Exercice 05 : ***(Fig.03)***

Une masse''$\boldsymbol{m}$'', supposée ponctuelle, est lancée suite à la compression d'un ressort de''$\boldsymbol{x}$''. Acquiert une vitesse initiale ''$\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v_C} = \sqrt{\boldsymbol{2Rg}}$''(Le ressort est au repos lorsque sa longueur est''$\boldsymbol{l_0} = \boldsymbol{CD}$''). Elle parcourt le tronçon '$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{R}$' <u>rugueux</u> de coefficient de frottement dynamique ''$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0.5}$'', ensuite entame le tronçon <u>lisse</u> ''$\boldsymbol{BA}$''qui est un quart de cercle de rayon '$\boldsymbol{R}$'.En utilisant les coordonnées intrinsèques

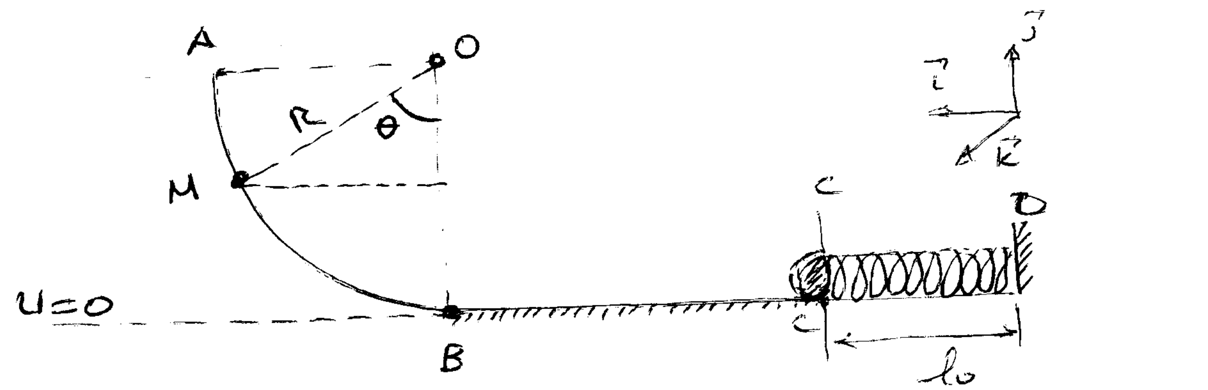
1°/ *Quelle est sa vitesse au point '$\boldsymbol{B}$'* ***?***

2°/ *Quelle est sa vitesse à un point quelconque du tronçon '$\boldsymbol{BA}$' ('$\boldsymbol{\theta}$' est compté à partir de $\boldsymbol{OB}$).*

3°/ *Est-ce qu'elle atteint le point '$\boldsymbol{A}$' ? Justifier. A quelle position s'arrête-t-elle ?*

4°/ A quel point s'arrête-t-elle si elle reprend son mouvement ? ($\boldsymbol{CD}$ est aussi lisse).

Ex 06



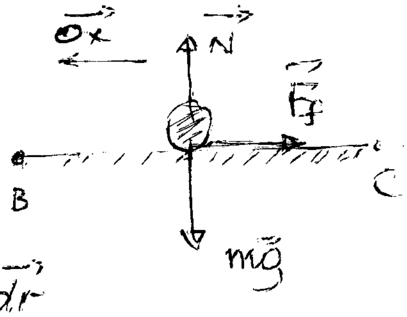
- La masse est lancée avec une vitesse initiale $v_C = v_0 = \sqrt{2kg}$

1°/ le tronçon BC est rugueux : $\mu = 0,5$

Pour déterminer la vitesse de "m" au point "B" on applique le théorème de l'énergie cinétique qui stipule que ; la variation de l'énergie cinétique est égale à la sommes des travaux effectués (moteurs + résistants)

$$\boxed{\Delta T = \sum W} \qquad \Delta T = T_B - T_A = \sum W_{AB}$$

$$\begin{cases} T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \\ T_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \end{cases}$$



le travail d'une force entre "A" et "B" est définit comme suit : $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$ produit scalaire

$\vec{F}$: force exercée sur "m"

$\vec{dr}$: déplacement élémentaire

puisque $\vec{N}$ et $m\vec{g}$ sont perpendiculaire au déplacement alors, ces efforts n'effectuent aucun travail

$\vec{N} \perp \vec{dr}$, $m\vec{g} \perp \vec{dr}$

la seule force qui effectue le travail c'est la force de frottement.

$$\Rightarrow \Delta T = T_B - T_A = W_{AB}(\vec{F_f}) = \int_A^B \vec{F_f} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F_f} = -\mu N \vec{i}$ $\quad N = mg \quad : \vec{F_f} = -\mu mg \vec{i}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ $\quad dy = dz = 0$ (mouvement suivant $o\vec{x}$)

$d\vec{r} = dx\vec{i}$

$$\Rightarrow W_{AB} = -\int_A^B \mu mg \, dx$$

Donc, $\Delta T = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_C^2 = -\int_A^B \mu \cancel{m} g \, dx$ $\quad m = c^{te}$

$$\Rightarrow v_B^2 = v_C^2 - 2\mu g \int_A^B dx = v_0^2 - 2\mu g \, x \Big|_A^B$$

$v_B^2 = v_0^2 - 2\mu g (x_B - x_A)$ $\quad : x_B - x_A = R$, $\mu = 0{,}5$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu R g} = \sqrt{Rg}}$$

2°/ Le tronçon BA est un quart de cercle et lisse ($\mu = 0$)

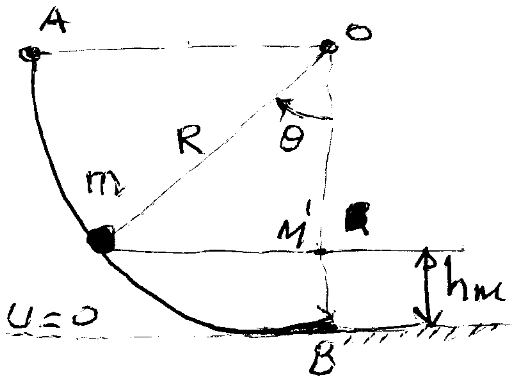
On applique la loi de Conservation de l'énergie totale (mécanique)

$\Delta E = E_M - E_B = 0$ $\quad \boxed{E_M = E_B}$

$E_B = T_B + U_B$

$T_B = \frac{1}{2} m v_B^2$, $\quad U_B = mgh_B \quad h_B = 0$

$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2$



$E_M = T_M + U_M$. $\boxed{T_M = \frac{1}{2} m v_M^2}$; $U_M = mg h_M$.

$h_M = ?$ M' : projection de OM sur OB

$\Rightarrow OM' = OM \cos\theta$, $OB = R = OM$.

$h_M = OB - OM' = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow \boxed{U_M = mg R(1-\cos\theta)}$

$v_M = ?$ $E_M = \frac{1}{2}\cancel{m} v_M^2 + \cancel{m}gR(1-\cos\theta) = E_B = \frac{1}{2}\cancel{m} v_B^2$

$v_M^2 = v_B^2 - 2Rg(1-\cos\theta) = \cancel{2}Rg(2\cos\theta - 1)$

$\cancel{v_M(\theta)} =$ $\boxed{v_M = \sqrt{Rg(2\cos\theta-1)} = v(\theta)}$

La vitesse v_M est fonction de l'angle "θ"

3°/ $v_A = ?$ pour que la masse arrive au point "A", il faut qu'elle soit réelle :

$A_{\theta_A} \longrightarrow$ correspond à l'angle $\theta_A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_A = \sqrt{Rg(2\cos\theta_A - 1)}$

$v_A = \sqrt{-Rg} = \sqrt{i^2 Rg} = i\sqrt{Rg}$ $i^2 = -1$

v_A : est une quantité imaginaire $\Rightarrow$ "m" ne peut pas arrive arrivée au point "A"

Position d'arrêt : Pour que "m" s'arrête, il faut que sa vitesse v_M soit nulle.

$v_M = 0 \Rightarrow \sqrt{\cancel{2}Rg(2\cos\theta - 1)} = 0 \Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\boxed{\theta = \pi/3}$

④ la ~~la~~ masse "m" s'arrête au p^t M / $\theta_m = \frac{\pi}{3}$

4°/ Si, elle reprend le m^{vt} en passant du p^t d'arrêt, (sous l'action de son poids) ~~et~~ vue que la piste et lisse, le problème et réversible. c.a.d que la vitesse au p^t "B" sera la m̂ à la montée qu'à la descente

~~Re~~ Principe de Conservation de l'énergie

$$E_M = E_B \qquad E_M = T_M + U_M \qquad T_M = \frac{1}{2} m v_M = 0 \quad (\theta_M = \frac{\pi}{3})$$

$$U_M = mgR(1 - \cos\frac{\pi}{2})$$

$$E_B = T_B + U_B, \quad T_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \qquad U_M = \frac{1}{2} mgR.$$

$$v_B = ?$$

$$U_B = mgh_B = 0 \quad (h_B = 0)$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2} \cancel{m} g R = E_B = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{Rg}$$

_ Pour qu'elle s'arrête, il faut que $v_M = 0$

$v_B = \sqrt{Rg}$ ⟹ elle ne s'arrête pas au point "B", elle continue son mouvement sur le tronçon rugueux BC :

_ On applique la loi de variation de l'énergie totale :

" la variation de l'énergie ~~totale~~ et égale au travaux des forces ~~nonconservatives~~" non conservatives.

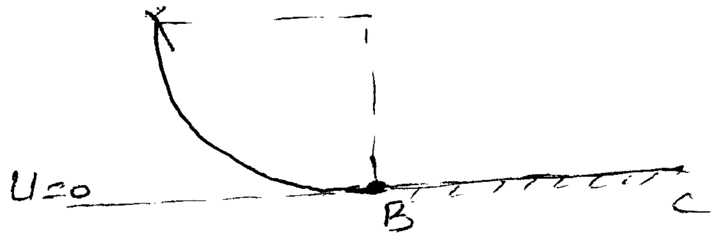
$$\Delta E = E_M - E_B = \sum W(\vec{F}^{NC}) \qquad \vec{F}^{NC} : \text{Forces non conservatives}$$

m : point entre "B et "C" : $E_M = U_M + T_M = mgh_M + \frac{1}{2} m v_M^2$

$E_B = U_B + T_B = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2$

<u>arrêt</u> : $v_M = 0$, B : référence pour l'énergie potentielle

$h_M = h_B = 0 \Rightarrow U_M = U_B = 0 \Rightarrow E_M = 0, \; E_B = m v_B^2/2$



$$E_M = mgh_M + \frac{1}{2} m v_M^2$$

$$E_B = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2$$

puisque la ligne "BC" est prise comme référence pour l'énergie potentielle. $\Rightarrow h_B = h_M = 0$

$$\Rightarrow \quad mgh_M = mgh_B = 0$$

Pour que la masse s'arrête, il faut que sa vitesse v_M soit nulle. $v_M = 0$ $\Rightarrow$ L'énergie totale $E_M = 0$

L'énergie totale au pt "B" $E_B = \frac{1}{2} m v_B^2$

$$\Rightarrow \Delta E = E_M - E_B = \int_B^M \vec{F}_f \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F}_f$: C'est la force non conservative

$(m\vec{g}, \vec{N})$: n'effectuent pas de travail

$$\Rightarrow -E_B = \int_B^M \vec{F}_f \, dx = -\int_B^M \mu m g \, dx$$

$\vec{F}_f = \mu N = \mu m g$

$$-\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = -\mu \cancel{m} g \, x\Big|_B^M = -\mu m g (x_M - x_B)$$

$\mu = 0{,}5$

$$v_B^2 = Rg = g(x_M - x_B) \Rightarrow \boxed{x_M - x_B = R}$$

$\Rightarrow x_M \equiv x_C$: la masse s'arrête au point "C"

Rque, Si $x_M - x_B > R \Rightarrow$ la masse "m" va comprimer le ressort et reprend ensuite le mvt vers "B" et s'arrête entre B, et C, si cela n'est pas fait c.à.d $v_B > 0 \Rightarrow$ elle continue son chemin de $C \to M$ et de $M \to C$ jusqu'à l'arrêt