M1, Energetique, S1

Transfert de chaleur et de masse approfondis

Chap IV

La Conduction thermique Unidimensionnelle en régime permanent

Scanned by TapScanner

Chap IV

Conduction Unidimensionnelle en régime permanent

I/ Equation generale (sans sources)

Reprenons l'equation générale de la Conduction

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k \, \overrightarrow{\text{grad}} \, T\right) + q_s$$

- Le probleme est permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

L'equation generale sans sources s'ecrit

$\boxed{\Delta T = 0}$ qui s'ecrit

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr}\left(r^n \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

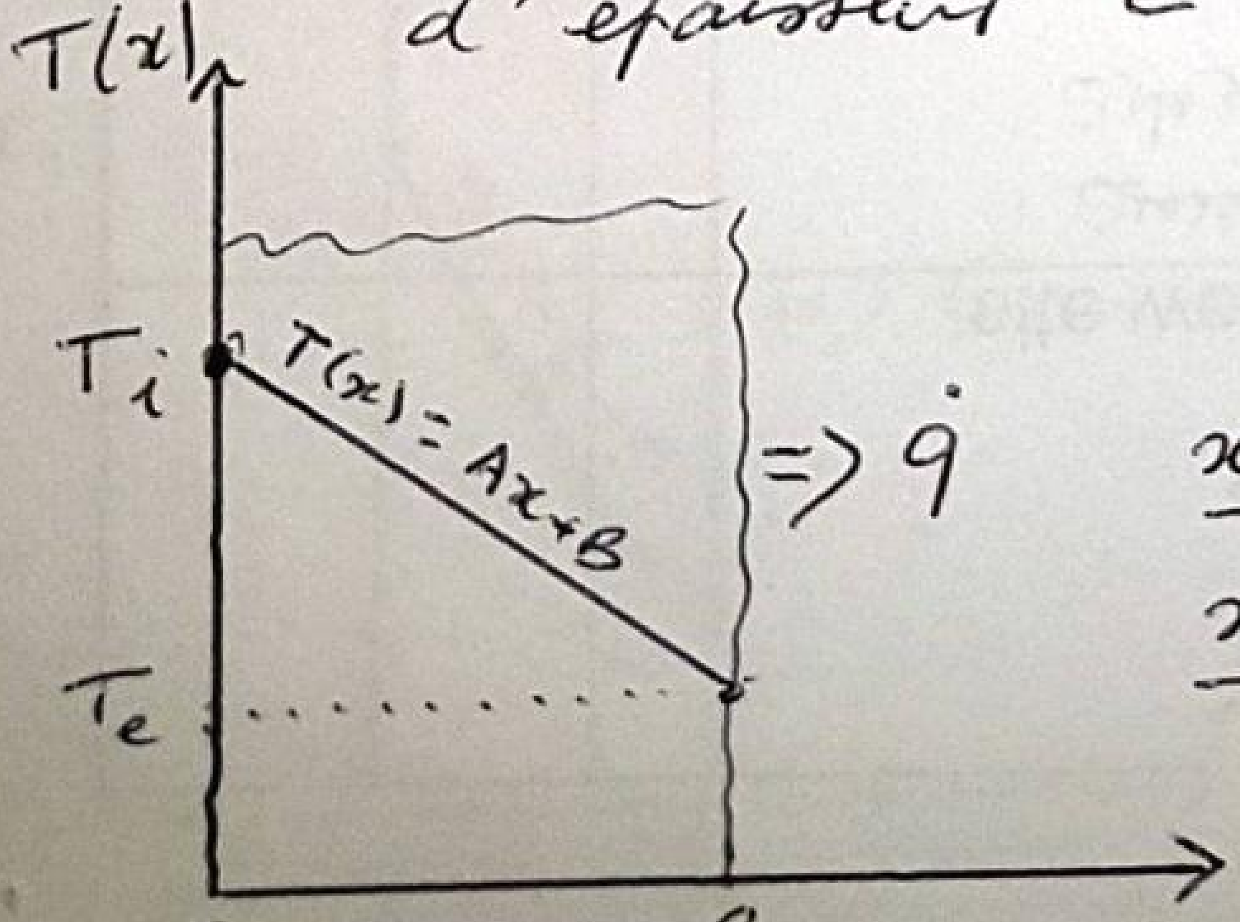
$n = 0$ $(r \to x)$ paroi plane

$n = 1$ paroi cylindrique

$n = 2$ paroi spherique

1/ paroi plane à faces isothermes

En se plaçant toujours dans le cas d'une conductivite thermique uniforme. Une plaque plane d'epaisseur e ; les temperatures des faces T_1 et T_e



$$\Delta T = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

$\underline{x = 0}$ $\quad T(0) = B = T_i$

$\underline{x = e}$ $\quad T_e = T(e) = Ae + T_i \Rightarrow A = \frac{T_e - T_i}{e}$

$$T(x) = \frac{T_e - T_i}{e} x + T_i$$

Scanned by TapScanner

Sous forme adimensionnelle

On a $T(x) = (T_e - T_i)\frac{x}{e} + T_i$

$$\theta = \frac{T(x) - T_i}{T_e - T_i} = \frac{x}{e} \; ; \quad \xi = \frac{x}{e} \Rightarrow \begin{matrix} \theta = 0 & \xi = 0 \\ \theta = 1 & \xi = 1 \end{matrix}$$

a) L'expression du flux de chaleur

$$\dot{q} = -k \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=e} \Rightarrow \dot{q} = -k \cdot \frac{T_e - T_i}{e} = \frac{k}{e}(T_i - T_e)$$

Le flux global $\dot{\Phi} = \dot{q} S$ S : surface de la plaque

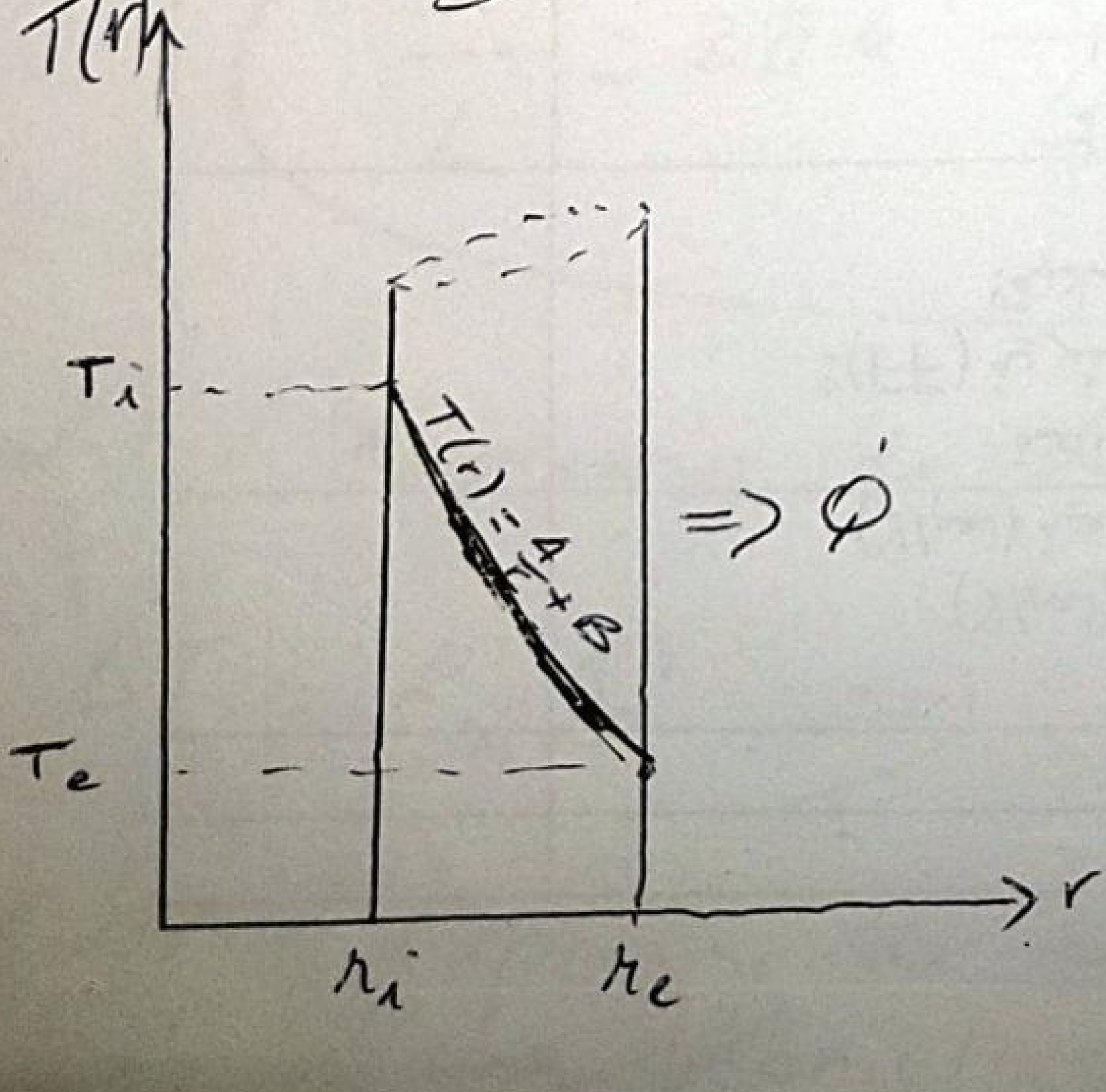
$$\dot{\Phi} = \frac{kS}{e}(T_i - T_e)$$

b) L'expression de la resistance thermique

$$\Delta T = \frac{e}{kS} \Rightarrow R_{th} = \frac{e}{kS}$$

Expression de la resistance thermique dans le cas d'une géométrie plane

2) Paroi cylindrique à faces isothermes (k = cte)



$\Rightarrow \dot{\Phi}$

L'équation générale s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{dT}{dr} = A$$

$$T(r) = A \ln r + B$$

$r = r_i \quad T = T_i$

$r = r_e \quad T = T_e$

$$A = \frac{T_e - T_i}{\ln r_e/r_i}$$

$$A = \frac{T_e - T_i}{\ln r_e/r_i} \qquad B = T_i - \frac{T_1 - T_e}{\ln \frac{r_e}{r_1}} \ln r_i$$

$$\Rightarrow \quad T(r) = \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \ln \frac{r}{r_1} + T_i$$

Sous forme adimensionnelle

$$\theta = \frac{T(r) - T_i}{T_e - T_i} = \frac{\ln r/r_i}{\ln r_e/r_i}$$

a) L'expression du flux de chaleur

$$\dot{q} = (\dot{q}(r) \qquad S = 2\pi r L$$

$$\dot{\Phi} = \dot{q} \cdot S = -k \frac{dT}{dr} \cdot S$$

$$\frac{\dot{\Phi}}{L} = -2\pi r k \frac{dT}{dr} \qquad \Bigg| \quad T = A \ln r + B \qquad \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$\frac{\dot{\Phi}}{L} = -2\pi k r \frac{A}{r} = -2\pi k \frac{T_e - T_i}{\ln r_e/r_1} = 2\pi k \frac{T_i - T_e}{\ln r_e/r_i}$$

$$\frac{\dot{\Phi}}{L} = 2\pi k \frac{(T_1 - T_e)}{\ln r_e/r_i}$$

b) L'expression de la resistance thermique

$$\Delta T = R_{th} \dot{\Phi} \quad \Rightarrow \quad R_{th} = \frac{\ln r_e/r_i}{2\pi k L}$$

c'est l'expression de la resistance thermique dans le cas d'une geometrie cylindrique -

Scanned by TapScanner