Université de Mohamed Boudiaf M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Module :Maths 01

Année Universitaire 2020-2021
Licence ST LMD 1ère année

Série d'exercices (Mathématiques 01)

Exercice 01

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose: $\Leftrightarrow$; $\Leftarrow$; $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 4..........x = 2.$
2. $z \in \mathbb{C}, \quad \bar{z} = z..........z \in \mathbb{R}.$
3. $x \in \mathbb{R}, \quad x = \pi..........e^{2ix} = 1$

Exercice 02

Soient $E = [0,1]$ et $F = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère l'application $U : E \to F$, définie par

$$U(x) = \frac{x^2+1}{2}$$

1. Déterminer $U\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$, $U^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, \ \frac{5}{8}\right[\right)$ et $U^{-1}(\{1\})$.
2. Montrer que U est bijective et déterminer U^{-1}.

Exercice 03

Soit U l'application de $\mathbb{R}$, dans $]-2, +\infty[$ définie par

$$U(x) = e^x - 2$$

1. Déterminer $U^{-1}(\{0\})$ et $U(]0, \ln(2)])$.
2. Montrer que U est bijective et déterminer U^{-1}.

Exercice 04

la fonction f	la fonction f'
$\arcsin(x)$	
$\arccos(x)$	
$\arctan(x)$	
$\arcsin(g(x))$	
$\arccos(g(x))$	
$\arctan(g(x))$	
$ch(x)$	
$sh(x)$	
$th(x)$	
$argch(x)$	
$argsh(x)$	
$argth(x)$	

Exercice 05

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{2} & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha x - 2 & \text{si } \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur α pour que f soit continue au point $x_0 = 1$.

Exercice 06

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \quad x = 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Determiner l'ensemble E des points oú la fonction g définie par $g(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ est dérivable, et pour tout x, exprimer $g'(x)$.

Exercice 07

Calculer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \sin(x^2)$, puis déduire la limite suivante: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2) - x^2}{x^6}$. (**Ind:** $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ...$).

Exercice 08

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2e^{\sin(x)} - 2}{\sin(2x)}$

① Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de fonction: $e^{\sin(x)}$.

② Calculer les développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de fonction: $\sin(2x)$.

③ Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$

④ Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

⑤ Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangent au voisinage de 0.

Ind: $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ...$ $\qquad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

Exercice 09

Déterminer D_f puis calculer $f'(x)$ dans les cas suivantes

1. $f(x) = arctan(x^2+1)$
2. $f(x) = arcsin(3x-4)$
3. $f(x) = arccos(6x-5)$

Exercice 10 (examen 2016)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(\cos x)) + \arctan x}{\sin 2x}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$.
2. Calculer la limite de la fonction f au point 0.
3. Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangent au voisinage de 0.

Ind:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

Exercice 11 (examen 2018)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{\cos(2x)} - e}{\ln(1+x^2)}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$.
2. Déduire les valeurs $\lim_{x\to 0} f(x), f'(0), f''(0)$.
3. Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangent au voisinage de 0.

Ind:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Exercice 12 (examen 2018 SM)

Soient les fonctions suivantes: $f_2(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ et $f_3(x) = \sin(x^2)$.
$\star$ Calculer les **D.L** d'ordre 3 au voisinage de point $x_0 = 0$ de f_2 et f_3, Puis calculer en utilisant seulement les **D.L** la limite suivante: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(f_2(x))^2 - f_3(x)}{x^2}$.

Exercice 13 (examen 2020)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(\cosh(x))}{x\ln(1+x)}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$.
2. Déduire les valeurs $\lim\limits_{x\to 0} f(x), f'(0), f''(0)$.
3. Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangent au voisinage de 0.

Ind: $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

Exercice 14 (examen 2017)

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x\ln(x) - x & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (examen 2019 SM)

Soit k une fonction telle que $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Définie comme suit:

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité de k au point $x_0 = 0$.
2. Etudier la dérivabilité de k au point $x_0 = 0$

Exercice 16 (examen 2016)

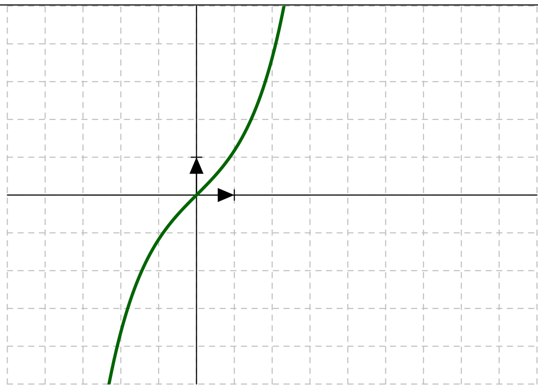
Soient $E = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $F = \left]-\frac{9}{4}, +\infty\right[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère l'application $U : E \to F$, définie par

$$U(x) = x^2 - x - 2$$

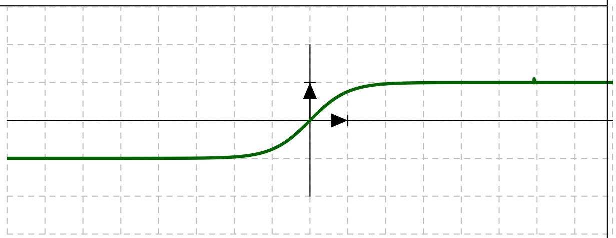
1. Déterminer $U([2;4])$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inégalités suivantes: $x^2 - x \geq 0$ et $x^2 - x - 6 \leq 0$
3. Déterminer $U^{-1}([-2;4])$.
4. Montrer que U est bijective et déterminer U^{-1}.

⑤ $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ On a

$$(sh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$$



⑥ $th : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

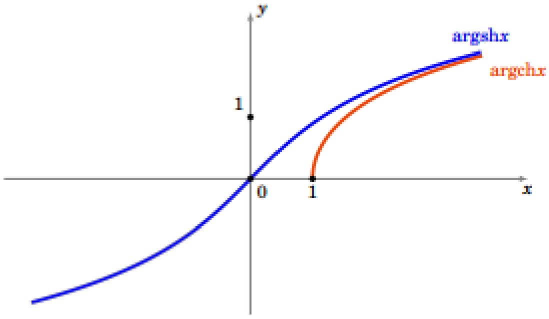


⑦ $Argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ Argsh(x) = sh^{-1}(x)$ On a

$$(Argsh(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

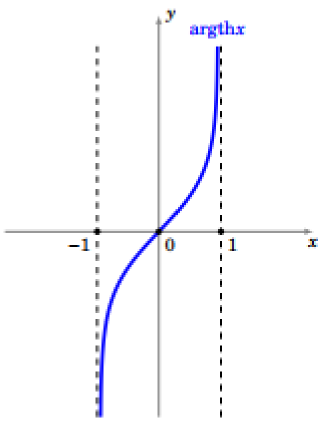
⑧ $Argch : [1;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[,\ Argch(x) = ch^{-1}(x)$ On a

$$(Argch(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x > 1$$



⑨ $Argth :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R},\ Argth(x) = th^{-1}(x)$ On a

$$(Argth(x))' = \frac{1}{1-x^2}, \forall x \in]-1;1[$$



<table>
<tr><th>La fonction f</th><th>La réprésentation de (C_f)</th></tr>
<tr><td>

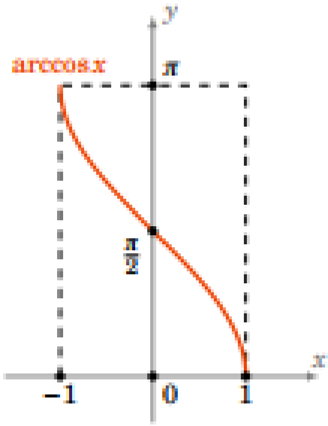
① $Arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$, $Arccos(x) = cos^{-1}(x)$
On a

$$(Arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1;1[$$

et

$$(Arccos(g(x)))' = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

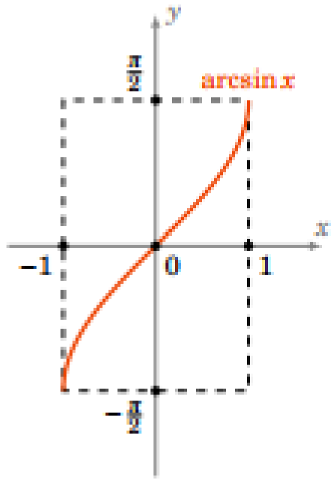
② $Arcsin : [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $Arcsin(x) = sin^{-1}(x)$
On a

$$(Arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1;1[$$

et

$$(Arcsin(g(x)))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

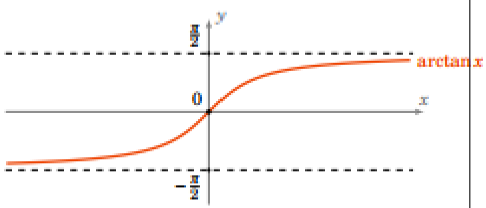
③ $Arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $Arctan(x) = tan^{-1}(x)$ On a

$$(Arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$(Arctan(g(x)))' = \frac{g(x)'}{1+g(x)^2}$$

</td><td>

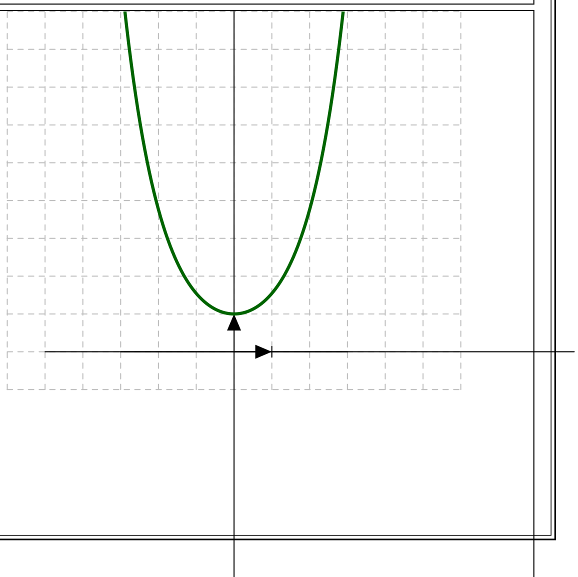


</td></tr>
<tr><td>

④ $ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ On a

$$(ch(x))' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

</td><td>



</td></tr>
</table>