

M1 Techniques de Production Industrielle, S1
Transport de matière et de chaleur
Chap IV

La Conduction thermique Unidimensionnelle
en régime permanent

Chap IV

Conduction Unidimensionnelle en régime permanent

I) Equation generale (sans sources)

Reprenons l'équation générale de la conduction

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (k \overline{\text{grad}} T) + \dot{q}_s$$

Le problème est permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

L'équation générale sans source s'écrit

$$\boxed{\Delta T = 0}$$
 qui s'écrit

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left(r^n \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$n=0$ ($r \rightarrow x$) paroi plane

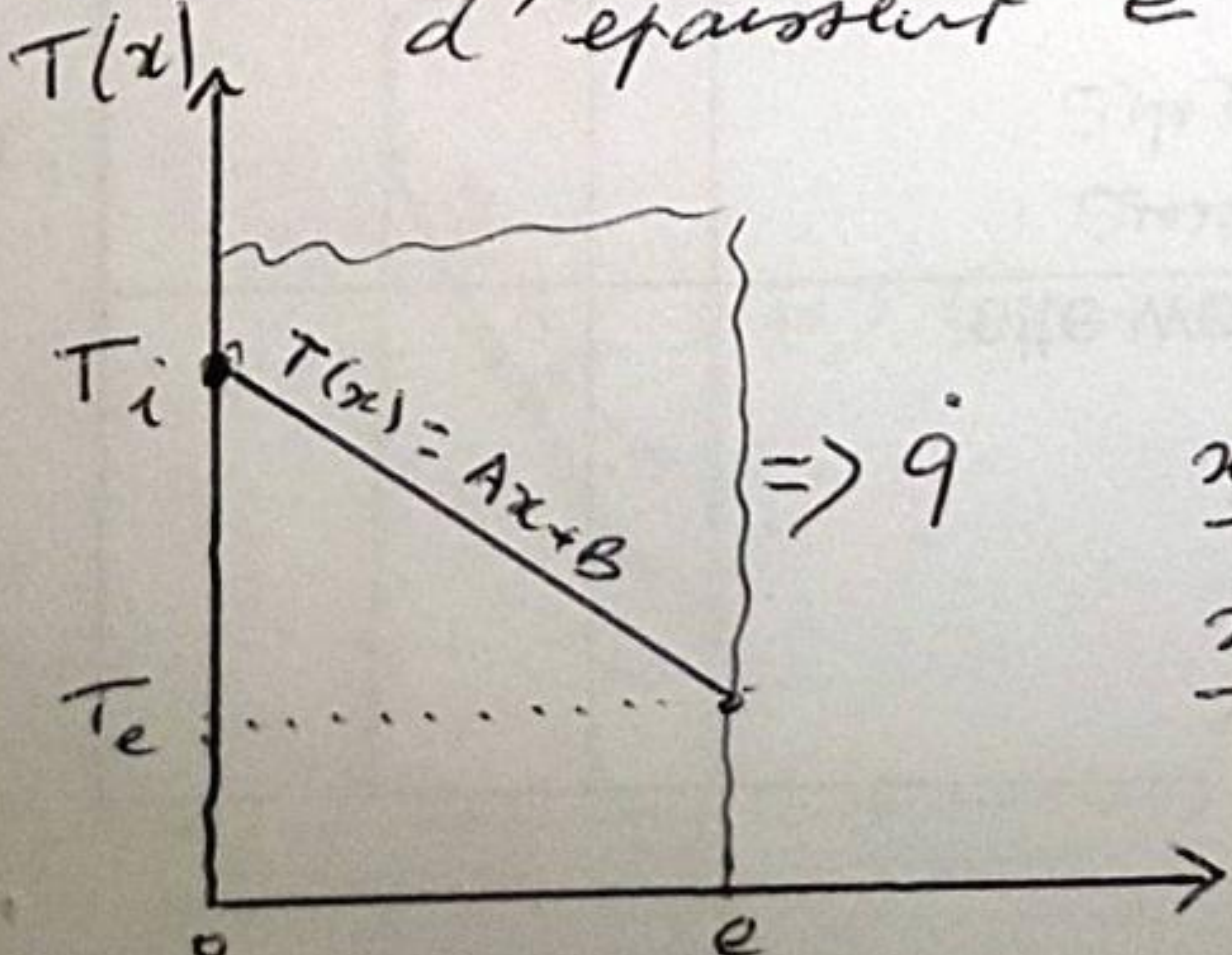
$n=1$ paroi cylindrique

$n=2$ paroi sphérique

1/ paroi plane à faces isothermes.

On se place toujours dans le cas d'une

conductivité thermique unijame. Une plaque plane d'épaisseur e ; les températures des faces T_i et T_e



$$\Delta T = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

$$\underline{x=0} \quad T(0) = B = T_i$$

$$\underline{x=e} \quad T_e = T(e) = Ae + T_i \Rightarrow A = \frac{T_e - T_i}{e}$$

$$T(x) = \frac{T_e - T_i}{e} x + T_i$$

Sous forme adimensionnelle

$$\text{On a } T(x) = (T_e - T_i) \frac{x}{e} + T_i$$

$$\theta = \frac{T(x) - T_i}{T_e - T_i} = \frac{x}{e} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{e} \Rightarrow \begin{matrix} \theta = 0 & \xi = 0 \\ \theta = 1 & \xi = 1 \end{matrix}$$

a) L'expression du flux de chaleur

$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=e} \Rightarrow \dot{q} = -k \cdot \frac{T_e - T_i}{e} = \frac{k}{e} (T_i - T_e)$$

Le flux global $\dot{\Phi} = \dot{q} S$ S : surface de la plaque

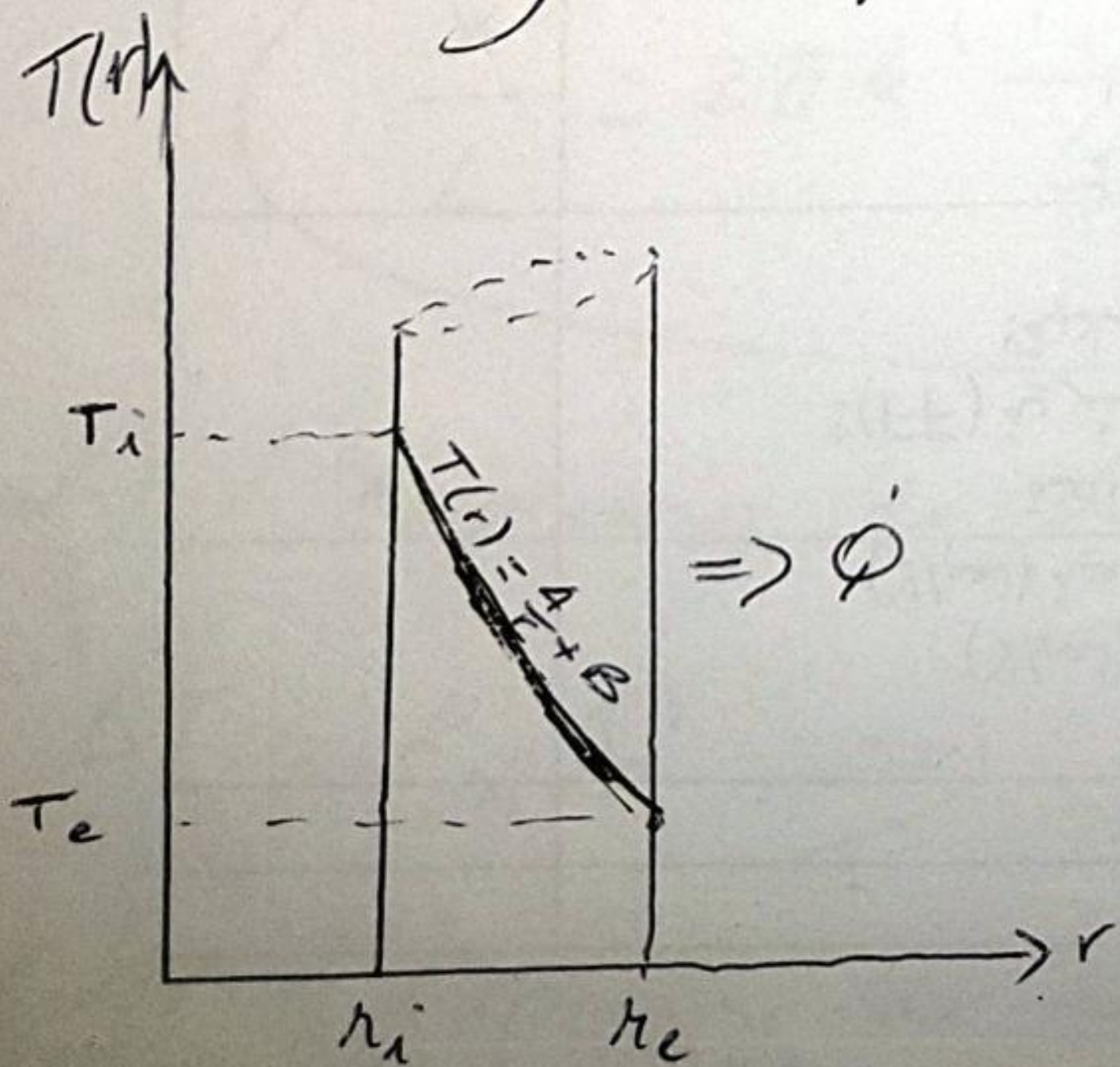
$$\dot{\Phi} = \frac{kS}{e} (T_i - T_e)$$

b) L'expression de la résistance thermique

$$\Delta T = \frac{e}{kS} \Rightarrow R_{th} = \frac{e}{kS}$$

Expression de la résistance thermique dans le cas d'une géométrie plane

2) Paroi cylindrique à fais isothermes ($k = \text{cte}$)



L'équation générale s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = A$$

$$T(r) = A \ln r + B$$

$$\begin{matrix} r = r_i & T = T_i \\ r = r_e & T = T_e \end{matrix} \quad A = \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

$$A = \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

$$B = T_i - \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \ln r_i$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i} + T_i$$

Sous forme adimensionnelle

$$\theta = \frac{T(r) - T_i}{T_e - T_i} = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

a) L'expression du flux de chaleur

$$\dot{q} = (\dot{q}(r)) \quad S = 2\pi r L$$

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = -k \frac{dT}{dr} \cdot S$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = -2\pi r k \frac{dT}{dr} \quad \left| \begin{array}{l} T = A \ln r + B \\ \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \end{array} \right.$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = -2\pi k r \frac{A}{r} = -2\pi k \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = 2\pi k \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = 2\pi k \frac{(T_i - T_e)}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

b) L'expression de la résistance thermique

$$\Delta T = R_{th} \dot{Q} \Rightarrow R_{th} = \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi k L}$$

C'est l'expression de la résistance thermique dans le cas d'une géométrie cylindrique -