxiale à la surface primitive de la roue cylindrique) qui contient les fonds des entredents.
- ❖ **La tête** de la dent est la portion de la dent renfermée entre la surface de la tête et celle primitive.
- ❖ **Le pied** de la dent est la portion de la dent renfermée entre la surface du pied et celle primitive.
- ❖ **Les flancs** sont les surfaces latérales le long de la dent renfermées entre la surface de la tête et celle du pied, sur lesquelles on réalise le contact des dents de roues conjuguées. La transmission du mouvement vers un sens de rotation se réalise par les **flancs homologues**, qui se superposent l'un à l'autre à leur rotation autour à l'axe de la roue; pour l'autre sens de rotation il existe une autre paire de flancs homologues.

**La ligne du flanc sur une surface caractéristique de la roue** est l'intersection du flanc avec cette surface. La ligne du flanc porte la dénomination de la surface qui croise le flanc. Par exemple, **la ligne primitive du flanc** est l'intersection du flanc avec la surface primitive de la roue.

La forme de la ligne du flanc détermine la forme longitudinale de la dent. Analysons cet aspect utilisant les exemples de la forme de la ligne primitive du flanc donné par **la fig. IV.8**. L'analyse est général valable pour la ligne du flanc sur quelconque surface caractéristique.

On distingue:

1. **les dents droites** (**fig. IV.8, a, b**), si la ligne (primitive) du flanc coïncide avec la génératrice de la surface (primitive) sur laquelle se trouve cette ligne;
2. **les dents inclinées** ou **hélicoïdales** (**fig. IV.8, c, d**), si la ligne (primitive) du flanc est l'hélice de la surface (primitive) sur laquelle se trouve cette ligne (primitive);
3. **les dents courbes** (**fig. IV.8, f**), si la ligne du flanc est différente de génératrice ou d'hélice de la surface sur laquelle se trouve cette ligne.

On remarque aussi l'existence d'une **denture cylindrique en V**, composée par deux dents inclinées ayant des inclinaisons différentes (**fig. IV.8, e**). Cette denture élimine la force axiale sur l'arbre qui apparaît à la denture inclinée simple (l'aspect sera compris aisément à l'étude des forces dans le sous-chapitre dédié).

**La fig. IV.8** permet aussi la définition des surfaces différentes de celles caractéristiques de la roue (comme est celle primitive):

1. **la surface frontale**, qui est orthogonale sur les génératrices de la surface primitive. Elle est :
  - a) un plan dans le cas de la roue cylindrique (**fig. IV.8, a**) ;
  - b) une sphère dans celui de la roue conique (**fig. IV.8, b**);
2. **la surface normale**, qui est orthogonale (dans un point courant) sur la ligne (primitive) du flanc. Elle est :
  - a) un plan dans le cas de dents droites et hélicoïdales de la roue cylindrique (**fig. IV.8, a, c**);

- b) une sphère dans celui des dents droites (**fig. IV.8, b**) et un plan dans celui des dents hélicoïdales (**fig. IV.4, d**) ou courbes à la roue conique (pour ce dernier cas ;
3. **la surface axiale** qui est la surface (un plan) qui contient l'axe de la roue (cette surface n'est pas représentée dans **la fig. IV.8**, parce que le compréhension de sa signification est très facile).

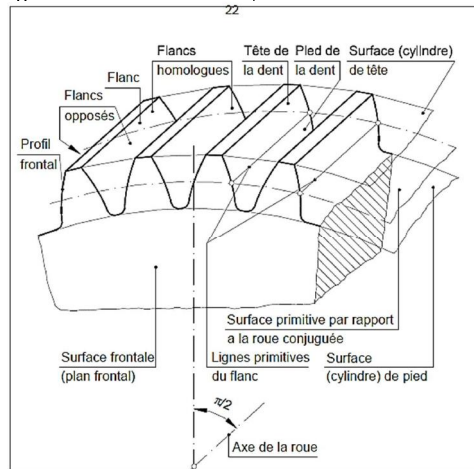


Fig. IV.7. Éléments généraux de la denture marqués sur une roue cylindrique

Le **profil** de la dent est l'intersection du flanc avec une surface frontale, normale, axiale, d'où il résulte le **profil frontal** (**fig. IV.7**), et respectivement, **normal** ou **axial** (se voir **la fig. IV.3** où est représenté le profil frontal). Les plus utilisées profils dans la théorie des engrenements sont ceux frontal et normal. D'autres considérations sur la terminologie des engrenages seront présentées ultérieurement.

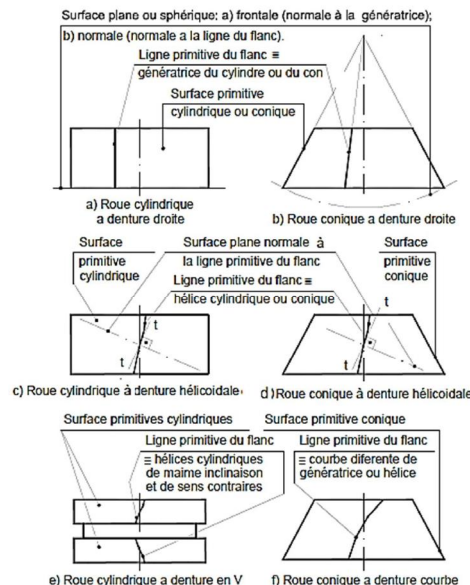


Fig. IV.8. Formes des lignes primitives du flanc

#### IV.1.6. Particularités de base des types d'engrenages

Sur la fig. 2.9 est donnée une classification synthèse de principaux types d'engrenages utilisés en pratique en tenant compte de la classification antérieure des engrenages (**fig. IV.1**). On constate la mention à cette occasion des types de dentures associées pour les engrenages précisés.

**Les engrenages parallèles** ont une utilisation extrêmement large par comparaison aux autres engrenages. Mais ils ont le rapport maximal de transmission de 6.8 (10), pour éviter les disproportions entre les deux roues. Les engrenages cylindriques à dentures hélicoïdale ont deux roues à sens d'inclinaison différente ; elles sont très utilisées par rapport aux engrenages à denture droite, parce qu'elles apportent des avantages multiples (portance plus grand, comportement dynamique plus bonne etc.), sans difficultés technologiques supplémentaires. Ces avantages apparaissent en principal à cause de l'existence d'un engrènement plus favorable entre les paires de dents (un nombre agrandi de lignes de contact entre les paires de dents et de leurs longueurs plus grand à un moment, de telle sorte que des positions plus favorable des lignes de contact sur flanc). Comme résultat, les avantages principaux des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale sont :

- portance relative plus grand aux même matériaux et éléments géométriques de base ;
- une rigidité plus grand et une variation plus réduite de lui pendant l'engrènement, ce qui détermine vibrations réduites (la deuxième cause d'agrandissement de la portance et, dans le même temps, de la fiabilité) ; l'aspect est nécessaire notamment aux nombres de tours plus grands.

**Les engrenages concourants coniques** ont des types différents de dentures selon la forme de la ligne primitive du flanc, du profil frontal et de la hauteur de la denture. Les dentures coniques droites et hélicoïdales (se voir aussi **la fig. IV.8, b, d**) sont le plus souvent octoïdales selon la forme du profil déterminé par roues plates conjuguées, qui ont des flancs plans; les engrenages correspondants

(octoïdales) sont plus sensibles aux défauts d'exécution et de montage et s'obtiennent par des procédés technologiques de productivité très réduite (l'exécution dent à dent). Les dentures coniques courbes (se voir aussi la **fig. IV.8, f**) permettent par leur forme des avantages relatifs:

1. un contact plus grand entre dents et moins influencé par les erreurs technologiques, ce qui conduit à un gabarit plus restreint de l'engrenage;
2. l'exécution par les procédés technologiques de grand productivité (par usinage continu) ; comme résultat, ces engrenages sont recommandés pour séries grands de fabrication, cas qui conduit à un prix de coût plus réduit.

**Les engrenage gauche cylindrique ou hélicoïdal (fig. IV.5, a)** ont un contact ponctuel entre les dents hélicoïdales, de sorte que la puissance transmise est moins importante (quelques kilowatts tout au plus). C'est pourquoi ces engrenages sont moins répandus par rapport aux autres engrenages et ils sont utilisés plutôt cinématiquement.

**Les engrenages hypoïde** (se voir aussi la **fig. IV.5, e**) ont toujours une denture courbe, ce qui permet la transmission d'un chargement important (à plusieurs dizaines de kilowatts). On signale ici un avantage très important de ce type d'engrenage: la possibilité d'appuyer l'arbre de chaque roue sur des paliers placés des deux parties de roue (une chose impossible à réaliser aux engrenages concourants extérieurs). Dans ce cas les déformations des arbres sont diminuées (les déformations des arbres montés en console sont au contraire plus grandes). En outre, l'emplacement des paliers dans l'appropriation des roues conduit à une rigidité augmentée de l'ensemble ; on obtient ainsi un fonctionnement de l'engrenage à vibrations réduites et, respectivement, une portance et fiabilité augmentés des causes dynamiques. On connaît l'utilisation de cet engrenage dans les transmissions des ponts arrière des automobiles, de telle sorte que dans certaines machines textiles (pour transmettre la rotation d'un arbre à plusieurs fuseaux). Lorsque le rapport de transmission est important et le chargement est considérable (de l'ordre des plusieurs dizaines et centaines de kilowatts) on recourt aux **engrenages à vis** (se voir aussi les **fig. IV.5, c, d**). Parmi les avantages que les engrenages à vis présentent il y a:

1. un rapport de transmission important pour un encombrement relativement réduit de l'engrenage. Des rapports de transmission de 1 à 200 sont considérés comme normaux. Il existe également des rapports de transmissions très élevés, de l'ordre de 500 à 1000, qui s'emploient pour les transmissions de faible puissance; la raison est le décroissement du rendement avec l'augmentation du rapport de transmission (le rendement est d'environ 0,75 à un rapport de transmission de 100) ;
2. comme un engrenage à filet, il peut assurer l'autofreinage. Par conséquent il peut être utilisé comme frein aux systèmes de levage des charges, dans l'absence d'un frein comme system distinct. Parmi les désavantages de ce type d'engrenage on compte:
  - les rendements faibles (et par conséquent les pertes de puissances importantes) déterminés par la glissement des dents d.après les tangents du filet à la vis;
  - 2. la nécessité d'employer des bronzes de haute qualité (très chers) pour la fabrication de la roue à vis, pour réaliser une combinaison avec l'acier trompé de la vis d'un couple de matériaux d'antifriction.

On mentionne que l'engrenage à vis globique (**fig. IV.5, d**) est plus portante que l'engrenage à vis cylindrique, puisque on produit un embrassement réciproque des dentures conjuguées. Mais la technologie d'exécution de la vis globique est plus difficile et chère ; c'est pourquoi ces engrenages s'utilisent économiquement aux séries grandes de fabrication, pour réduire le prix de coût/l'unité de transmission.

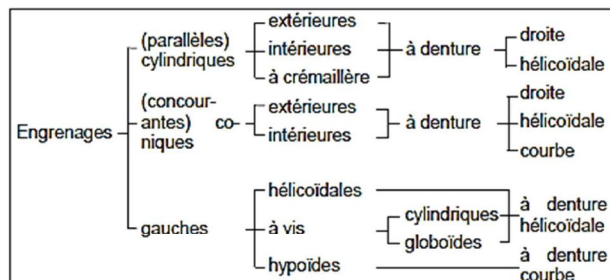


Fig. 2.9. Dénominations des principaux types des engrenages utilisés en pratique, d'après la classification de la fig. 2.1

## Chapitre V : Arbres Et Axes

### V.1. Définitions:

#### Axes et arbres de transmission

Un axe est une pièce révolutionnaire rectiligne de section circulaire sur laquelle tourne ou oscille une pièce mobile, comme par exemple une roue, un coussinet de palier, un levier, etc.

Un arbre est une barre révolutionnaire rectiligne et mobile, généralement cylindrique, transmettant un couple de torsion  $M_t$  à la vitesse angulaire  $w$ .

### V.2. Calcule sur les arbres et les bouts d'arbres

#### V.2.1. Les arbres:

Un arbre de transmission se calcule ou se vérifie à la torsion, et éventuellement à la flexion ou à la flexion-torsion

- ❖ **Torsion:** Condition de résistance:  $\tau = (M_t / (I_0/v)) \leq R_{pg}$   
Concentration de contrainte au droit des accidents de formes:  $\tau_{max} = \tau_{calculé} \times k \leq R_g$   
Condition de déformation:  $M_t = G \theta I_0$   
 $\tau$ : Contrainte de glissement (N/mm<sup>2</sup>)  
 $\theta$ : Angle unitaire de torsion (rad / m)  
 $M_t$ : moment de torsion maxi ou moment idéal max (N . m)

$M_t = F$  tangentiel x rayon (statique) =  $P / \omega$

$M_t = M_{mot} - M_{res} = J . \omega' = P / \omega$

P : puissance transmise (W)

$\omega$  : vitesse angulaire (rad / s)

J : moment d'inertie ( kg . m<sup>2</sup>)

$\omega'$  : Accélération angulaire (rad / s<sup>2</sup>)

$I_0$  : moment quadratique de la section considérée / au centre O:

Pour un arbre cylindrique:  $I_0 = (11 d^4) / 32 \text{ m}^4$

$I_0 / v$  : module de flexion, ( $v = d / 2$ ) ;  $(I_0/v) = ((11 d^3) / 16) \text{ m}^3$

$R_{pg}$ : résistance pratique au cisaillement ( N / m<sup>2</sup>)

G : coefficient d'élasticité transversale pour arbre courant 8 à 8,8 . 10<sup>10</sup> N / m<sup>2</sup> OU Pa

#### ❖ Flexion

Condition de résistance  $\sigma = ( M_f / (I_{xx'} / v)) \leq R_p$

$\sigma$ : contrainte de flexion

$M_f$ : moment de flexion maximum N.m

$I_{xx'}$ : moment quadratique de la section considérée par rapport à l'axe diamétral  $xx'$

Pour un arbre cylindrique:  $I_{xx'} = (11 d^4 / 64) \text{ m}^4$

$I / v$  : module de flexion,  $(I/v) = ((11 d^3) / 32) \text{ m}^3$

$R_p$ : résistance pratique à l'extension (N . m<sup>2</sup>)

#### ❖ Flexion- torsion

##### Utiliser le calcul à la flexion avec:

Pour les aciers:  $M_{fi} = (( M_f)^2 + ( M_t)^2)^{1/2}$

Pour les fonte:  $M_{fi} = 1/2 M_t + 1/2(( M_f)^2 + ( M_t)^2)^{1/2}$

#### V.2.1. Les bouts d'arbres: Figure 3.1

- Cylindriques lisse
- Coniques avec extrémité fileté ou taraudée avec ou sans clavetage (clavettes parallèles)
- Existent en deux séries:
  - \* Longues (usuelles)
  - \* Courtes;
- Vérification ou calcul à la torsion:  $d \geq (( 16 M_f) / ( 11 R_{pg}))^{1/3}$

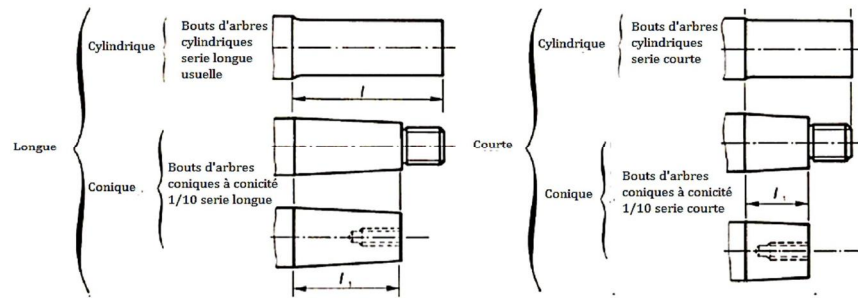
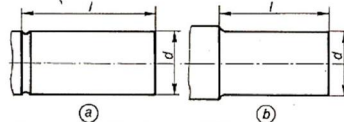


Figure V.1 Types des bouts d'arbres. [6]

❖ Bouts d'arbres cylindriques

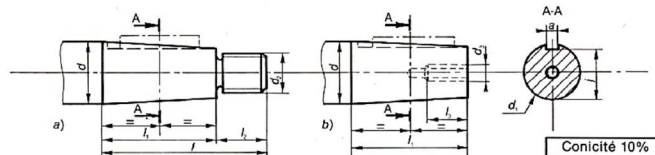


Diamètre $d$	$l$ type		Diamètre $d$	$l$ type		Diamètre $d$	$l$ type	
	nom	tol		nom	tol		nom	tol
6	16	—	28	j 6	60	42	70	140
7	—	—	30	k 6	80	58	71	
8	20	—	32				75	
9		—	35				80	
10	23	20	38				85	170
11		—	40	90				
12	30	25	42	110	82	110	95	210
14		—	45				100	
16		—	48				120	
18		40	28				50	
19	50	—	55	140	105	140	130	250
20		—	56				140	
22	50	36	60	140	105	150	140	200
24		—	63				150	
25	60	42	65	—	—	—	160	300

❖ Bouts d'arbres coniques

Peuvent être utilisées:

- \* Avec extrémité fileté
- \* Avec extrémité taraudée



$d$	Filetage		Taraudage		Secteur clavette $a \times b$	$a_1$	Série longue				Série courte			
	$d_2$	$l_2$	$d_3$	$l_3$			$l$	$l_1$	$d_1$	$l$	$l_1$	$d_1$	$l$	
6	M 4	6					16	10						
8	M 6	8					20	12						
10	M 6	8					23	15						
12	M 8 x 1	12	M 4	10	2 x 2	2	30	18	11,1	9,9				
14	M 8 x 1	12	M 4	10	3 x 3	3	30	18	13,1	11,3				
16	M 10 x 1,25	12	M 4	10	3 x 3	3	40	28	14,6	12,8	28	16	15,2	13,4
18	M 12 x 1,25	12	M 5	13	4 x 4	4	40	28	16,6	14,1	28	16	17,2	14,7
20	M 12 x 1,25	14	M 6	16	4 x 4	4	50	36	18,2	15,7	36	22	18,2	16,4
22	M 12 x 1,25	14	M 6	16	4 x 4	4	50	36	20,2	17,7	36	22	18,9	18,4
24	M 12 x 1,25	14	M 6	16	5 x 5	5	50	36	22,2	19,2	36	22	22,9	19,9
25	M 16 x 1,25	18	M 8	19	5 x 5	5	60	42	22,9	19,9	42	24	23,8	20,8
28	M 16 x 1,25	18	M 8	19	5 x 5	5	60	42	25,9	22,9	42	24	26,8	23,8
30	M 20 x 1,5	22	M 10	22	5 x 5	5	80	58	27,1	24,1	58	36	28,2	25,2
32	M 20 x 1,5	22	M 10	22	6 x 6	6	80	58	29,1	25,6	58	36	30,2	26,7
35	M 20 x 1,25	22	M 10	22	6 x 6	6	80	58	32,1	28,6	58	36	33,2	29,7
38	M 24 x 2	22	M 12	28	6 x 6	6	80	58	35,1	31,6	58	36	36,2	32,7
40	M 24 x 2	28	M 12	28	10 x 8	10	110	82	35,9	30,9	82	54	37,3	32,3
42	M 24 x 2	28	M 12	28	10 x 8	10	110	82	37,9	32,9	82	54	39,3	34,3
45	M 30 x 2	28	M 16	36	12 x 8	12	110	82	40,9	35,9	82	54	42,3	37,3
48	M 30 x 2	28	M 16	36	12 x 8	12	110	82	43,9	38,9	82	54	45,3	40,3
50	M 35 x 3	28	M 16	36	12 x 8	12	110	82	45,9	40,9	82	54	47,3	42,3
55	M 36 x 3	28	M 20	42	14 x 9	14	110	82	50,9	45,4	82	54	52,3	46,8
56	M 36 x 3	28	M 20	42	14 x 9	14	110	82	51,9	46,4	82	54	53,3	47,8
60	M 42 x 3	35	M 20	42	16 x 10	16	140	105	54,75	48,75	105	70	56,5	50,5
63	M 42 x 3	35	M 20	42	16 x 10	16	140	105	57,75	51,75	105	70	59,5	53,5

### V.3. Notion de moment idéal

La plupart des arbres sont soumis à la fois à de la flexion et de la torsion. Dans la majorité des cas, l'arbre tourne par rapport à la direction du moment de flexion. Comme l'illustre la figure 3.2, il en résulte que la contrainte de flexion  $\sigma_f$  en un point A varie constamment entre un maximum positif et un minimum négatif de même grandeur. On dit que l'arbre est soumis à la fatigue. La résistance à la fatigue, mesurée par la contrainte maximale  $\sigma_f$  au cours du cycle menant à la rupture, est plus faible que la résistance statique et même que la limite élastique. À cela s'ajoutent les concentrations de contrainte, si bien qu'il faut se limiter, au niveau de l'avant-projet, à des contraintes admissibles assez basses.

La combinaison du moment de flexion et du moment de torsion se traite souvent à l'aide de la notion de moment idéal. L'idée est la suivante. À un moment de flexion  $M_f$  est associée une contrainte de flexion.

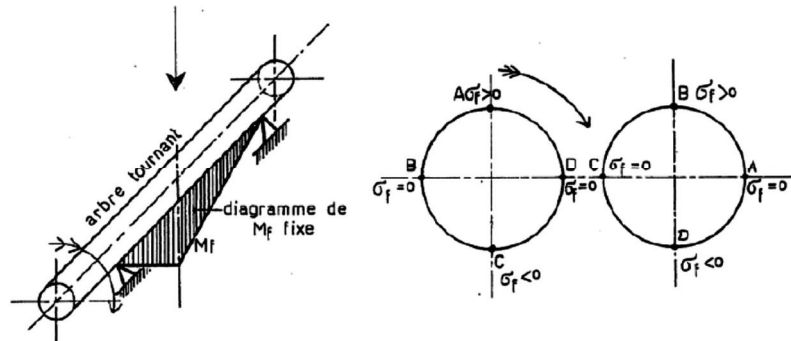


Figure V.2. Fatigue d'un arbre tournant soumis à un moment de flexion de direction constante. [7]

$$\sigma_f = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

La contrainte de torsion est quant à elle égale à

$$\tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

Pour l'étude de leur action combinée, on a besoin d'un critère de mise hors service. Il est généralement admis qu'il a la forme

$$\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f,lim}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{t,lim}}\right)^2 = 1 \quad \text{Equation 1}$$

Ce qui généralise le critère de von Mises. Ici,  $\sigma_{f,lim}$  et  $\tau_{t,lim}$  sont les contraintes qui mèneraient à la mise hors service pour la flexion seule ou la torsion seule, respectivement. En définissant le facteur

$$\alpha = \frac{\sigma_{f,lim}}{\tau_{t,lim}\sqrt{3}}$$

on peut transformer le critère (Equation 1) en

$$\sigma_f^2 + 3\alpha^2\tau_t^2 = \sigma_{f,lim}^2$$

Ce qui, si l'on introduit la notion de contrainte idéale

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_f^2 + 3\alpha^2\tau_t^2} \quad \text{Equation 2}$$

S'écrit simplement

$$\sigma_i = \sigma_{f,lim}$$

En service, on se limitera à une contrainte plus faible, c'est-à-dire que l'on adoptera une *pseudo-sécurité*  $s^*$  et que l'on travaillera avec une contrainte admissible.

$$\sigma_{f,adm} = \frac{\sigma_{f,lim}}{s^*}$$

Si nous parlons de pseudo-sécurité, c'est parce que ce premier calcul ne tient pas compte des concentrations de contrainte. Mais ces dernières ne pourront être déterminées que lorsqu'on aura entièrement dessiné l'arbre, ce qui est précisément ce que nous nous attachons à faire. Il est clair qu'il faudra *in fine* vérifier la résistance de façon plus précise. Le critère provisoire est donc

$$\sigma_i = \sigma_{f,adm}$$

Multiplions les deux membres de la définition (équation 2) de la contrainte idéale par  $(\pi d^3 / 32)$  On a

$$\frac{\pi d^3}{32}\sigma_f = M_f \quad \text{et} \quad \frac{\pi d^3}{32}\tau_t = \frac{1}{2}M_t$$

Si l'on appelle encore moment idéal le moment défini par

$$M_i = \frac{\pi d^3}{32}\sigma_i$$

on a donc

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75\alpha^2 M_t^2}$$

et le critère provisoire de résistance s'écrit

$$M_i = M_{f,adm} \quad \text{avec} \quad M_{f,adm} = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_{f,adm}$$

Pour une sollicitation statique, à vérifier par exemple quant au risque de plastification, le critère de von Mises s'applique, ce qui correspond à  $\alpha = 1$ . En fatigue, il faut se référer à la limite d'endurance qui, pour les aciers, peut être évaluée comme suit, en fonction de la limite de rupture  $R_m$ : si  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_M$  sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de la contrainte lors d'un cycle, notons

$$\mathcal{R}_f = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_M}$$

On peut admettre

$$\sigma_{f,lim} \approx R_m \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \mathcal{R}_f \right)$$

On admet de même la relation

$$\tau_{t,lim} \sqrt{3} \approx R_m \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \mathcal{R}_t \right)$$

avec  $\mathcal{R}_t = \tau_{min} / \tau_M$ .

Dans bon nombre de cas, la contrainte de flexion est alternée et le moment de torsion constant en valeur nominale. Cependant, comme il faut tenir compte des démarrages, des freinages et des à-coups inévitables provenant du moteur et du récepteur, on juge généralement qu'il est plus prudent de faire le calcul avec un moment de torsion pulsé ( $R_t = 0$ ). Dans ce cadre, on a

$$\sigma_{f,lim} = 0,5R_m, \quad \tau_{t,lim} \sqrt{3} = 0,75R_m, \quad \alpha = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3}$$

Ce qui donne

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} M_t^2} = \sqrt{M_f^2 + \frac{1}{3} M_t^2}$$

C'est cette expression du moment idéal que nous adopterons dans tous les cas courants. Il convient de noter que la valeur

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75M_t^2}$$

que l'on trouve si souvent dans les cours de résistance des matériaux est obtenue dans le cadre d'un calcul à la déformation plastique. En fatigue, elle ne vaut que si  $(\tau_m / \tau_M) = (\sigma_m / \sigma_M)$  soit, pour un arbre tournant par rapport aux charges, si le moment de torsion est également alterné, ce qui est exceptionnel.

#### V.4 Une première formule de dimensionnement en fatigue

Pour un arbre tournant par rapport à la charge, on peut dans un premier temps choisir le diamètre par la formule

$$\frac{d}{mm} = 42,8 \frac{\left( \frac{M_i}{Nm} \right)^{0,352}}{\left( \frac{R_m}{MPa} \right)^{1/3}}$$

La valeur un peu inattendue de l'exposant du numérateur, 0,352, s'explique par le fait que pour établir cette formule, il a été tenu compte d'un certain facteur d'échelle. Le calcul peut se faire graphiquement grâce au diagramme que l'on trouvera dans les Mémentos.



## VI. Accouplements, embrayages et freins.

### VI.1. Les embrayages

Organes permettant à volonté d'établir progressivement ou de rompre la liaison entre deux parties successives d'une transmission. Fig. VI.1.

#### VI.1.1. Classification des embrayages:

- Cylindriques
  - \* A bande extérieure ou à bande intérieure;
  - \* A mâchoires intérieures
- Coniques: simples ou doubles (fig. VI.2)
- Plans: mono ou multidisques

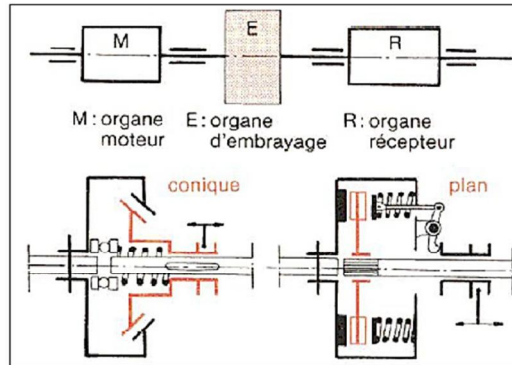


Figure IV.1 et 2 Schémas d'embrayages

#### VI.1.2. Systèmes de commande:

- 100% mécanique
- Assistée
- Hydraulique
- Pneumatique
- Electromagnétique
- Automatique
- centrifuge

#### VI.1.3. Qualités recherchées:

- transmission du couple sans glissement,
- Capacité calorifique et ventilation interne,
- Bonne progressivité,
- Amortissement des vibrations,
- Faible inertie de friction.

#### VI.1.4. Garniture: Critère de choix:

- Vitesse de glissement,
- Vitesse de rotation,
- Durée de l'opération  $1h \text{ bar} = 1daN/mm^2$ ,
- Pression de garniture,
- Couple, température, nature (Matériaux: amiantée, frittée, céramétique. A base de papier ou de liège pour fonctionnement dans l'huile)

Type de garnitures		Coefficient d'adhérence (base de calculs)
amantées	Ferodo A35 : matière moulées contenant des	à froid : 0,23 à chaud : 0,30
	Ferodo M8 moulée type carton imprégné	environ 0,37
frittées	Ferodo 834	à froid : 0,20 à chaud : 0,15
Céramétiques	Ferodo 854	environ 0,40

**VI.1.5. Contre matériaux:**

**Caractéristiques: Résistance à l'éclatement, Coefficient d'adhérence élevée. Usure faible de la garniture, Résistance à l'érosion, Résistance à la déformation permanente et à la formation de points chauds.**

Contre matériau	Fonte F	Fontes spéciales
Dureté HB	225 ± 25	200 - 240
R traction	20 à 25 h bar	50 à 65 h bar
Σ %	α 1%	5 à 10%
R compression	≈ 85 h bar	R <sub>e</sub> 0,2% 38 à 52
R cisaillement	20 à 26 h bar	35 à 40 h bar
E	11 à 12 10 <sup>3</sup> h bar	17,5 à 18 10 <sup>3</sup> h bar

**VI.1.6. Embrayage à cône Figure : (fig. VI.3).**

**VI. 1.6.1. Simple Cône: Faibles puissances, grandes Vitesses**

$$F_t = (C/R) = (P/\omega R) = 30 P / \Pi NR \quad \text{Avec } F \text{ sur garniture: } F = F_t/f$$

$$p = \frac{F 10^{-5}}{2\pi l R} \quad \text{et} \quad F_p = F \sin \alpha = \frac{30P}{\pi NR f} \sin \alpha$$

Pression p: de 0.7 bars (Embrayages très doux et très progressifs)

4 à 6 bars ( pour grandes puissances et petits embrayages). 1bar = 1 N/cm<sup>2</sup> = 0.1 Mpa

Base de calcul:

f = 0.3 pour frottement sec et α = 14° 30'.

f = 0.1 pour frottement en bain d'huile, α = 11° 30'.

Augmenter la valeur calculée de N de 30 à 40 % pour tenir compte du rendement, du patinage prolongé, projection d'huile, avachissement des ressorts.

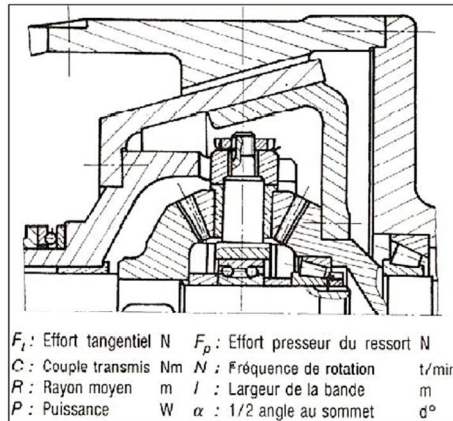


Figure VI. 3. Embrayage à Cône

**VI.1.6. 2. Double Cône:**

$$F'_t = (C/2R) \quad \text{et} \quad F'_p = 30 P \sin \alpha / (211 NRf)$$

**VI.1.6.3. Embrayage plans, Figure : (fig. VI.4).**

Pour des vitesses supérieures à 1000 tr/min

**1. Embrayage monodisque: Figure VI.4**

- Effort presseur  $F_p$ :

Pression

$$p = F_p / \Pi (R^2 - r^2) \quad \text{Avec } F_p = F_t / f$$

Dans le cas d'une couronne, le couple d'embrayage maximum transmissible est:

$$C = \frac{2}{3} F_p f \frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)} n \quad n: \text{nombre de surfaces de contacts}$$

Remarque: Si 1/4 < r/R < 1/3 on adopte

$$C = F_p f R_m n \quad \text{avec } R_m = \frac{R+r}{2}$$

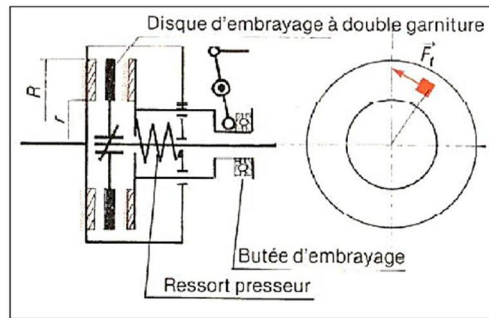


Figure IV. 4. Embrayage plan

## 2. Embrayage multidisque: Figure VI.5

Utilisés sur machines-outils: encombrement réduite, facilitent la commande électrique ou hydraulique, fonctionnent dans l'huile

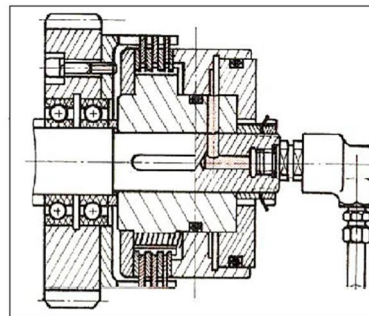


Figure IV. 5. Embrayage plan

## VI.2. Coupleurs

### VI.2.1. Coupleur hydraulique Figure IV. 6

- Sécurité robuste, automatique, réversible, souplesse de marche, absorbant les les à-coups , faible poids par Kw à égalité de vitesse.
- Rendement élevé à la vitesse de régime ou à charge variable. Progressivité de démarrage réglable par modification de remplissage; réduction des risques de patinage des véhicules, permet aux moteurs de démarrer à vide sous valeur de couple presque maximale.
- Entretien et usure pratiquement nuls, période d'oscillation propre inexistante.
- Glissement on pleine charge de l'ordre de 2 à 4 %

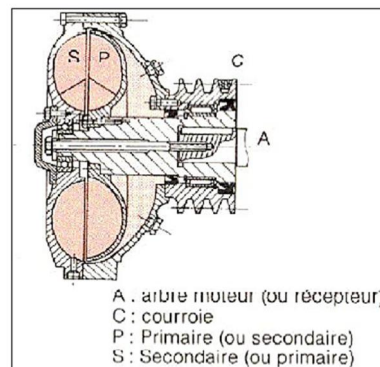


Figure IV.6. Coupleur hydraulique.

### VI.2.2. Coupleur Centrifuge à poudre: Figure IV. 7.

- Embrayage automatique,
- Limiteur de couple (lorsque le couple résistant atteint 20 % environ du couple transmis au démarrage).
- Filtre de vibration de torsion (moteur à combustion interne)
- Avantages: démarrage automatique, diminution de la durée de pointe d'intensité au démarrage pour moteurs électriques, démarrage et ralenti sans désaccoupler pour moteurs thermiques, rendement pratiquement égale à 1 en marche normale, possibilité de mise en parallèle de plusieurs moteurs

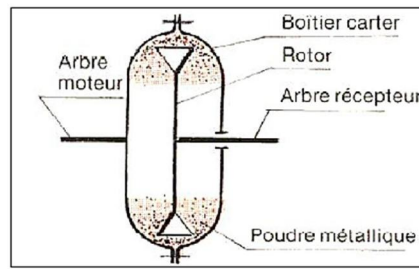


Figure IV.7. Coupleur à poudre.

**IV.2.3. Coupleur électromagnétique à poudre:** Figure IV.8.

Caractérisé par:

- La proportionnalité du couple transmis et du courant inducteur.
- La stabilité du couple transmis quelle que soit la vitesse de fonctionnement ou de glissement (maximum 5%)
- Valeur du couple transmis

$$C = K \frac{30P}{\pi N}$$

$C$  en mN       $P$  en watt  
 $N$  en tr/min       $K = 2,5$  à  $3$

Pour tenir compte du rapport entre couple de démarrage du moteur et son couple nominale

- Démarrages et freinages progressifs de mécanismes fragiles
- Grandes vitesses de rotation;
- Commande de mouvement de rotation alterné

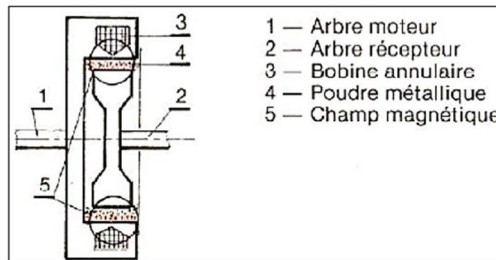


Figure IV.8. Coupleur électromagnétique

**IV.2.4. Coupleur électrique à courants de Foucault:**

**IV.2.4.1. Coupleur asynchrone:**

Utilisé comme variateur ou régulateur de vitesse. Perte (énergétique pour couple variable) max 15%. Perte (par glissement pour couple courant) 1 à 3%.

**IV.2.4.2. Coupleur synchrone:**

Fonctionne sans glissement, utilisé pour le démarrage progressif de machine à forte inertie. Après la période de démarrage, il sert de limiteur de couple

Tout coupleur asynchrone peut fonctionner en frein

**IV.3. Les freins**

Transformateurs d'énergie mécanique en chaleur, destinés à ralentir ou à arrêter complètement le mouvement d'un mécanisme.

**VI.3.1. Classification des freins: d'après l'organe de friction:**

- A sabots
- A bandes
- A mâchoires
- A disques (de plus en plus utilisés)

L'énergie absorbée est proportionnelle a la masse en mouvement et au carré de la vitesse. L'inertie du système à freiner est le plus gros inconvénient.

**VI.3.2. Qualités recherchées:**

- Efficacité;
- Régularité de l'effort de freinage;
- Faible effort de commande;
- Réglage aussi espacés que possible;
- Construction et entretien faciles

- ❖ **Garnitures de freins:** les calculs des garnitures sont basés sur la puissance spécifique: rapport de la puissance de freinage  $P_f$  (W) à l'aire totale de la surface frottante  $S$  (m<sup>2</sup>).

$$P_f = C_f \omega \quad P_s = \frac{P_f}{S}$$

**VI.3.3. Freins à mâchoires:**

- ❖ Meilleure vitesse de friction entre 15 et 20 m/s avec un contact de 110°.
- ❖ Phénomène d'auto-serrage.
- ❖ Inconvénient: absence de stabilité thermique.

**VI.3.4. Freins à disques: Figure. VI.9.**

Surfaces de frottement planes et perpendiculaires à l'axe. le disque est un cylindre de faible épaisseur et de grand diamètre. Le rapport entre D et d est au maximum de 0.7. Il est admis, pour le calcul des garnitures, dans des conditions normales d'utilisation, une usure de 1 mm pour un couple de 15. 10<sup>6</sup> daN. m/cm2 de garniture.

**Les garnitures se présentent sous forme:**

- ❖ Patins complets ou partiels
  - Monodiques
    - \* Etrier fixe: plus robuste, moins déformable, forts moments de freinage;
    - \* Etrier mobile: possibilité de double commande mécanique et hydraulique, peu sensible au voilage du disque.  
Disque mobile: moins utilisé.
  - Multidisques: les disques couissent sur des cannelures. Fonction inverse aux embrayages, mais technologie semblable.

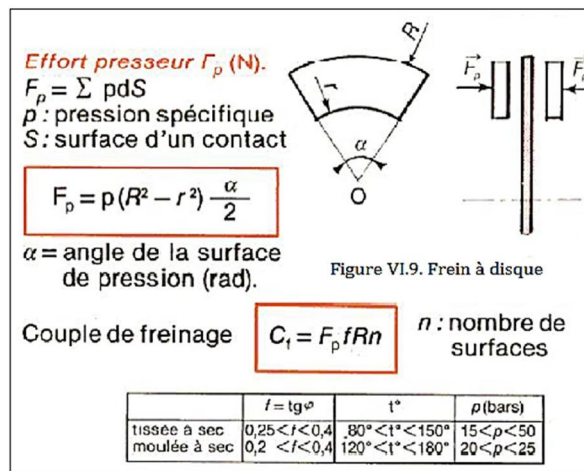


Figure VI.9. Frein à disque

