Chapitre 3
Ensembles externes et permanence

Définition 3.1.

- Une formule exprimable dans le langage classique (ZFC) est appelée une formule interne.

- Une formule du langage non standard (IST) qui fait intervenir le nouveau prédicat «standard» ou l'un de ses dérivés tels que «infinitésimal» ou «illimité» est appelée une formule externe.

Exemple. La formule $[x < \epsilon^2 + 1 \Rightarrow x - 1 < \epsilon^2]$ est interne alors que la formule $[x \simeq \infty \Rightarrow (x/2) + 1 \simeq \infty]$ est externe.

D'autre part, car les ensembles sont définis en utilisant les formules, nous avons

Définition 3.2. Nous distinguons deux types d'ensembles

- Un ensemble est interne s'il est défini moyennant une formule interne.

- Un sous ensemble d'un ensemble interne est externe s'il est défini moyennant une formule externe et pour lequel un théorème classique au moins est en défaut.

Exemples.

1 - $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \epsilon\}$ est interne.

2 - L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \simeq 0\}$ est externe. Car il est défini moyennant une formule externe " la propriété $\simeq$ ". De plus cet ensemble est non vide est majoré (par 1, par exemple) mais ne possède pas de *sup.* En effet, supposons le sup égal' à a alors a ne peut être infinitésimal car $2a$ serait un infinitésimal strictement supérieur et elle ne peut être appréciable car $\dfrac{a}{2}$ le serait aussi.

3- $\{x \in \mathbb{R} \mid st(x) \text{ et } x^2 + 1 \simeq 0\} = \emptyset$, n'est pas seulement interne mais standard.

Il découle les règles suivantes

Règle.

- *Seuls les ensembles internes sont standard ou non standard.*
- *Tout élément d'un ensemble interne est interne.*

Pour la manipulation des ensembles externes nous disposons de quelques outils puissants qui s'appellent " Principes de permanence " et dont voici le premier.

Principe (de Cauchy). *Aucun ensemble externe n'est interne.*

Corollaire 3.1. Soit I un ensemble interne et E un ensemble externe. Alors
1- Si $I \subseteq E$ alors $I \subset E$ (i.e. strictement).
2- Si $E \subseteq I$ alors $E \subset I$ (i.e. strictement).
Preuve. Application directe du principe de Cauchy.

Theorème 3.1. *Soit* (U_n) *une suite réelle. Alors*
(U_n) *est de Cauchy* $\iff$ (U_n) *est convergente.*
Preuve. Par transfert, il suffit de montrer ce théorème pour les suites standard. Rappelons les critères suivantes

$$(U_n) \text{ convergente } \iff \exists^{st} l \ \forall n \simeq +\infty \ \ |U_n - l| \simeq 0$$

$$(U_n) \text{ de Cauchy } \iff \forall n \simeq +\infty \ \forall m \simeq +\infty \ U_n \simeq U_m.$$

($\Longleftarrow$) Ce sens est facile.
($\Longrightarrow$) Soit ω un indice illimité. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid |U_n - U_\omega| \leq 1\}$ est interne et contient tous les indices n illimités. Donc, en vertu du principe de Cauchy, il contient aussi un indice n_0 standard . Le terme correspondant U_{n_0} est standard (car la suite (U_n) est standard), donc U_ω est limité. Posons $l = {}^0(U_\omega)$ et alors (U_n) converge vers l.

Maintenant le transfert termine la preuve.

Notations 3.1. On utilise les symboles suivants pour désigner quelques uns des ensembles externes les plus utilisés

- ${}^\sigma E$ est la collection des éléments standard d'un ensemble E. Par exemple ${}^\sigma\mathbb{N}$, ${}^\sigma\mathbb{Z}$, ${}^\sigma\mathbb{R}$, ...
- $\oslash$ est l' ensemble des réels infnitésimaux, appelé le halo de 0 et il est aussi noté $hal(0)$.
- $hal(\infty)$ est l'ensemble des réels illimités, appelé le halo de l'infni.
- $\pounds$ est l'ensemble des réels limités, appelé la galaxie prncipale.
- @ et l 'ensemble des réels appréciables.

Exercice. Montrer que ${}^{\sigma}\mathbb{N}$, $\oslash$, $hal(\infty)$, $\pounds$, @ sont des ensembles externes.

Définition 3.3.

1- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite interne de parties internes. Soit $G = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} A_n$. Alors G est une prégalaxie. Si G est externe alors il est appelé une galaxie.

2- Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite interne de parties internes. Soit $H = \cap_{st(n)\in\mathbb{N}} B_n$. Alors H est un préhalo. Si H est externe alors il est appelé un halo.

Exemples.

- $\mathbb{R}^+$ est une prégalaxie. En effet; $\mathbb{R}^+$ est interne de plus $\mathbb{R}^+ = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} [n, +\infty[$ (on considère $0 \in \mathbb{N}$).

- ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ et $\pounds$ sont des galaxies. En effet; ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ et $\pounds$ sont externes de plus ${}^{\sigma}\mathbb{N} = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} \{0, 1, ..., n\}$ et $\pounds = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} [-n, n]$.

- $\overline{\mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} \,| n \simeq +\infty\}$, $\oslash = hal\,(0) = \{x \in \mathbb{R} \,| x \simeq 0\}$ sont des halos. En effet; $\overline{\mathbb{N}}$ et $\oslash$ sont externes de plus $\overline{\mathbb{N}} = \cap_{st(n)\in\mathbb{N}} \{n, n+1, ...\}$ et $\oslash = \cap_{st(n)\in\mathbb{N}} \left[\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$.

A présent nous donnons deux critères pour distinguer galaxies et prégalaxies, halos et préhalos.

Théorème 3.2. G est une galaxie si et seulement s'il existe une suite interne $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $G = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} A_n$.

Preuve

($\Longleftarrow$) S'il existe une telle suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et $G = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} A_n$, alors G ne peut être interne. Sinon l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \,| A_n \subset G\}$ serait interne également. Or il est précisément égal à ${}^{\sigma}\mathbb{N}$, ce qui est absurde d'après le principe de Cauchy.

($\Longrightarrow$) Soit $G = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} B_n$ une galaxie. On peut supposer les B_n croissants. De plus, pour tout n standard, il existe $p > n$ tel que $B_n \subset B_p$ strictement (sinon $G = B_n$ serait interne). On construit ainsi, par extension, une sous suite d'entiers standard $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $B_{n_k} \subset B_{n_{k+1}}$ strictement et on a clairement $G = \cup_{n_k \in {}^{\sigma}\mathbb{N}} B_{n_k}$.

Théorème 3.3. H est un halo si et seulement s'il existe une suite interne $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante telle que $H = \cap_{st(n)\in\mathbb{N}} A_n$.

Théorème 3.4.(Principe de Fehrele). Aucun halo n'est une galaxie.

Preuve. Soit G une galaxie et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite interne strictement croissante telle que $G = \cup_{st(n)\in\mathbb{N}} A_n$. Soit H un halo et soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite interne strictement décroissante telle que $H = \cap_{st(n)\in\mathbb{N}} B_n$.

Supposons que $G \subseteq H$ et on va montrer que $G \neq H$. Considérons l'ensemble interne $I = \{n \in \mathbb{N} \,| A_n \subseteq B_n\}$. On a $A_n \subseteq B_n$ pour tout $st\,(n)$. Alors ${}^{\sigma}\mathbb{N} \subset I$. D'où, par le principe de Cauchy, ${}^{\sigma}\mathbb{N} \neq I$. Ceci signifie qu'il existe $\nu \in \mathbb{N}$ illimité et $\nu \in I$ i.e. $A_\nu \subseteq B_\nu$. Par conséquent $G \subset A_\nu \subseteq B_\nu \subset H$. D'où $G \neq H$.

Exercices

1- Soit ϵ un ifinitésimal positif et ω un entier illimité. Indiquer si les ensembles suivants sont interne ou externe : $\epsilon\oslash$, $\epsilon\pounds$, $\omega\oslash$, $\omega\pounds$, $\epsilon@$, $\oslash \setminus \epsilon@$.

2- Soit ϵ un ifinitésimal positif et ω un entier illimité. Rappelons qu'une fonction f est interne (resp. externe) si son graphe est interne (resp. externe). Dire, dans chaque cas, si la fonction est interne ou externe

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1\,(x) = \begin{cases} \epsilon & : \quad x \geq 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$,

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2\,(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in @ \\ 1 & : \quad x \notin @ \end{cases}$

c) $f_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3\,(x) = {}^0x$.

3- Soit (u_n) une suite interne de réels. Montrer que si, pour tout n standard, $u_n \leq 1$, alors il existe $\omega \simeq +\infty$ tel que $u_\omega \leq 1$.

4- Soient x un réel quelconque et $\epsilon > 0$ un infnitésimal. Rappelons les définitions suivantes []:

- On appelle ϵ-galaxie de x l'ensemble

$$\epsilon - gal(x) = \{y \in \mathbb{R} \,| \frac{(x-y)}{\epsilon} \text{ est limité}\}.$$

- On appelle ϵ-hal de x l'ensemble

$$\epsilon - hal(x) = \{y \in \mathbb{R} \,| \frac{(x-y)}{\epsilon} \simeq 0\}.$$

- On appelle ϵ-microhal de x l'ensemble

$$\epsilon - microhal(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall^{st} n \ \ |x-y| < \epsilon^n\}.$$

- On appelle ϵ-microhal de x l'ensemble

$$\epsilon - microgal(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists^{st} n > 0 \ \ |x - y| < e^{\frac{-1}{n\epsilon}}\}.$$

a) Parmi les ensembles mentionnés ci-dessus, précisez : lesquels sont des galaxies et lesquels sont des halos.

b) Ordonner les ensembles mentionnés ci-dessus par inclusion tout en indiquant si l'inclusion est stricte ou large.

5-(Lemme de Robinson). Soit (u_n) une suite interne de réels. Si $u_n \simeq 0$ pour tout n standard, alors il existe ω illimité tel que $u_n \simeq 0$ pour tout $n \leq \omega$. Démontrer ce lemme.