Université de M'sila

Faculté de : Technologie **Socle commun**

Série de TD N° 04

Exercice 01 :

Le mouvement d'un point $\boldsymbol{M}$ *est donné par les équations paramétriques*

Dns le référentiel $\mathcal{R}(\boldsymbol{o},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ *par :* $\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \\ z = 3t^2 \end{cases}$

Dans le référentiel $\mathcal{R}_1\ (\boldsymbol{o}_1,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$ *en mouvement de translation par rapport à* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\begin{cases} x_1 = t^2 + t + 2 \\ y_1 = -2t^4 + 5 \\ z_1 = 3t^2 - 7 \end{cases} \qquad \left(\vec{\imath} \parallel \vec{\imath}_1, \overrightarrow{\jmath \parallel \vec{\jmath}_1}, \vec{k} \parallel \vec{k}_1\right)$$

1°/ *Calculer les vitesses de* $\boldsymbol{M}$ *dans* $\mathcal{R}\left(\vec{v}_{M/_{\mathcal{R}}}\right)$ *et dans* $\mathcal{R}_1\left(\vec{v}_{M/_{\mathcal{R}_1}}\right)$.

2°/ *Exprimer la vitesse* $\vec{v}_{M/_{\mathcal{R}}}$ *en fonction de* $\vec{v}_{M/_{\mathcal{R}_1}}$ *.Que vaut la vitesse d'entrainement ?*

3°/ *Exprimer l'accélération* $\vec{a}_{M/_{\mathcal{R}}}$ *en fonction de* $\vec{a}_{M/_{\mathcal{R}_1}}$. *Que vaut l'accélération d'entrainement ?*

4°/ *Quelle est la nature du mouvement de* $\mathcal{R}_1$ *par rapport à* $\mathcal{R}$.

5°/ *Si le référentiel* $\mathcal{R}$ *est Galiléen, est-ce-que* $\mathcal{R}_1$ *est Galiléen ? Justifier.*

Exercice 02 : (*Supplémentaire*)

Une voiture se déplace sur une route droite à vitesse constante $\vec{v} = v_0\vec{\imath}$, *passant à côté d'une station de bus prise comme origine fixe. A ce moment un motocycliste, situé à une distance* $'\boldsymbol{l}'$ *de cette station, part avec une accélération* $'\boldsymbol{a_0}'$ *dans la direction perpendiculaire* $\vec{a} = a_0\vec{\jmath}$. *Etudier le mouvement du motocycliste en donnant :*

1°/ *Le référentiel fixe et le référentiel mobil.*

2°/ *L'équation de la trajectoire du motocycliste par rapport à la voiture.*

3°/ *La distance parcourue par le motocycliste lorsque la voiture arrive au point de départ de ce dernier*

Exercice 03 : (Fig.01)

Une bille de masse $''\boldsymbol{m}''$ *glisse sans frottements à l'intérieur d'une cycloïde située dans le plan vertical* $''\boldsymbol{xoy}''$. *La cycloïde s'exprime par les équations paramétriques suivantes :*

$$\begin{cases} x = R(\theta + \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

1°/ *Calculer la variation de l'abscisse curviligne* $''\boldsymbol{ds}''$ *en fonction de* $''\boldsymbol{R},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{d\theta}''$.

L. Laïssaoui

Déduire $s = f(R, \theta)$.

2°/ *Déterminer la relation entre ''*θ*''et l'angle ''*φ*''que fait la tangente à la courbe et ''*$\overrightarrow{ox}$*''.*

3°/ *En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que l'abscisse curviligne obéit à la loi :* $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4R}s = 0$

4°/ *Quelle est la nature du mouvement. Déduire sa période.*

5°/ *Retrouver son équation de mouvement* $s(t)$.

***Exercice 04* : (Fig.02)**

Deux masses $m_1 = 10kg$ *et* $m_2 = 20kg$ *reliées par une corde inextensible qui passe à travers les gorges de deux poulies, de masses et frottements négligeables, l'une* (P_2) *est mobile l'autre*(P_1) *est fixe.*

1°/*Déterminer l'accélération* a_1*et* a_2 *de chacune des masses.*

2°/ *Déterminer les tensions de la corde de chaque côté des poulies.*

Exercice 05 : ***(Fig.03)***

Une masse''m*'', supposée ponctuelle, est lancée suite à la compression d'un ressort de''*x*''. Acquiert une vitesse initiale ''*$v_0 = v_C = \sqrt{2Rg}$*'' (Le ressort est au repos lorsque sa longueur est''*$l_0 = CD$*''). Elle parcourt le tronçon '*$BC = R$*' rugueux de coefficient de frottement dynamique ''*$\mu = 0.5$*'', ensuite entame le tronçon lisse ''*BA*''qui est un quart de cercle de rayon '*R*'.En utilisant les coordonnées intrinsèques*

1°/ *Quelle est sa vitesse au point '*B*'* **?**

2°/ *Quelle est sa vitesse à un point quelconque du tronçon '*BA*' ('*θ*' est compté à partir de* OB*).*

3°/ *Est-ce qu'elle atteint le point '*A*' ? Justifier. A quelle position s'arrête-t-elle ?*

4°/ A quel point s'arrête-t-elle si elle reprend son mouvement ? (CD *est aussi lisse).*

Exercice 06 : (***DM- Fig.04-a-b***)

Trois blocs de masse ''m_1*'' , ''*m_2*'' et ''*m_3*'' reliés par un fil inextensible et glissent sur une table horizontale lisse. Si on applique une force horizontale ''*$\vec{F}$*'' sur ''*m_3*'',*

1°/ *Déterminer l'accélération du système et les tensions dans le fil.*

On prend maintenant deux blocs de masse ''m_1*'' et ''*m_2*'' ont les superposent (*m_2 *sur* m_1*) et on les relit par un fil inextensible passant à travers la gorge d'une poulie de masse ''*M*'', de rayon ''*r*''et de moment d'inertie ''*I*''. Si le coefficient de frottement entre les deux masses et le même* *que celui de* $''\boldsymbol{m_1}''$ *avec la table supposée rugueuse est* $''\boldsymbol{\mu}''$ *et la force appliquée* $''\vec{\boldsymbol{F}}''$ *à* $''\boldsymbol{m_1}''$ *est horizontale,*

2°/ Représenter *les forces sur les différents éléments.*

3°/ calculer *l'accélération du système.*

<u>Exercice 07</u> : (*Supplémentaire*)

Sur un plan lisse on met deux masses $''\boldsymbol{m_1}''$ *et* $''\boldsymbol{m_2}''$ *en contact. En appliquant une force* $\vec{\boldsymbol{F}}$ *horizontale sur* $''\boldsymbol{m_1}''$. *Quelle est la force de contact de* $''\boldsymbol{m_2}''$ *sur* $''\boldsymbol{m_1}''$ *?*

Si on inverse le sens de la force, mais on l'applique cette fois sur la masse $''\boldsymbol{m_2}''$. *Est-ce-que la force de contacte de* $''\boldsymbol{m_1}''$ *sur* $''\boldsymbol{m_2}''$ *est la même que précédemment ? Justifier.* **(Fig.05-a Fig.05-b)**

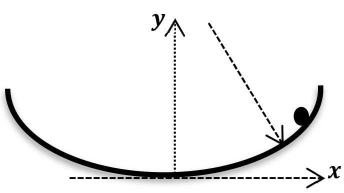


Fig. 01

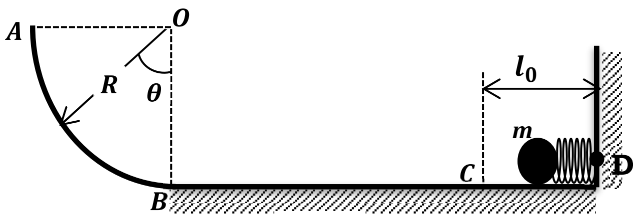


Fig. 03

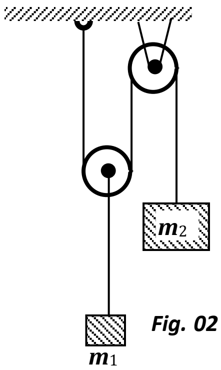


Fig. 02

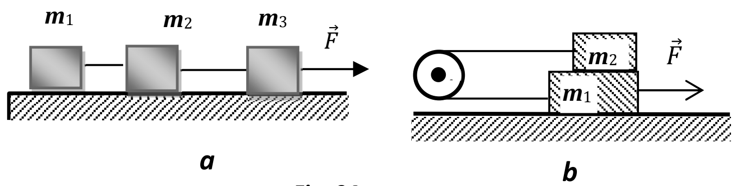


Fig. 04

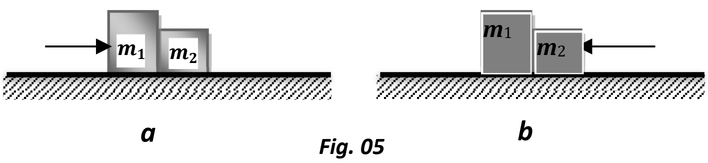


Fig. 05

L. Laïssaoui

Corrigé de la série 04 — 2020/2021

* **Exercice 01 :** les équations du mouvement de "M".

dans $\mathbb{R}$ $\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \\ z = 3t^2 \end{cases}$, dans $\mathbb{R}_1$: $\begin{cases} x_1 = t^2 + t + 2 \\ y_1 = -2t^4 + 5 \\ z_1 = 3t^2 - 7 \end{cases}$

$\vec{i} \parallel \vec{i}_1$, $\vec{j}_1 \parallel \vec{j}$, $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}$

1°/ _ la vitesse absolue, c'est la vitesse du point "M" par rapport au référentiel R

$$\Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_{M/R} = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_R = \begin{cases} \dot{x} = 2t - 4 \\ \dot{y} = -8t^2 \\ \dot{z} = 6t \end{cases}$$

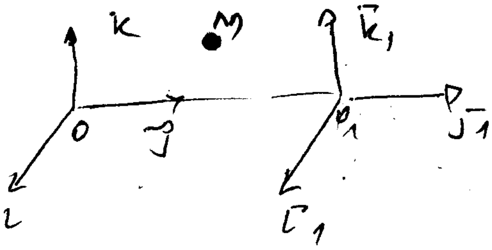
$\vec{OM} = (t^2 - 4t + 1)\vec{i} + (-2t^4)\vec{j} + (3t^2)\vec{k}$

- la vitesse relative : C'est la vitesse du point "M" par rapport au référentiel R_1 mobile par rapport à R

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/R_1} = \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big/_{R_1} = \begin{cases} \dot{x}_1 = 2t + 1 \\ \dot{y}_1 = -8t \\ \dot{z}_1 = 6t \end{cases}$$

$\vec{O_1M} = (t^2 + t + 2)\vec{i} + (5 - 2t^4)\vec{j} + (3t^2 - 7)\vec{k}$

2°/ $\vec{i}_1 \parallel \vec{i}$, $\vec{j}_1 \parallel \vec{j}$, $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}$ $\Rightarrow$



: mouvement de translation de R_1 / R.

la vitesse du point M et donnée par la relation (composition des vitesses), $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

$\vec{v}_a$: vitesse absolue , $\vec{v}_r$: vitesse relative

$\vec{v}_e$: vitesse d'entrainement .

②

selon la question 1°/

$$\vec{v}_a = (2t-4)\vec{i} + (-8t^3)\vec{j} + 6t\vec{k}$$
$$= (2t-4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$$

et $\vec{v}_r = (2t+1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$

on ~~peut~~ relier $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_r$:

$\cancel{\vec{v}_a = (2t+1)\vec{i}}$ $\vec{v}_a = (2t+1-5)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$

$$= (2t+1)\vec{i} - 5\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$$
$$= \underbrace{\left((2t+1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}\right)}_{\vec{v}_r} - 5\vec{i}$$

$\Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_r - 5\vec{i} = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = -5\vec{i}}$

Translation de R_1/R dans la direction $\vec{Ox}$

3°/ $\vec{a}_{M/R} = \dfrac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}_a}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} = 2t \\ \ddot{y} = -24t^2 \\ \ddot{z} = 6 \end{cases} = \vec{a}$

et $\vec{a}_{M/R_1} = \dfrac{d\vec{v}_{M/R_1}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r : \begin{cases} \ddot{x}_1 = 2t \\ \ddot{y}_1 = -24t \\ \ddot{z}_1 = 6 \end{cases}$

on voit que : $\vec{a} = \vec{a}_r$:

l'accélération absolue et l'accélération relative sont les même pour un repère R_1 qui se déplace par rapport à un repère R à vitesse constante $\cancel{\vec{v}_e = -5\vec{e}}$ $5\vec{i}$

$\vec{v}_e = -5\vec{i}$

on a : $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$

$\vec{a}$: accélération absolue.

$\vec{a}_r$: " " relative

$\vec{a}_e$: " " d'entrainement

$\vec{a}_c$: " " de Coriolis

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = 2t\,\vec{i} - 24\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{a}_r = 2t\,\vec{i} - 24\vec{j} + 6\vec{k}\end{array}\right\} \quad \vec{a} = \vec{a}_r \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}\,,\ \vec{a}_e = \vec{0}$$

L'accélération d'entrainement "$\vec{a}_e = 0$" et nulle c.a.d qu'il n'y a pas de rotation.

4°/ Puisque $\vec{a}_e = \vec{a}_c = \vec{0}$.

$\vec{\omega} = 0$ (vitesse angulaire)

$\vec{a} = \vec{a}_r$: le mouvement de R_1 par rapport R et un mouvement de translation et se fait à vitesse $\vec{v}_e$-Constante $\vec{v}_e = -5\vec{i}$

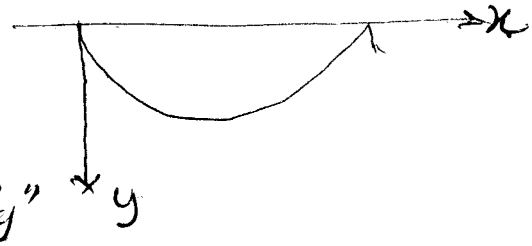
5°/ Si R est un référentiel Galiléen $\Rightarrow R_1$ et aussi Galiléen car le repère en translation (R_1) à vitesse constante ($\vec{v}_e = -5\vec{i}$) vérifie la loi d'inertie.

$\Rightarrow$ Il est inertiel (Galiléen)

* Exercice 03 :

les équations de mouvement de la masse "m" sont.

$$\begin{cases} x(t) = R(\theta + \sin\theta) \\ y(t) = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$ c'est une cycloïde.



1°/ l'abscice curviligne élementaire "ds" et reliée aux variations "dx" et "dy" infinitésimales par la relation.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = d\left[R(\theta + \sin\theta)\right] = R(1 + \cos\theta)\,d\theta \\ dy = d\left[R(1 - \cos\theta)\right] = R\sin\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{[R(1+\cos\theta)d\theta]^2 + [R\sin\theta d\theta]^2} = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}\;R\,d\theta$$

$$ds = \sqrt{1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}}\;R\,d\theta = \sqrt{2 + 2\cos\theta}\;R\,d\theta = \sqrt{2\underbrace{(1+\cos\theta)}_{2\cos^2\theta/2}}\;R\,d\theta$$

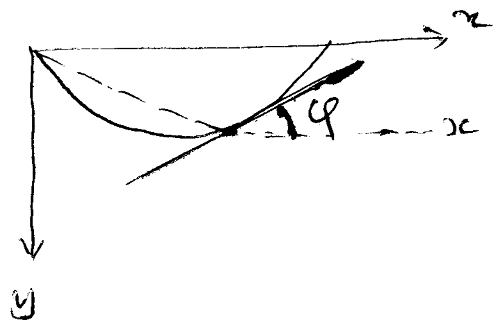
$$ds = \sqrt{2\,(2\cos^2\theta/2)}\;R\,d\theta \Rightarrow \boxed{ds = 2R\cos(\theta/2)\,d\theta}$$

$S = ?$ $\quad (\theta = 0 \quad x = 0,\ y = 0)$

$$\int_{S_0=0}^{S} ds = \int_{\theta_0=0}^{\theta} 2R\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \Rightarrow S\Big|_0^S = 2R\left(\frac{1}{1/2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\theta$$

$$\boxed{S = 4R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

2°/



relation entre "θ" et "φ" la tangente à la courbe et donnée par la derivée : dy/dx en un p^t q/q.

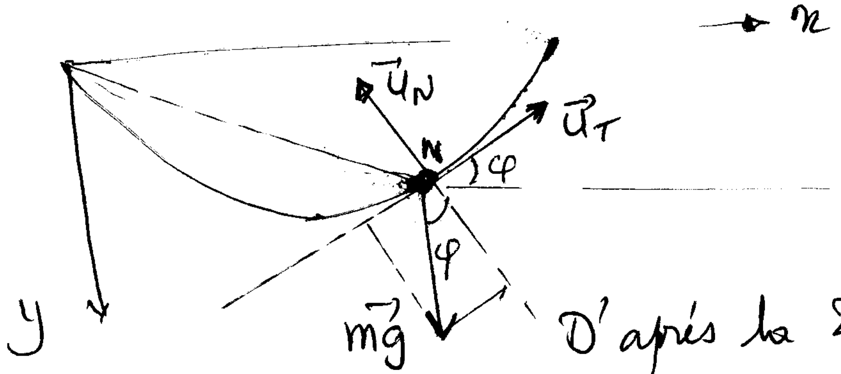
$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{R}\sin\theta\,\cancel{d\theta}}{\cancel{R}(1+\cos\theta)\cancel{d\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

on a : $\sin\theta = 2.\sin(\theta/2).\cos(\theta/2)$

$1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$ $\Rightarrow tg\varphi = \dfrac{\cancel{2}\sin(\theta/2).\cancel{\cos(\theta/2)}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}(\theta/2)}$

$$tg\varphi = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\varphi = \theta/2}$$

3°/



: on utilise la base intrinsèque $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$

D'après la 2ème loi de Newton.

$$\sum_i \vec{F}_i^{ex} = m\vec{a}$$

base intrinsèque $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$, $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$, vitesse linéaire

$$\sum_i \vec{F}_i^{ex} = m\vec{a} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N \qquad a_T = \frac{dv}{dt} \;,\; a_N = \frac{v^2}{R}$$

rayon de courbure

la masse "m" dans son mouvement n'est soumis qu'a son poids "$m\vec{g}$" $\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{ex} = m\vec{g}$

d'où : $m\vec{g} = m\vec{a}_N + m\vec{a}_N$ $\qquad m\vec{g}\begin{pmatrix} mg_T \\ mg_N \end{pmatrix}$ composante tangentielle, composante normale

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_T : \; -mg\sin\varphi = ma_T = m\dfrac{dv}{dt} \quad (1) \\ \vec{u}_N : \; -mg\cos\varphi = ma_N = m\dfrac{v^2}{R} \quad (2) \end{cases}$$

(1) $-\cancel{m}g\sin\varphi = \cancel{m}\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} + g\sin\varphi = 0$

Sachant que, $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + g\sin\varphi = \frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\varphi = 0$

de plus (1°/ question) $S = 4R\sin\theta/2 = 4R\sin\varphi$

$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{S}{4R}$

$\Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\varphi = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4R}s = 0$

$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4R}s = 0}$ Equation différentielle du 2nd ordre

4°/ $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4R}s = 0 \Rightarrow$ la solution de l'équation différentielle nous donne,

et elle est de la forme $\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0$ $\Rightarrow S(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t$

$\Rightarrow \ddot{S} + \frac{g}{4R}s = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{4R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$

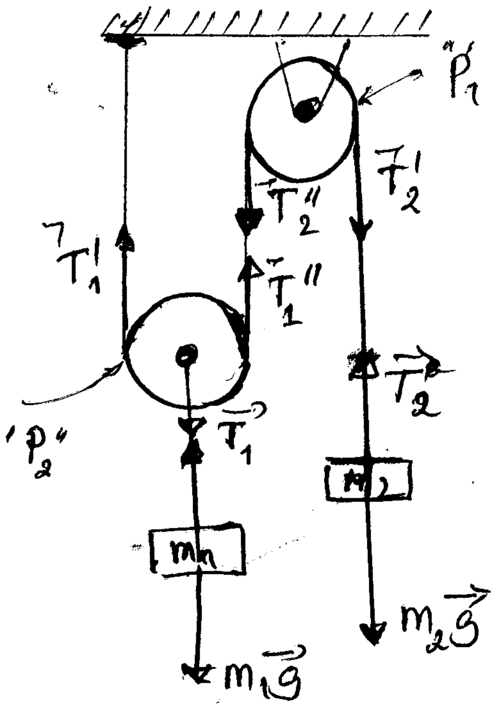
$\boxed{T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$

5°/ Equation du mouvement :

$S(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t = S_0\sin(\omega t + \psi)$: $\begin{cases} S_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ tg\psi = \frac{A_1}{A_2} \end{cases}$

$\boxed{S(t) = S_0\sin(\omega t + \psi)}$

* Exercice: 4

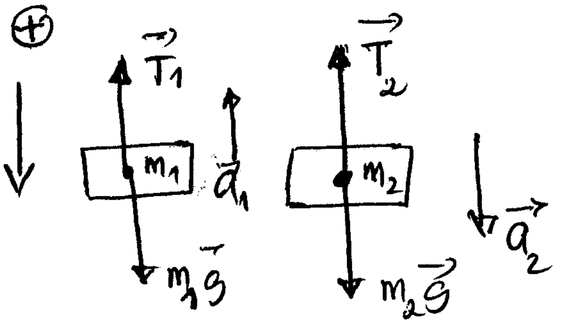


$m_1 = 10\,kg$

$m_2 = 20\,kg$

Poulie "P_1" fixe

Poulie "P_2" mobile



1°/ $a_1 = ?$ $\quad a_2 = ?$

- corde inextensible
- Gorges des poulies sans frottements

On applique la loi fondamentale de la dynamique pour chacune des masse "m_1" et "m_2"

$$\begin{aligned} m_1 &: \sum \vec{F}^{ex} = m_1 \vec{a}_1 \\ m_2 &: \sum \vec{F}^{ex} = m_2 \vec{a}_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} m_1 : & m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2 : & m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

$$\downarrow \oplus \Rightarrow \begin{cases} m_1 : & m_1 g - T_1 = -m_1 a_1 \\ m_2 : & m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

corde inextensible.

$T_1' = T_2''$, $\quad T_1'' = T_2''$, $\quad T_2' = T_2$

$\Rightarrow T_1' = T_2'' = T_1'' = T_2' = T$

gorges des poulies sans frottements.

$$T_1' = T_1'' \quad , \quad T_2' = T_2''$$

<u>Poulie en mouvement (P_2)</u>: $\quad T_1 = T_1' + T_2'' = 2T$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m_1 g + 2T = m_1 a_1 \\ m_2 g - T = m_2 a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 : & -m_1 g + 2T = m_1 a_1 \\ m_2 : & m_2 g - T = m_2 a_2 \end{cases}$$

Pour les déplacements "x" de m_1 et "x_2" de "m_2" :

$m_2 : \longrightarrow x_2$ $\quad x_2 = 2x_1$ (rotation + translation de P_2)

$m_1 : \longrightarrow x_1$ $\quad a_2 = 2a_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 : & -m_1 g + 2T = m_1 a_1 \\ m_2 : & m_2 g - T = m_2 a_2 = 2m_2 a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_1 g + 2T = m_1 a_1 & (1) \\ m_2 g - T = 2m_2 a_1 & (2) \end{cases}$$

$(2) \times 2 \Rightarrow 2m_2 g - 2T = 4m_2 a_1$

$$\Rightarrow (1) - 2\cdot(2) \Rightarrow \boxed{(2m_2 - m_1) g = (m_1 + 4m_2) a_1}$$

$m_1 = 10\,kg$

$m_2 = 20\,kg$ $\quad \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{1}{3} g}$ et $\boxed{a_2 = 2a_1 = \frac{2}{3} g}$

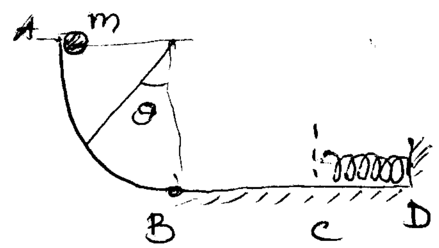
2°/ Les tensions dans la corde :

$m_2 :$ $\quad m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \Rightarrow T_2 = m_2 (g - a_2) = \frac{1}{3} m_2 g$

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{3} m_2 g} \qquad \boxed{T_2 = \frac{20}{3} g = T}$$

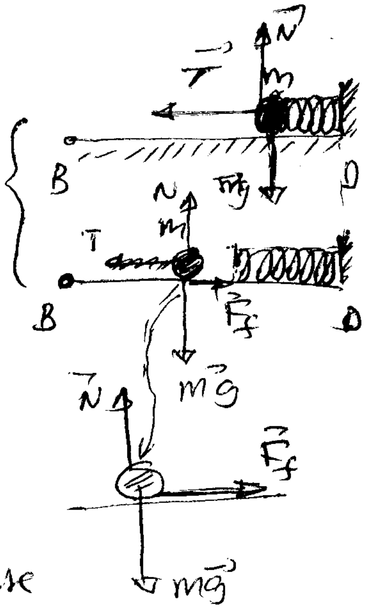
et sachant que $T_1 = 2T \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{40g}{3}}$

Exercice 05



1°/ Lancement à partir de "C" suite à une compression du ressort.

à un point quelconque de "BC", la masse "m" est soumise à l'action de son poids, la reaction du sol et la force de frottement de la piste : $(m\vec{g}, \vec{N}, \vec{F_f})$



$$\sum \vec{F}^{ex} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_f}$$

2nd loi de Newton : $\sum \vec{F}^{ex} = m\vec{a}$

$\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{a}$; $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$: base intrinsèque

$$\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{a}_N + m\vec{a}_T$$

$$\begin{cases} \vec{u}_T : & -F_f = ma_T = m\dfrac{dv}{dt} \quad (1) \\ u_N : & N - mg = 0 \quad (2) \end{cases} \qquad \text{et} \quad \vec{F_f} = \mu\vec{N} \quad (3)$$

(1) : $-F_f = -\mu N = -\mu \cancel{m}g = \cancel{m}\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow -\mu g = \dfrac{dv}{dx}\underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{v} = v\dfrac{dv}{dx}$

(2) : $N = mg$

$$\Rightarrow -\mu g\, dx = v\, dv$$

$$-\int_{x_C}^{x_B} \mu g\, dx = \int_{v_C}^{v_B} v\, dv \Rightarrow -\mu g x \Big|_{x_C}^{x_B} = \frac{1}{2} v^2 \Big|_{v_C}^{v_B}$$

$$-\mu g(x_B - x_C) = \frac{1}{2}v_C^2 - \frac{1}{2}v_B^2$$

$$\Rightarrow v_C^2 - v_B^2 = -2\mu Rg \Rightarrow v_B = \sqrt{v_C^2 - 2\mu Rg}$$

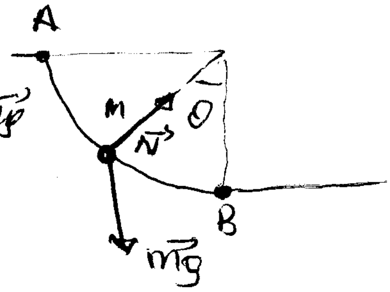
$$\mu = 0{,}5 \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$$

2°/ Tronçon "BA" : est un arc de cercle de rayon R

le masse dans ce tronçon lisse ($\mu = 0$)

elle est soumise à l'action de son poids : $m\vec{g}$

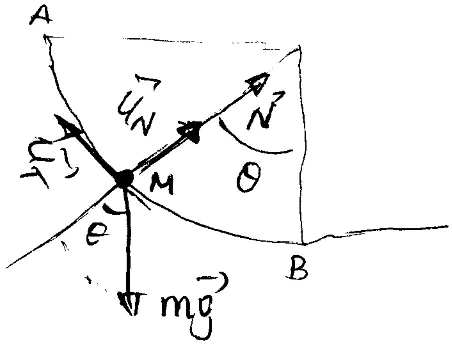
et la réaction $\vec{N}$ ($m\vec{g}, \vec{N}$)



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m\vec{a}_N + m\vec{a}_T$$

$$\begin{cases} \vec{u}_T : -mg\sin\theta = ma_T = m\dfrac{dv}{dt} \quad ① \\ u_N : \quad N - mg\cos\theta = ma_N = m\, v^2/R \quad ② \end{cases}$$

$R = R$: AB est un quart de cercle



① : $-g\sin\theta = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}$ $\quad$ mvt circulaire $v = R\cdot\dfrac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d\theta}{dt} = v/R$$

$\Rightarrow -g\sin\theta = \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{v}{R} \Rightarrow \quad -Rg\sin\theta d\theta = v\,dv$

d'où $-\displaystyle\int_0^\theta Rg\sin\theta\, d\theta = \int_{v_B}^{v_M} v\,dv \Rightarrow \quad -Rg\sin\theta\Big|_0^\theta = \dfrac{v^2}{2}\Big|_{v_B}^{v_M}$

$$\Rightarrow v_M^2 - v_B^2 = +2Rg\sin\theta$$

$v_M = \sqrt{v_B^2 + 2Rg(2\cos\theta - 1)}$ $\quad$ Sachant que $v_B = \sqrt{Rg}$

$$\boxed{v_M = \sqrt{Rg(2\cos\theta - 1)}}$$

3°/ la masse "m" s'arrête-t-elle au point A ? mais $v_M = v(\theta)$

au pt A : θ_A : $v_A = \sqrt{2Rg(2\cos\theta - 1)}$ et $\theta_A = \dfrac{\pi}{2}$

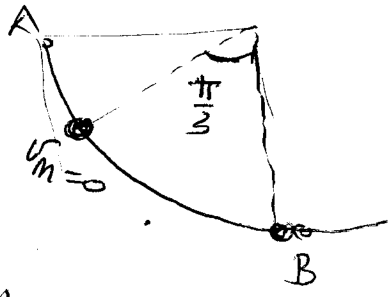
$\Rightarrow v_A = \sqrt{2Rg(0-1)} = \sqrt{-2Rg} = i\sqrt{2Rg}$ avec $i^2 = -1$

la vitesse est une quantité imaginaire. c.a.d qu'elle ne peut pas atteindre "A"

4°/ Si "m" n'arrive pas au point "A" c.a.d qu'elle va s'arrêter à un point "M" ~~quelconque~~ entre A et B

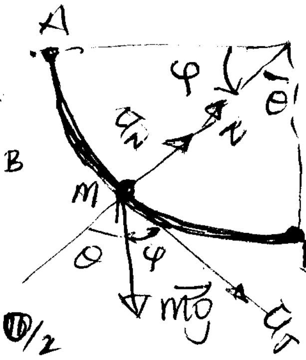
$$v_M = 0 \Rightarrow \sqrt{Rg(2\cos\theta - 1)} = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Cette masse s'arrête au point "M" correspondant à l'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$



lorsqu'elle s'arrête, mais elle reste soumise à l'action de son poids, elle va donc reprendre le mouvement en se dirigeant vers B.

- Si on prend $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$: c'est-à-dire en partant de A → B



$$\begin{cases} \vec{u}_T : \cancel{m}g\cos\varphi = \cancel{m}\dfrac{dv}{dt} \\ \vec{u}_N : N - mg\sin\varphi = mv^2/R \end{cases}$$

$\varphi = \frac{\pi}{6}$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\varphi = \pi/2$ pour $\theta = 0$

$$\vec{u}_T : g\cos\varphi = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\varphi} \Rightarrow Rg\cos\varphi\, d\varphi = v\,dv$$

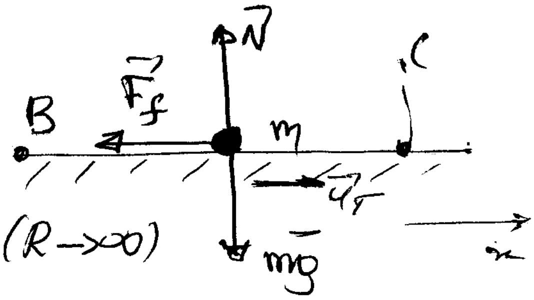
$$\Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/2} Rg\cos\varphi\, d\varphi = \int_{v_0=0}^{v_B} v\,dv \Rightarrow v_B^2 = 2Rg\sin\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 2Rg\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = Rg \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$$

Ou bien : vue que AB est lisse v_B (de la masse "m") sera la même dans son retour vers B partant du pt M où $v_M = 0$

$$\boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$$

puisque $v_B = \sqrt{2Rg}$ $\Rightarrow$ "m" ne s'arrête pas sur "B", mais continue son mouvement vers le point "C"



Puisque BC, est rugueux ($\mu \neq 0$)
$\Rightarrow$ le mvt est rectiligne une droite ($R \to \infty$)

$R \to \infty \Rightarrow a_N = 0 \quad \left(a_N = v^2/R\right)$

$$\vec{u}_T : \quad -F_f = \cancel{m} a_N = \cancel{m}\frac{dv}{dt} = \cancel{m}\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \cancel{m} v \frac{dv}{dx} = -\mu \cancel{m} g$$

$$\Rightarrow \quad -\mu g\,dx = v\,dv \quad \Rightarrow \quad -\int_{x_B}^{x_M} \mu g\,dx = \int_{v_B}^{v_M} v\,dv$$

$$-\mu g x \Big|_{x_B}^{x_M} = \frac{v^2}{2}\Big|_{v_B}^{v_M} \Rightarrow \quad -2\mu g(x_M - x_B) = v_M^2 - v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{Rg} \quad \Rightarrow \quad v_M^2 = v_B^2 - 2\mu g(x_M - x_B) = -2\mu g\,\Delta x$$

$$v_M^2 = Rg - 2\mu g\,\Delta x \quad , \mu = 0{,}5 \Rightarrow v_M^2 = Rg - g\,\Delta x$$

pourque la masse s'arrête, il faut que sa vitesse soit nulle

c.a.d. $v_M = 0 \quad \Rightarrow Rg - g\,\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\Delta x = R}$

la masse s'arrête au pt "x" situé à "R" du pt B
et c'est exactement au point "C" que la masse s'arrête

$\boxed{v_C = 0}$