UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Les Fondements de la théorie des graphes

Chapitre 1: Concepts de base

Dr. SAID KADRI

Maître de Conférence

Department d'informatique, Faculté des Mathematiques et de l'Informatique, Université Mohamed Boudiaf de M'sila

E-mail: kadri.said28@gmail.com

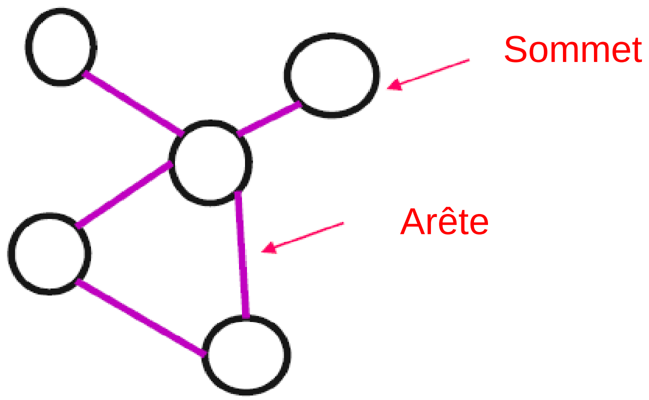
Website: https://kadrisaid28.wixsite.com/sgadri

2017 - 2018

Définition d'un Graphe

- **Un Graphe est une collection de sommets connectés par des arêtes ou des arcs.**

- **On appelle un graphe le couple G(X, U) tel que:**
- **X = {x_1, x_2, ….., x_n} est l'ensemble des sommets du graphe.**
- **U={u_1, u_2, …., u_n} est l'ensemble des arcs du graphe**
- **U $\subset$ XxX**



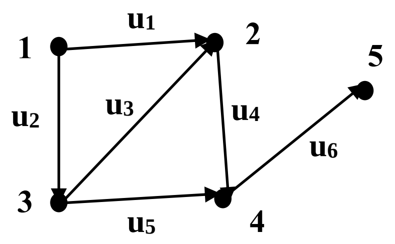
- **Le terme réseau:** est utilisé pour designer des systems reels (réseau routier, Réseau électrique, réseau informatique, etc).

- **Le terme Graphe**: est utilisé pour designer une représentation mathématique d'un réseau.

Mais, généralement: "**Réseau**" ≡ "**Graphe**"

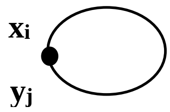
Propriétés d'un graphe:

- $n=|X|$ est appelé l'ordre du graphe G.
- $m=|U|$ est la taille du graphe (nb.arcs)
- un sommet x_i est représenté par un point.
- Un arc $U=(x_i, x_j)\in XxX$ est représenté par une flêche ou un segment de droite (selon le type du graphe orienté/non orienté)



n=|X|=5   m=|U|=6

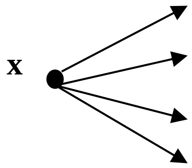
- Si $x_i=x_j$ ==> $u=(x_i, x_j)$ est représenté par une boucle (c.à.d les deux sommets sont confondus).



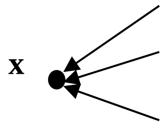
- Le 1/2 degré extérieur du sommet x est le nombre d'arcs dont x est l'extrémité initiale ou le nombre d'arcs sortants de x.

  On note $d^+(x)$.
- Le 1/2 degré intèrieur du sommet x est le nombre d'arcs dont x est l'extrémité terminale ou le nombre d'arcs entrants dans x et On note $d^-(x)$.

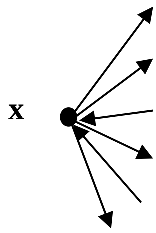
- Le degré du sommet x est le nombre d'arcs dont x est l'extrémité initiale ou terminale et on note $\boldsymbol{d(x) = d^+(x) + d^-(x)}$.



$d^+(x) = 4$

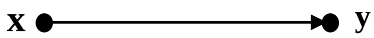


$d^-(x) = 3$

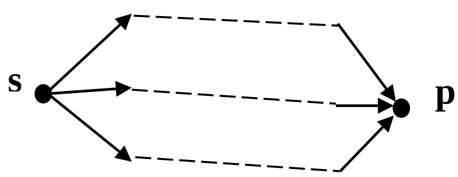


$d(x) = d^+(x) + d^-(x) = 7$

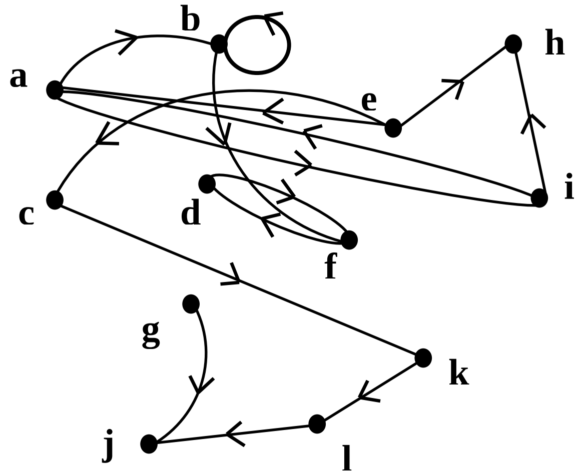
- Si $(x, y) \in U$, alors x est dit prédécesseur de y, y est le successeur de x.



- $\Gamma^+(x)$: l'ensemble des successeurs de x.
- $\Gamma^-(x)$: l'ensemble des prédécesseurs de x.
- Un sommet source s est un sommet qui ne possède aucun prédécesseur ($\Gamma^-(s)=\phi$ / il y a seulement des arcs sortants).
- Un sommet puits p est un sommet qui ne possède aucun successeur ($\Gamma^+(x) = \phi$) / il y a seulement des arcs entrants).
- Un sommet isolé x est un sommet qui ne possède aucun voisin (ni prédécesseur ni successeur) (($\Gamma^+(x)$= ($\Gamma^-(x) = \phi$). Alors il s'agit ici d'un sommet source et puits en même temps, il est aussi appelé un sommet inaccessible.



Exemple:



X={a, b, c, d, e, f, g, h, I, j, k, l}

U={(a, b), (a, i), (b, f), (f, d), (d, f),

(e, a), (e, h), (k, l), (e, c), (c, k), (b, b),

(g, j), (l, j)}

$\Gamma^+(f) = \{d\}$, $\Gamma^+(d) = \{f\}$, $\Gamma^+(b) = \{f, b\}$,
$\Gamma^+(j) = \phi$, $\Gamma^+(e) = \{a, h, c\}$, $\Gamma^-(f) = \{b, d\}$,
$\Gamma^-(e) = \phi$, $\Gamma^-(a) = \{i, e\}$

Exemples de graphes:

- Graphe représentant un réseau routier, ou les sommets représentent les intersections et les arcs représentent les routes.
- Réseau de distribution de l'eau potable AEP dans une ville.
- Réseau informatique au niveau d'une entreprise.
- Le réseau international d'information Internet.

Graphe orienté et graphe non orienté

Graphe non orienté

Lignes: non orientées (*symétriques*)

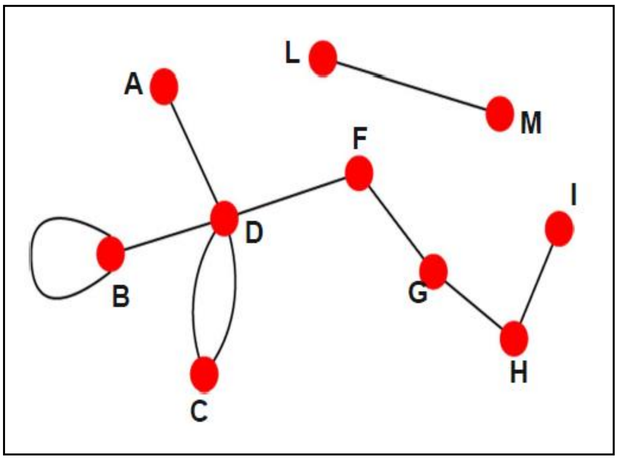
➔ arètes

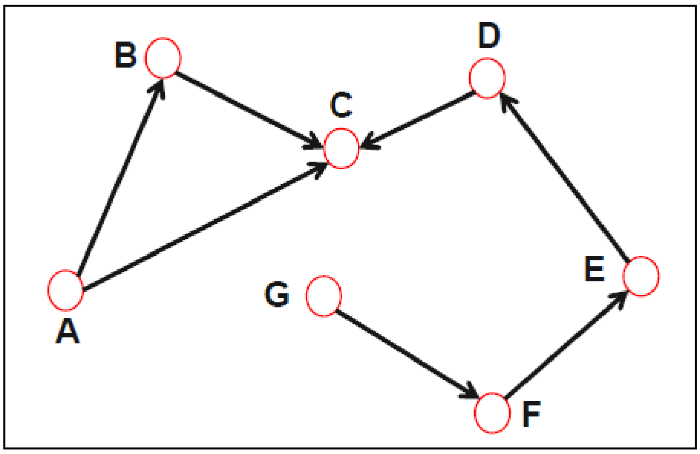
Graphe orienté

Lignes: orientées

➔ *arcs*

Graphe non orienté **Di-graphe = graphe orienté**





Définition d'un graphe valué

Un graphe valué est un graphe G(X, U, C) tel qu'on associe au graphe G(X, U) une function **F** définie comme suit:

$F: U \longrightarrow R$

F(u) = c   est appelé le poids de l'arc u, et on note **c(x, y)** ou c(u)

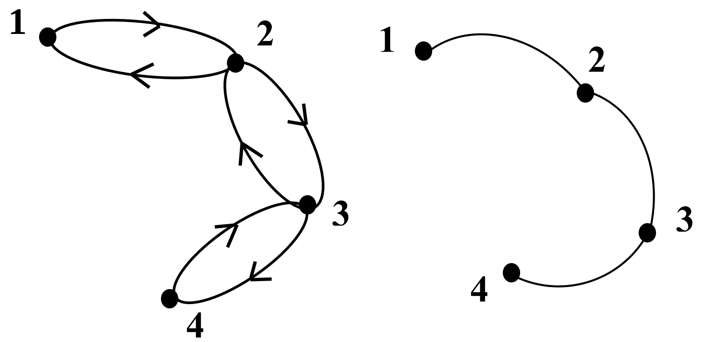
Avec:

- c(x, y): longueur du tronçon de route (x, y).
- Capacité du tronçon de route (x, y).
- Debit d'une conduite d'eau potable.
- Prix de déplacement entre les villes x, y.

Types de graphes

1. Graphe symétrique

Un graphe G(X, U) est dit symétrique si $\forall$x, y$\in$X, si (x, y)$\in$U ===> (y, x) $\in$U

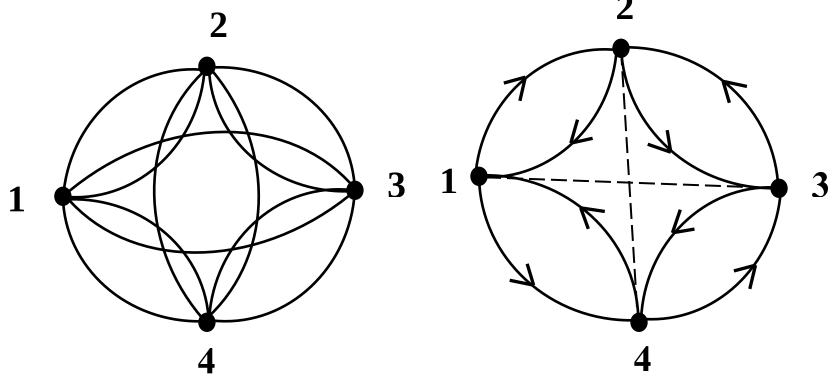


Un graphe symétrique est représenté généralement sans orientation des arcs. On parle des arêtes au lieu des arcs

2. Graphe complet

Un graphe G(X, U) est dit complet si seulement si:

$\forall$x, y$\in$X, (x, y) $\in$U et (y, x) $\in$U



Graphe complet **Graphe non complet**

3. Graphe simple

Un graphe G(X, U) est dit simple si seulement si:

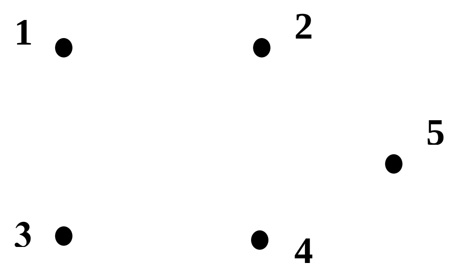
- **Ne contient aucune boucle.**
- **$\forall$ x, y$\in$X, $\exists$ au plus u=(x, y)$\in$U**

4. Graphe vide

Un graphe G(X, U) est dit vide s'il n y a aucun sommet ni arc ou arête. (X=ϕ , U =ϕ).

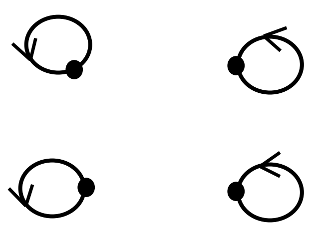
5. Graphe trivial

Un graphe G(X, U) est dit trivial s'il y a des sommets, mais il n y a aucun arc ou arete. (U =ϕ).



6. Graphe réflexif

Un graphe G(X, U) est dit réflexif, s'il existe une boucle en chaque sommet x de G.



- **$\forall$ x$\in$X ===> (x, x)$\in$U**

7. Graphe anti-symétrique

Un graphe G(X, U) est dit anti-symétrique si:

- **$\forall$ x, y$\in$X, si (x, y)$\in$U ===> (y, x)$\notin$U**

8. Graphe transitif

Un graphe G(X, U) est dit transitif si:

- **$\forall$ x, y, z$\in$X, si (x, y)$\in$U et (y, z)$\in$U ===> (x, z)$\in$U**

9. Inverse d'un graphe

L'inverse d'un graphe G(X, U) est le graphe G'(X, U') déduit de G en inversant le sens de ses arcs.

OBS: l'inverse de G' est G lui même.

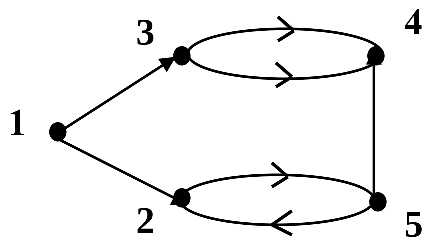
10. Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire du graphe G(X, U) est le graphe G*(X, U*) tel que:

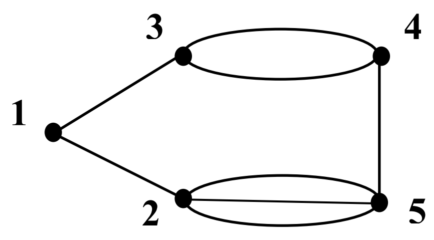
(x, y)$\in$U ===> (x, y) $\notin$U*

11. Multigraphe

si G est un graphe orienté, x et y deux sommets de ce graphe, si x et y sont liés par deux arcs u_1, u_2 de même sens, G est dit multigraphe et l'arc (x, y) est dit un arc multiple.



un graphe multiple orienté



un graphe multiple non orienté

- **(3, 4) un arc multiple**
- **(2, 5) un arc symétrique**

12. Le graphe biparti (bipartite graph)

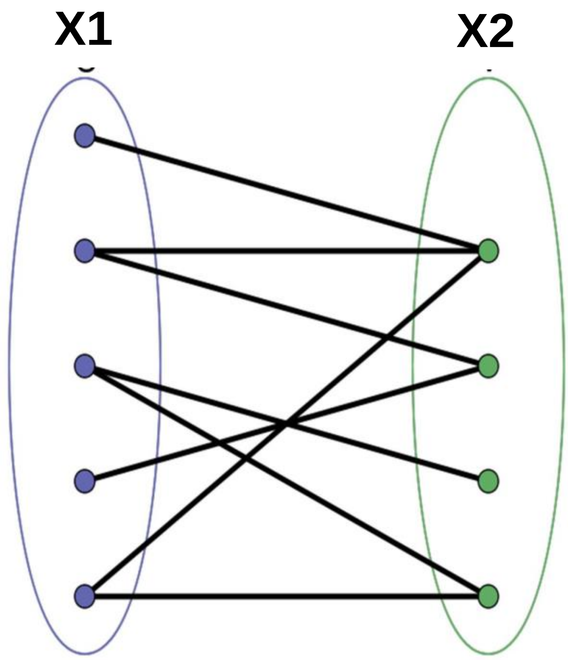
Un graphe biparti (ou un bi-graphe) est un graphe dont l'ensemble des ses sommets peuvent être divisé en deux sous-ensembles disjoints de sommets X_1 et X_2 tels que deux sommets du même sous-ensemble ne soient pas adjacents (c.à.d tout arc de G a une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2).

Et on note:

G(X, U) avec: $X = X1 \cup X2$ et $X1 \cap X2 = \phi$

Et si $u=(x_1, x_2)$ et $x_1 \in X1 \Longrightarrow x_2 \in X2$

$x_1 \in X2 \Longrightarrow x_2 \in X1$

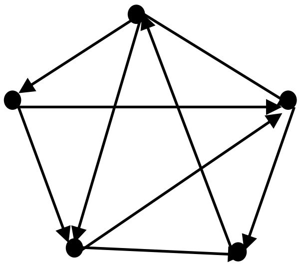


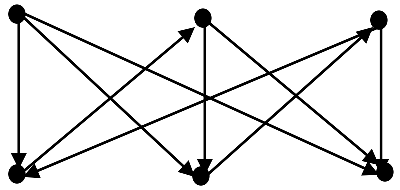
13. Graphe planaire

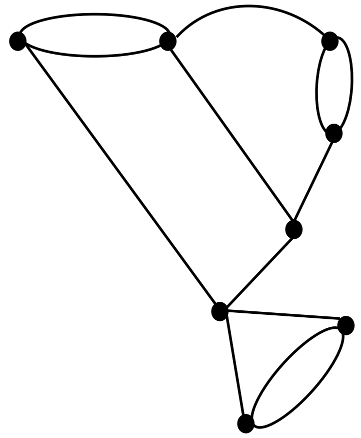
Un graphe G est dit planaire s'il est possible de le tracer dans le plan de façon que deux arcs quelconques ne se croisent pas sauf en leurs extrémités.

On appellee representation planaire ce trace dans le plan.

Exemple:







G1, G2: deux graphes non planaires

G3 un graphe planaire

14. Graphes isomorphes

Deux graphes G(X, U), G'(X', U') sont dits isomorphes s'il existe une bijection f:

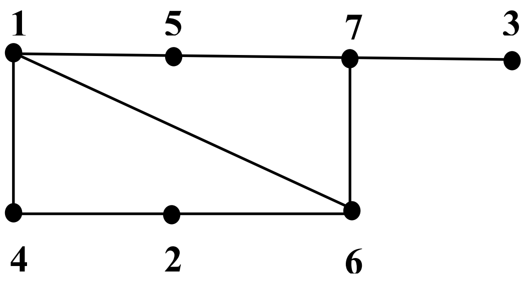
f: X $\longrightarrow$ X'

Telle que: (x, y)$\in$U $\Leftrightarrow$ (f(x), f(y)) $\in$U'

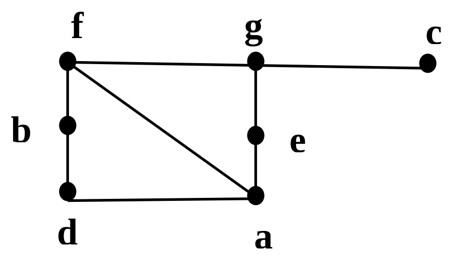
c.à.d si les deux sommets x, y sont liés par un arc dans G ===> l'image de x et l'image de y par f sont aussi liées par un arc dans G'.

Exemple 1:

Soient les deux graphes G, H définis comme suit:



(G)



(G')

Et soit une bijection f définie comme suit:

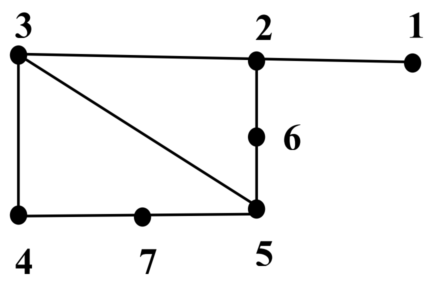
f: {1, 2, …, 7} $\longrightarrow$ {a, b, …, g}

Avec: f(1)=a, f(2)=b, …, f(7)=g

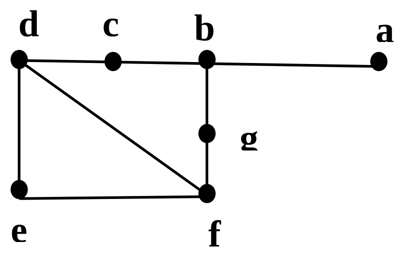
G et G' sont isomorphes.

Exemple 2:

Soient les deux graphes G, H définis comme suit:



(G)



(H)

(G), (H) deux graphes non orientés et non isomorphes.

Car (3, 5)$\in$U ===> (f(3), f(5))=(c, e)$\notin$U'

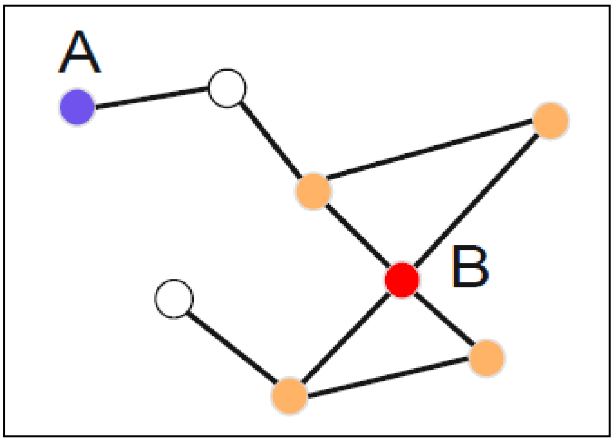
Degré d'un sommet

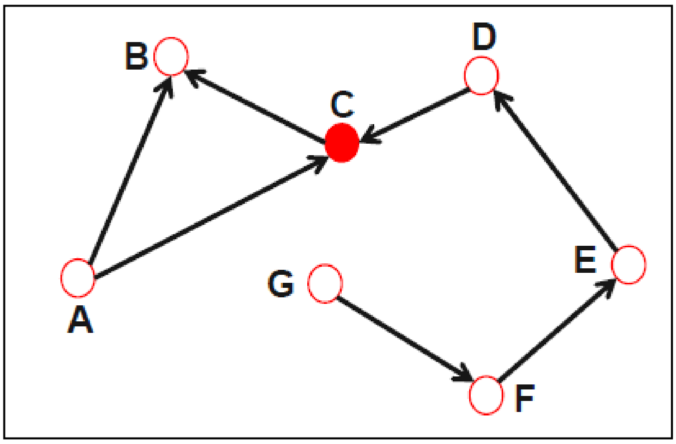
Graphe non orienté

Degré: le nombre des arêtes qui relient les sommets.

Graphe orienté

dans un graphe orienté, on définit des degrés intérieurs des degrés extérieurs.
Le degré total d'un sommet est la somme du degré intérieur et le degré extérieur.



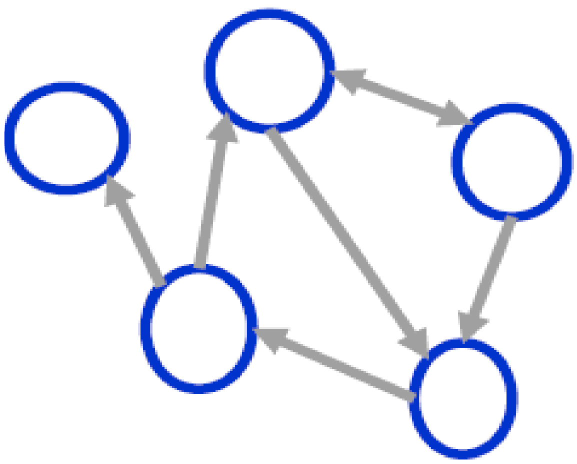


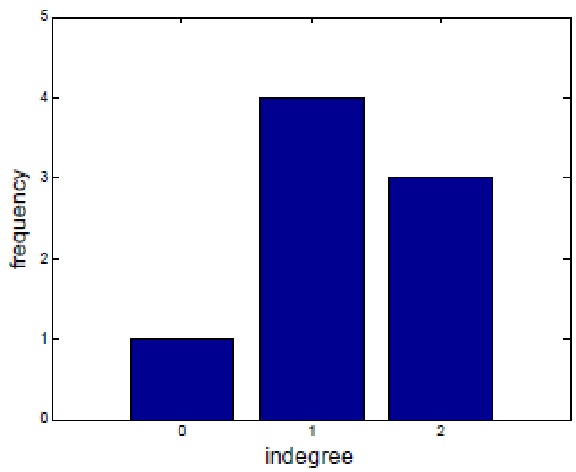
Distribution de degrés

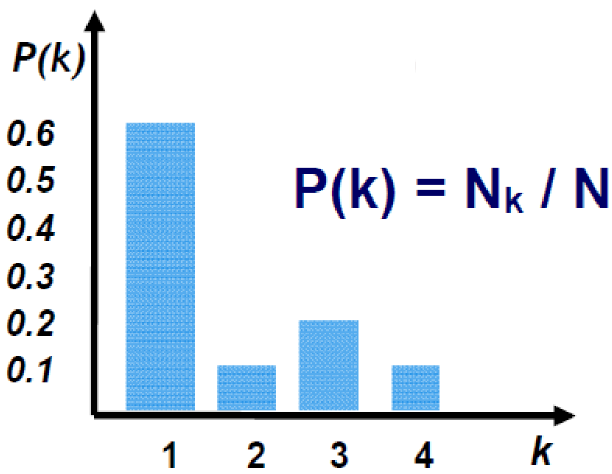
Résume les degrés de tous les sommets du graphe.

Deux méthodes de distribution sont proposées:

1. **Compter les fréquences des sommets associés à chaque degré.**
2. **Calculer la probabilité P(k): qu'un sommet choisi arbitrairement possède le degré k.**

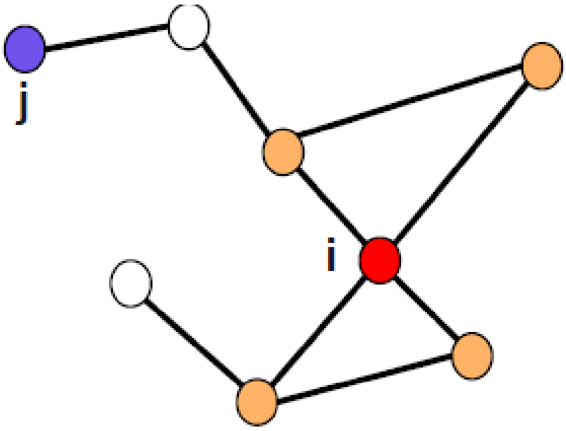


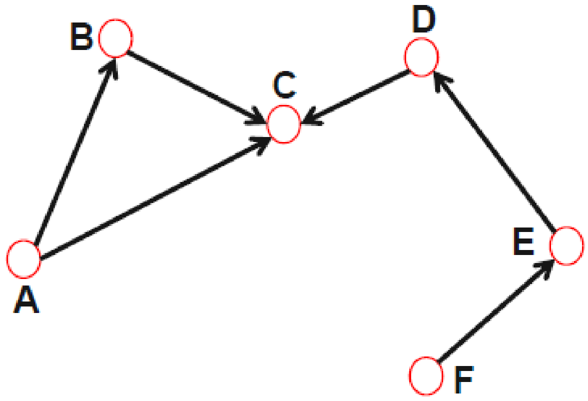




Degré moyen

Graphe non orienté | **Graphe orienté**





$$\langle k \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i \qquad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

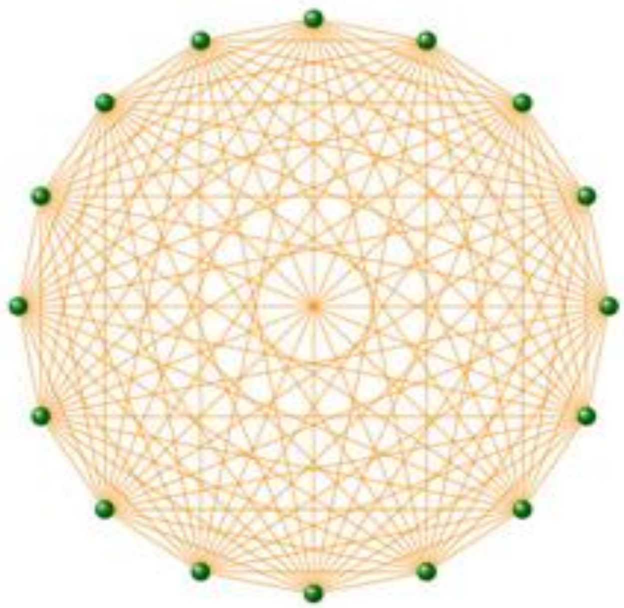
$$\langle k^{in} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i^{in}, \quad \langle k^{out} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i^{out}, \quad \langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle$$

N: le nombre de sommets dans le graphe.
L: le nombre d'(arcs/arêtes) dans le graphe

Densité d'un graphe

- **Nb. de connexions qui peuvent exister entre sommets:**

  - Graphe orienté



$$L_{max} = N*(N-1)$$

Puisque chaqu'un des N sommets peut se connecter avec (N-1) autres sommets

  - Graphe non orienté

$$L_{max} = N*(N-1)/2$$

Puisque les arêtes ne sont pas orientées, alors compter chaque arête uniquement une seule fois.

- **Valeur de la densité?**

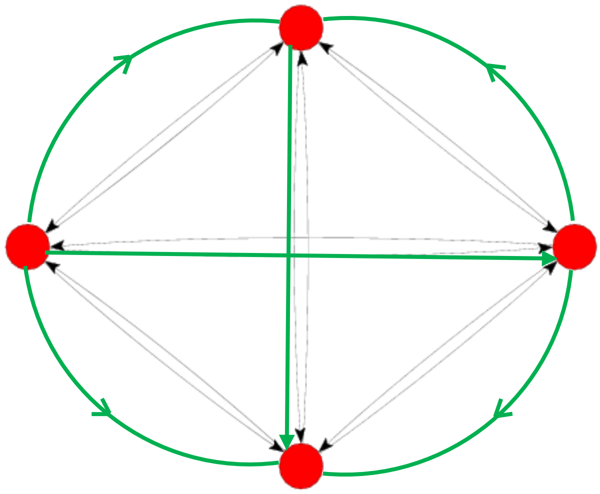
$$Density = L/ L_{max}$$

- **Par exemple:**

Dans ce graphe, on a:

N=4; L = Nb.lignes = 6
➔ L_{max} = 4*(4-1)=12

parmi les 12 connexions possibles L_{max} , ce graphe a 6, donnant une densité de: 6/12 = 0.50



Definition d'un chemin

On appelle un chemin de G(X, U) la suite de sommets

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ (sans coupure) tel que:

- $(a_i, a_{i+1}) \in U$ avec i=1, 2, …, p-1.
- a_i est l'extrémité initiale du chemin
- a_p est l'extrémité terminale du chemin.

Definition d'un chemin simple

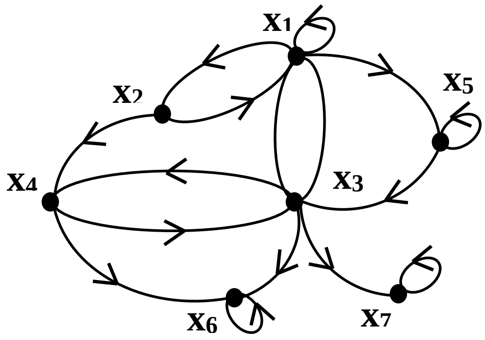
$a_1, a_2, \ldots, a_p$ est un chemin simple tel que:

$\forall$ i≠j, $(a_i, a_{i+1}) \neq (a_j, a_{j+1})$ (c.à.d un arc est pris une seule fois).

Definition d'un chemin élémentaire

est un chemin qui ne prend les sommets qu'une seule fois.

Exemples:



$X_2X_1X_5X_3X_1X_5X_5X_3X_6$ **chemin qui n'est pas simple, ni élémentaire.**

$X_2X_1X_5X_3X_1X_2X_4$ **chemin simple non élémentaire**

$X_1X_2X_4X_3X_6$ **chemin élémentaire**

Remarque

Si $a_1a_2a_3 \ldots.a_p$ est un chemin

- **a_1 est un ascendant de a_p**
- **a_p est un descendant de a_1**

Definition d'un circuit

Un circuit est un chemin $a_1a_2a_3 \ldots.a_p$ tel que: $a_1=a_p$

c.à.d les deux extrémités initiale et terminale sont confondues (un chemin fermé).

Observations

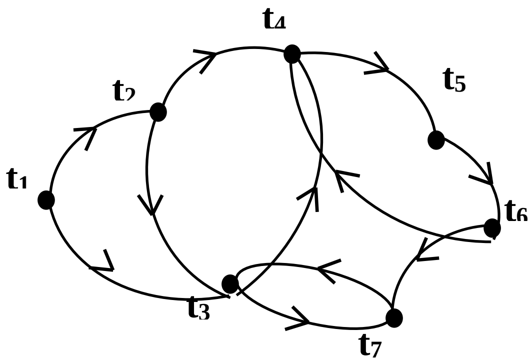
- **De la même façon on peut définir un circuit simple, un circuit élémentaire.**
- **La notion du chemin circuit met en considération le sens des arcs du graphe.**
- **Un circuit simple est un chemin fermé qui ne prend les arcs qu'une seule fois.**
- **Un circuit élémentaire est un chemin fermé qui ne prend les sommets qu'une seule fois.**

Chemins et circuits particuliers

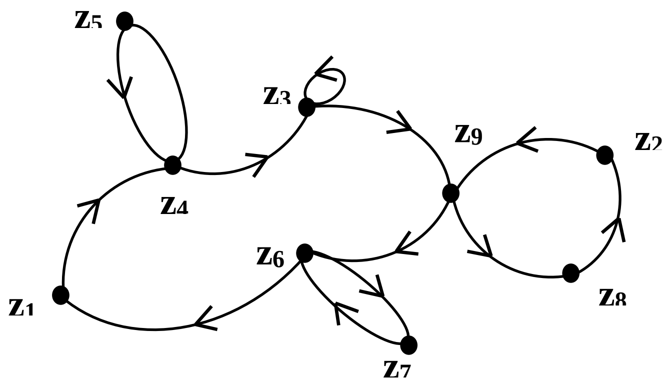
1. **Un chemin hamiltonien :** **est un chemin élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.**
2. **Un chemin eulerien :** **est un chemin simple qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.**
3. **Un circuit hamiltonien :** **est un circuit élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.**
4. **Un circuit eulerien :** **est un chemin simple et fermé qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.**

Exemples:

$t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7$ est un chemin hamiltonien



$z_1z_4z_5z_4z_3z_3z_9z_8z_2z_9z_6z_7z_6z_1$ est un circuit eulerien

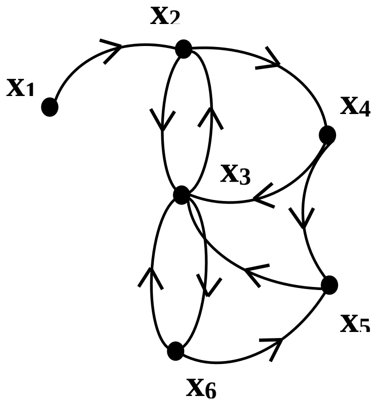


Définition d'une chaîne

Une chaîne d'un graphe non orienté (ou orienté mais l'orientation n'est pas prise en considération) G(X, U) est une suite de sommets a_1, a_2, …, a_p (sans coupure) tel que:

$(a_i, a_{i+1}) \in U$ ou $(a_{i+1}, a_i) \in U$ avec $i=1, 2, \ldots, p-1$.

Exemple:



$X_1X_2X_4X_3X_6X_5X_3X_2$ est une chaîne

$X_1X_2X_5$ n'est pas une chaîne

Définition d'une chaîne simple

C'est une chaîne ou les (arcs/arêtes) sont pris(es) une seule fois.

Exemple:

$X_1X_2X_3X_2X_4X_3X_5X_6X_3$ est une chaîne simple.

Définition d'une chaîne élémentaire

C'est une chaîne dont tous les sommets du graphe sont pris une seule fois.

Exemple:

$X_1X_2X_4X_3X_6$ est une chaîne élémentaire.

Définition d'un cycle

Un cycle est une chaîne $a_1a_2a_3$ ….a_p, tel que: $a_1=a_p$

c.à.d l'extrémité initiale et l'extrémité terminale sont confondues

Exemple:

$X_2X_4X_3X_6X_5X_3X_2$ **est un cycle.**

Observations

- **De la même façon on peut définir un cycle simple, un cycle élémentaire.**
- **Dans la définition d'une chaîne ou d'un cycle l'orientation du graphe n'est pas importante.**

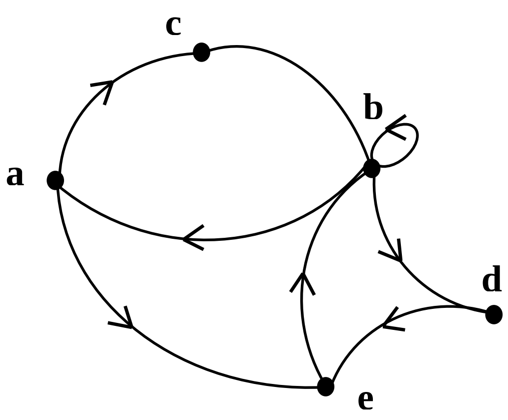
Chaînes et cycles particuliers

1. **Une chaîne hamiltonienne : est une chaîne élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.**
2. **Une chaîne eulerienne : est un chaîne qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.**
3. **Un cycle hamiltonien : est un cycle élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.**
4. **Un cycle eulerien : est une chaîne simple et fermée qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.**

Exercices:

Exercice 1

Soit le graphe G(X, U) suivant:



- **bacbd:** chemin simple
- **eacbd:** chaîne élémentaire
- **acbacbd:** chemin non simple
- **aebdebac:** chaîne non simple.
- **adbc:** ni chemin, ni chaîne

Exercice 2

- **acbacba:** circuit non simple.
- **abdebae:** cycle non simple.
- **acba:** circuit élémentaire (même sens).
- **acbea:** cycle élémentaire.

Définition d'un sous graphe

Soit G(X, U) un graphe

G'(X', U') est un sous graphe de G si $X' \subset X$

$U' = \{u \in U /$ les deux extrémités de u appartiennent à $X'\}$

(c.à.d, on supprime des sommets et des arcs)

Définition d'un graphe partiel

Soit G(X, U) un graphe, on appelle graphe partiel de G, le graphe G'(X', U') tel que: $X' = X$, $U' \subset U$

(c'est un graphe ayant le même ensemble X de sommets, mais un ensemble different des arcs $U' \subset U$).

Définition d'un sous graphe partiel

Soit G(X, U) un graphe, on appelle sous graphe partiel de G, un graphe partiel d'un sous graphe de G.

(c.à.d on supprime des sommets et des arcs)

Exemple:

Soit le graphe G(X, U) avec:

$X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; $U = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, f), (f, g),$

$(e, a), (e, f), (e, d), (f, d)\}$

1. G'(X', U') est un sous graphe (Fig 1)
   X'={a, e, f, d} ; U'={(e, a), (e, f), (d, e), (f, d)}

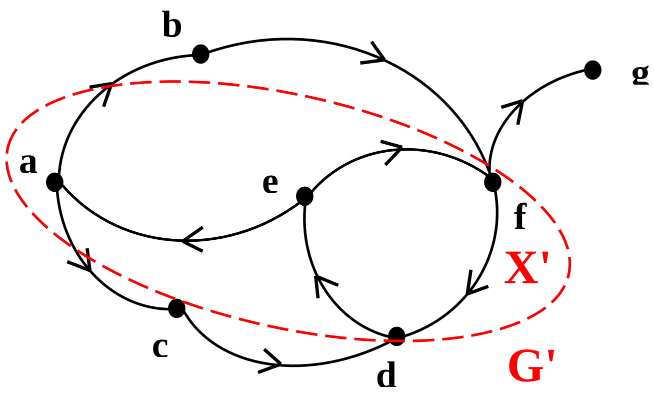


Fig 1

2. G''(X, U'') est un graphe partiel (Fig 2)

   U''={(a, b), (a, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d)}

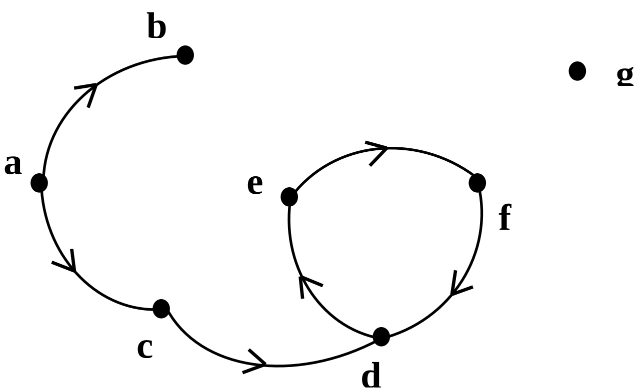


Fig 2

3. G'''(X', U''') est un sous graphe partiel (Fig 3)

   X'={a, e, f, d} ;   U'''={(a, e), (e, f), (f, d)}

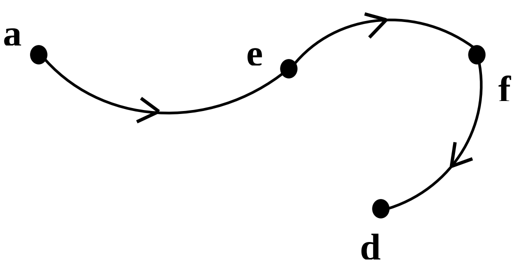


Fig 3

Exemple pratique:

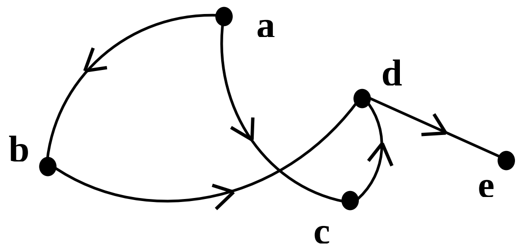
Pour un réseau routier d'un pays

1. **L'ensemble des routes d'une wilaya est un sous graphe du réseau routier.**
2. **L'ensemble des routes nationales est un graphe partiel du réseau routier.**
3. **L'ensemble des routes nationales d'une wilaya est un sous graphe partiel du réseau routier.**

Définition d'un graphe connexe

Un graphe G(X, U) est dit connexe si:

- **$\forall$ x, y$\in$X, il existe une chaîne entre x et y (le sens des arcs n'est pas important)**



Un graphe connexe; mais n'est pas fortement connexe

Définition d'une composante connexe

Est un sous graphe connexe et maximal pour cette propriété. C.à.d, si on ajoute un sommet à cette composante on détruit la connexité.

OBS: si G est un graphe connexe, il constitue lui même la seule composante connexe.

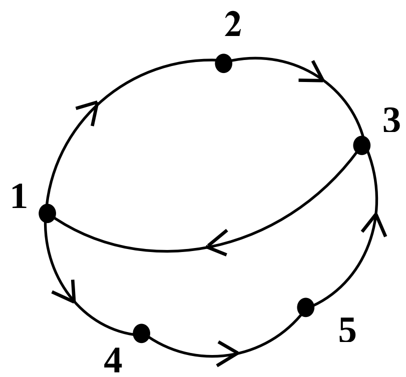
Définition d'un graphe fortement connexe

Un graphe G(X, U) est dit fortement connexe si:

∀ x, y∈X, il existe un chemin de x vers y et un autre de y vers x

Exemple:

(1, 2) ∃ un chemin (1, 2)
(2, 1) ∃ un chemin (2, 3), (3, 1)
(2, 3) ∃ un chemin (2, 3)
(3, 2) ∃ un chemin (3, 1), (1, 2)
(3, 1) ∃ un chemin (3, 1)
(1, 3) ∃ un chemin (1, 2), (2, 3)
(1, 4), (4, 5), (5, 3)
(3, 4) ∃ un chemin (3, 1), (1, 4)
(4, 3) ∃ un chemin (4, 5), (5, 3)
(4, 5) ∃ un chemin (4, 5)
(5, 4) ∃ un chemin (5, 3), (3, 1), (1, 4)
(5, 3) ∃ un chemin (5, 3)
(3, 5) ∃ un chemin (3, 1), (1, 4), (4, 5)
(1, 4) ∃ un chemin (1, 4)
(4, 1) ∃ un chemin (4, 5), (5, 3), (3, 1)
(1, 5) ∃ un chemin (1, 4), (4, 5)
(5, 1) ∃ un chemin (5, 3), (3, 1)
(2, 4) ∃ un chemin (2, 3), (3, 1), (1, 4)
(4, 2) ∃ un chemin (4, 5), (5, 3), (3, 1), (1, 2)
(2, 5) ∃ un chemin (2, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 5)
(5, 2) ∃ un chemin (5, 3), (3, 1), (1, 2)



G est fortement connexe

On constate que $\forall$x, y$\in$X On peut trouver un chemin de x vers y et un autre de y vers x ===> le graphe G(X, U) est un graphe fortement connexe.

Définition d'une composante fortement connexe

On appelle une composante fortement connexe d'un graphe G(X, U) un sous graphe G'(X', U') fortement connexe.

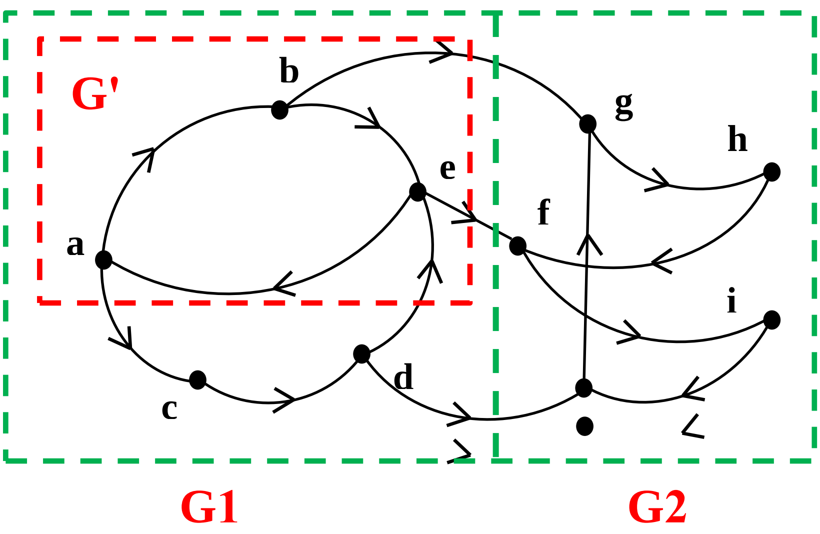
Exemple:

Soit le graphe G(X, U) suivant tel que:

X={a, b, c, d, e, f, g, h, I, j}

U={(a, c), (c, d), (d, e), (e, f), (d, j), (b, g), (g, h), (h, f), (f, i),

(I, j), (j, g)}



G(X, U) n'est pas fortement connexe.

G'(X', U') est un sous graphe de G.

X'={a, b, e} ; U' = {(a, b), (b, e), (e, a)}

G' représente une composante fortement connexe (non maximale)

G1(X1, U1), G2(X2, U2) sont deux composantes fortement connexes maximales.

Observations:

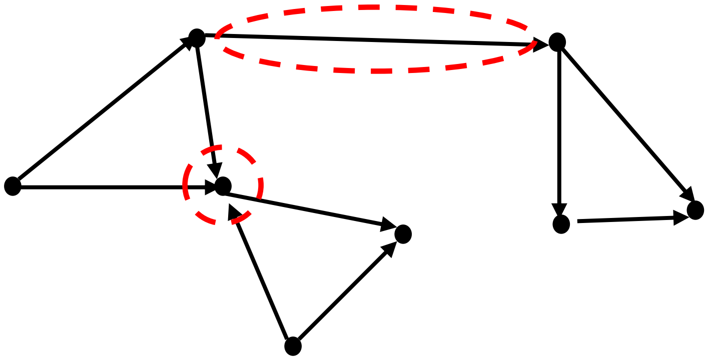
G(X, U) un graphe, si $\forall x, y \in X$, il existe une chaîne entre x et y on dit que G(X, U) est simplement connexe.
G(X, U) un graphe connexe, si après l'élimination de plus de k arêtes, G devient non connexe on dit que G est k-arêtes connexe.

Définition d'un point d'articulation:

Un point d'articulation d'un graphe G est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Définition d'un isthme :

Est un arc dont la suppression augmente le nombre de CC.



Algorithme de recherche d'une composante simplement connexe CSC d'un sommet S

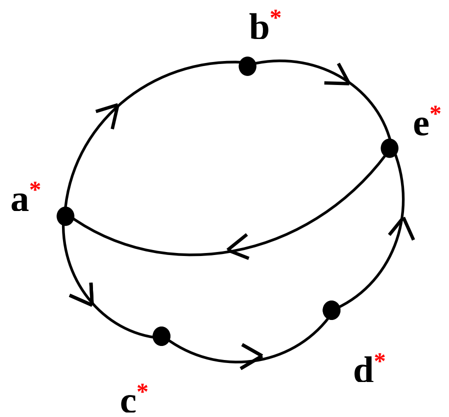
Soit G(X, U) un graphe

(1) Marquer le sommet S (par *)
(2) Marquer tout sommet adjacent (suivant/précedent) à un sommet déjà marqué
(3) Repéter (2) jusqu'à ce que l'on ne puisse plus marquer aucun sommet.
(4) Les sommets marqués par (*) forment la composante simplement connexe de S

Exemple:

Soit G(X, U) un graphe avec:

X={a, b, c, d, e}



U = {(a, b), (a, c), (b, e), (c, d), (d, e), (e, a)}

Construisons la CSC de b

(1) Marquer b (b*)
(2) Marquer les sommets adjacents de b (les suivants et les précédents de b)
(3) Aucun sommet n'est resté sans marquage.

{a, b, c, d, e} constitue une composante simplement connexe, c.à.d G forme une CSC

Algorithme de recherche d'une composante fortement connexe CFC d'un sommet S

Soit G(X, U) un graphe

(1) Marquer le sommet S avec (+ et -)

(2) (a) Marquer par (+) tout suivant (non encore marqué +) d'un sommet déjà marqué (+)

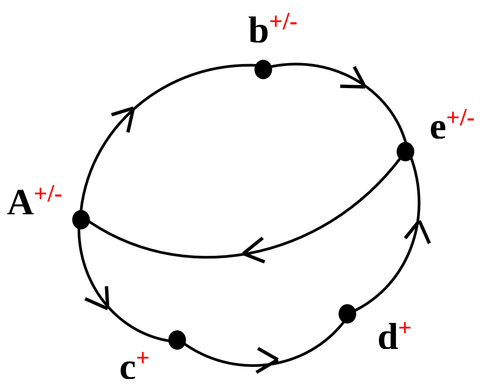
(b) Marquer par (-) tout précédent (non encore marqué -) d'un sommet déjà marqué (-)

(3) Les sommets marqués à la fois par + et – forment une CFC contenant S.

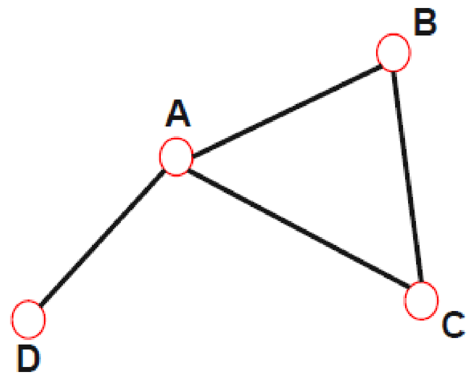
Exemple:

dans le graphe ci-contre

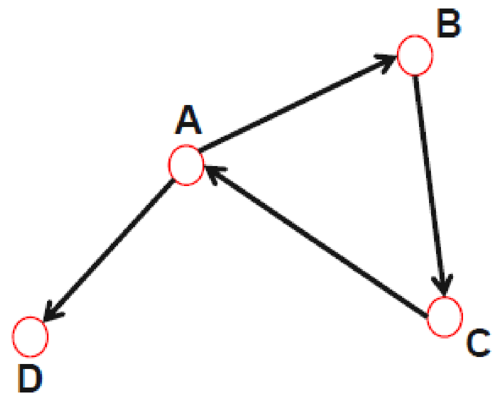
CFC(b)={b, a, e}



Le plus court chemin / La distance



- La *distance (le plus court chemin)* entre deux sommets est définie par le nombre des arêtes au long de plus court chemin qui connecte ces deux sommets. Si les deux sommets sont disconnectés, la distance est infinie. S'ils sont confondus la distance est nulle.



- Dans un graphe orienté chaque chemin doit suivre la direction des arcs. Donc, la distance du sommet A au sommet B (sur le chemin AB) est généralement différente de la distance du sommet B au sommet A (sur le chemin BCA).

Diamètre d'un réseau et distance moyenne

Diamètre d_{max}

Le diamètre d_{max} **est la distance maximale entre n'importe quelle pair de sommets dans le graphe.**

Distance Moyenne

<*d*> pour un graphe connexe est donnée par:

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j} d_{ij}$$

Avec:

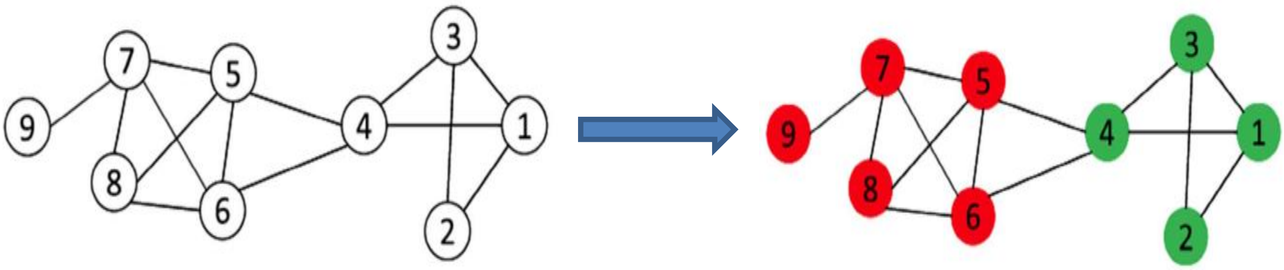
- ***d_{ij}* est la distance du sommet *i* au sommet *j***
- **N est le nombre des sommets du graphe.**

2. Détection d'une Communauté

Une communauté est un ensemble de sommets entre lesquels les interactions sont (relativement) fréquentes.

■ **Les communautés sont aussi appelées des groupes, des segments, ou des modules.**

■ **Trouver une communauté dans un graphe consiste à identifier un ensemble de sommets ayant des interactions entre eux plus qu'avec d'autres sommets qui n'appartiennent pas au même groupe.**

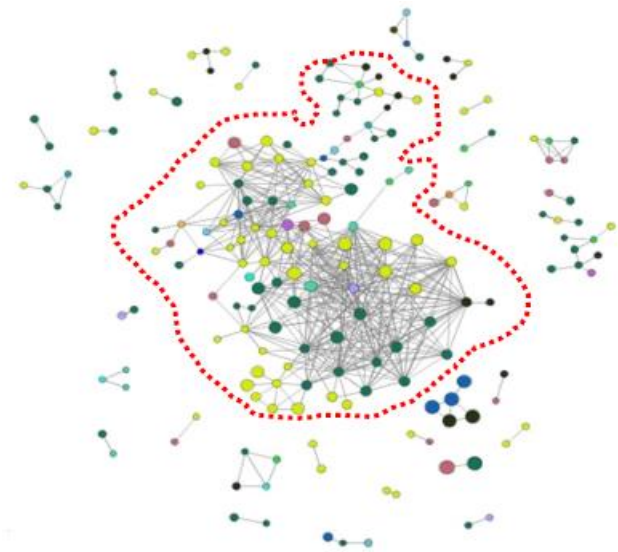


Exemples de Communautés

Composantes Géantes et composantes isolées

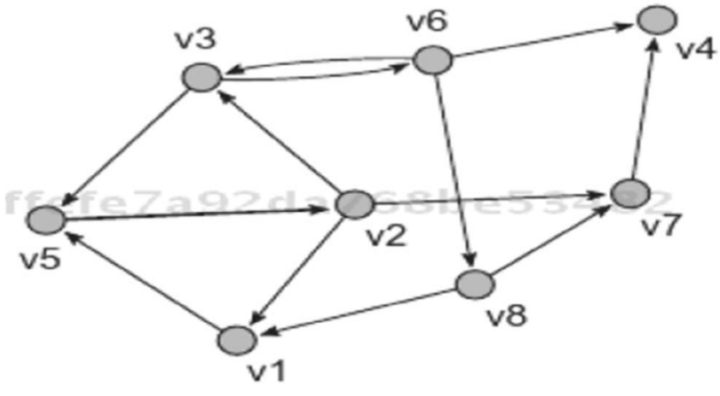
- Si la plus large composante dans un graphe occupe une partie significative de celui-ci, elle est donc appelée une composante géante.

- Les autres petites composantes du même graphe sont appelées composantes isolées.



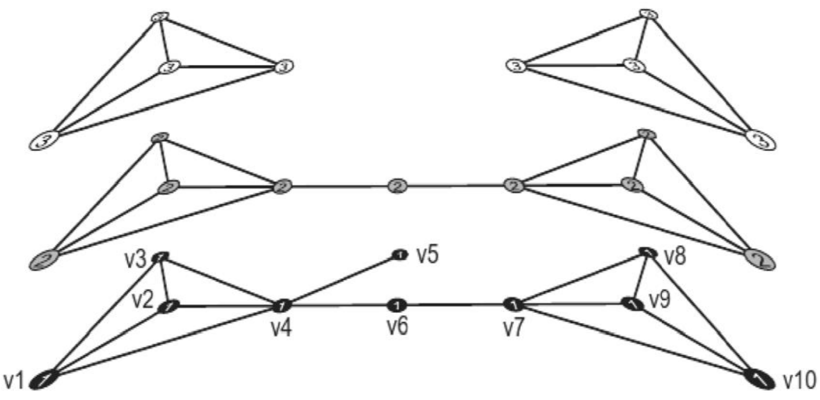
Exercice: Composantes connexes dans un graphe

- *Combien de composantes fortement connexe dans le graphe suivant?*



K-Cores

Un K-Cores est un sous graphe maximal dans lequel chaque sommet possède au moins un degré k dans le graphe.

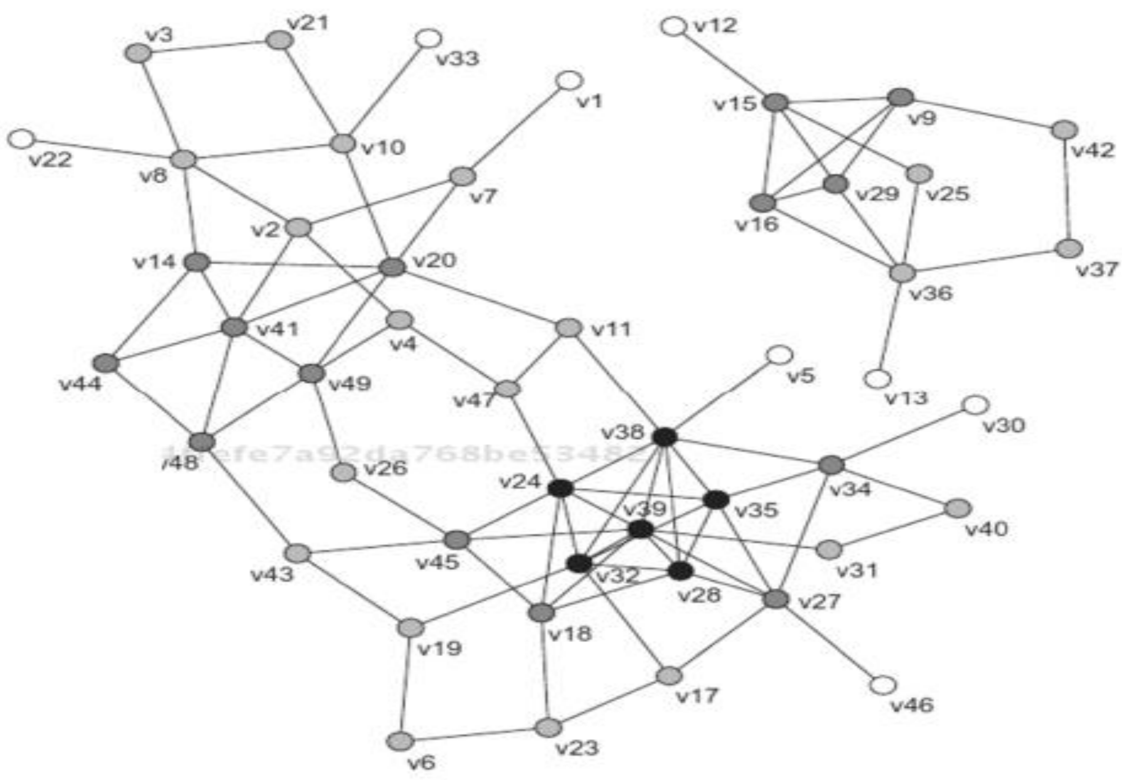


 Un K-Cores n'est pas nécessairement un graphe connexe. Par exemple l'un des 3-cores ci-dessus est constitué de deux parties (deux composantes).

Exercice: K-Cores

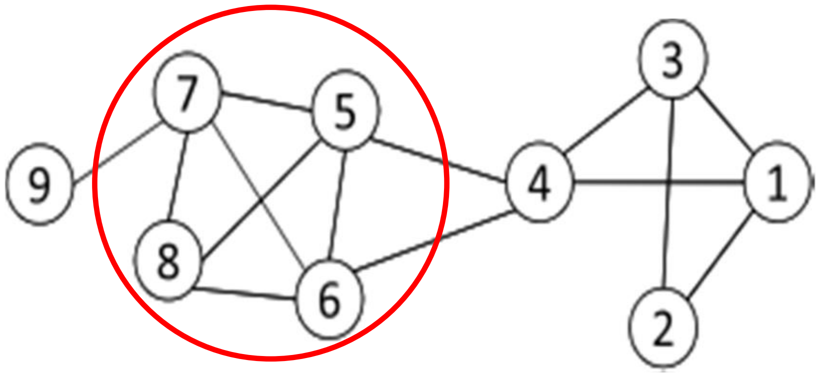
 Compter le nombre de 3-cores dans le graph (les couleurs des sommets indiquent le niveau de k):

Blanc : k=1 (1-core); Gris clair: k=2 (2-cores); gris foncé: k=3 (3-cores) ; noir: k=4 (4-cores)



Cliques et sous graphes complets

Une clique est un sous graphe complet maximal contenant au moins trois (03) sommets.

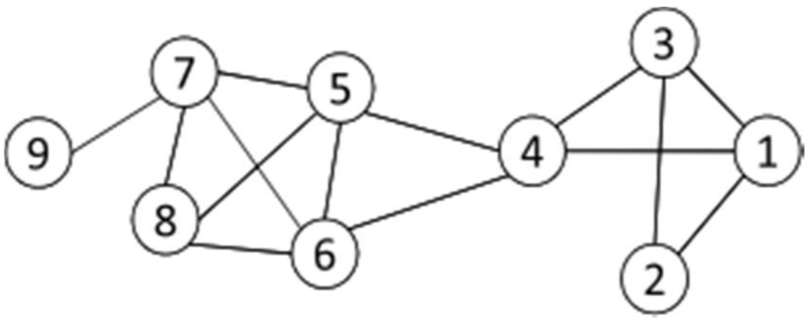


Les sommets 5, 6, 7 et 8 forment une clique

Equivalence Structurelle entre sommets

Deux sommets sont structurellement équivalents s'ils sont connectés aux mêmes ensembles de sommets.

Exemple: les deux sommets 5 et 6



Similarité entre sommets

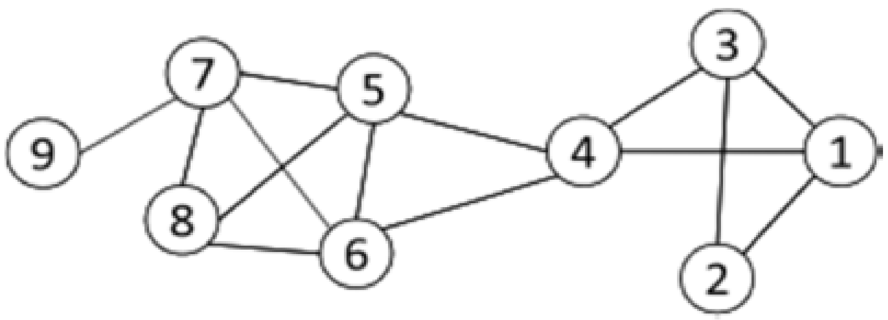
□ Similarité de Jaccard

$$Jaccard(v_i, v_j) = \frac{|N_i \cap N_j|}{|N_i \cup N_j|}$$

□ Similarité Cosine

$$Cosine(v_i, v_j) = \frac{|N_i \cap N_j|}{\sqrt{|N_i| \cdot |N_j|}}$$

Exemple



$$Jaccard(4, 6) = \frac{|\{5\}|}{|\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}|} = \frac{1}{7}$$

$$cosine(4, 6) = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 4}} = \frac{1}{4}$$

Centralité (sommet central)

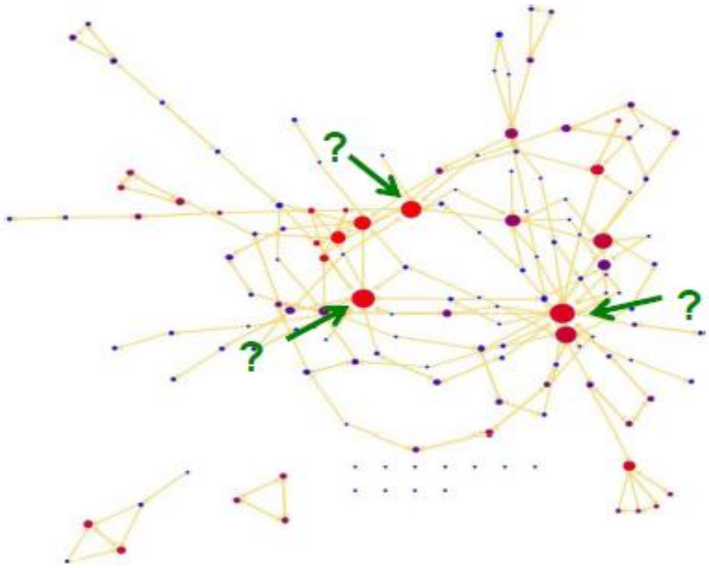
Centralité

- Quels sommets sont plus centraux?
  - Calculés pour des graphes non orientés
- Un sommet central (acteur central) est un sommet impliqué dans plusieurs arêtes.
- La direction des arcs n'est pas considérée.

Concept de centralité

Prestige (sommet prestigieux)

- Un sommet prestigieux (acteur prestigieux) est un sommet qui représente la destination de plusieurs arcs (reçoit des arcs).
- La direction des arcs est considérée dans ce cas.

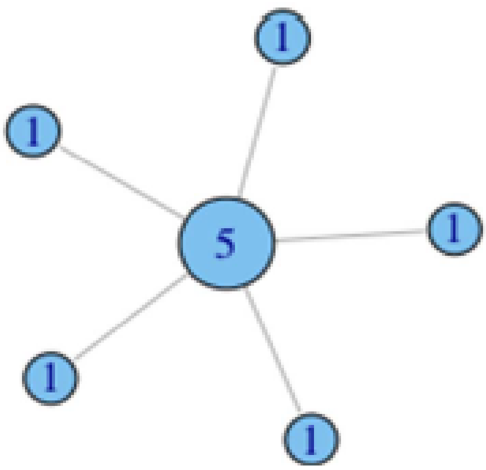


Concept de prestige

Degré de centralité

Idée : Mesure la centralité comme le nombre d'arêtes vers d'autres sommets dans le graphe.

Exemple: ***combien de personnes peuvent être influencées directement par une personne?***



Degré de centralité

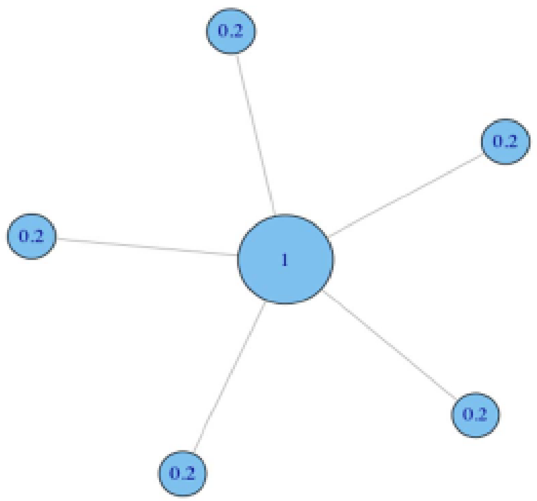
$$C_D(n_i) = d(n_i)$$

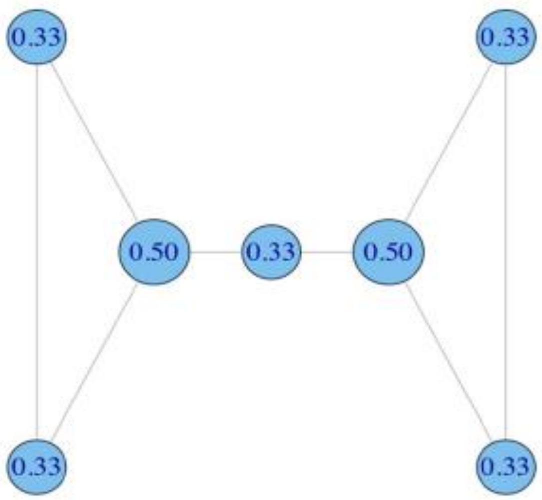
Degré normalisé de centralité

$$C'_D(n_i) = d(n_i) / N\text{-}1$$

- **Le degré divisé par le degré maximal possible, c.à.d, le nombre de sommets – 1**
- **Proportion de tous les sommets qui sont adjacents à n_i**

Example: Degré Normalizé de Centralité C'_D





Centralisation

Combien de variations existe-il dans le score de centralité parmi les sommets ?

Formule Générale de Freeman pour la Centralisation:

Valeur maximale de centralité dans le graphe

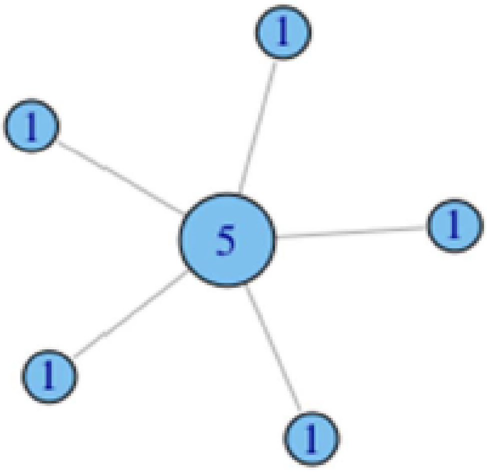
$$C_D = \frac{\sum_{i=1}^{g} \left[C_D(n^*) - C_D(i) \right]}{(N-1)(N-2)}$$

Mmaximum théorique du graphe

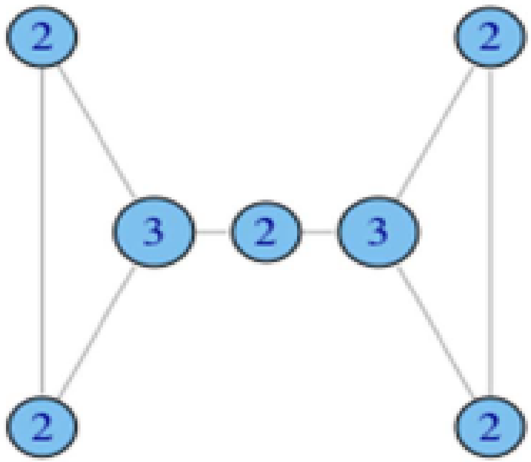
1. Calculer la somme des différences de centralité entre les sommets les plus centraux du graphe et tous les autres sommets.
2. Diviser la valeur résultante en (1) par la somme théorique maximale du graphe.

N.B: Valeur de centralisation $\in$ [0,1]

Example: Degré de centralisation C_D



high



C_D = [(5-1)+(5-1)+(5-1)+(5-1)+(5-1)] /(6-1)(6-2) = 20/20 = 1.0

C_D = [(3-2)+(3-2)+(3-2)+(3-3)+(3-2)+(3-2)] /(7-1)(7-2) = 5/30 = 1/6 ≈ 0.167

C_D =[(2-1)+ (2-2)+ (2-2)+ (2-2)+ (2-1)]/(5-1)*(5-2)
= 2/12 = 1/6 ≈ 0.167

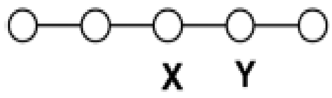
Centralité entre deux sommets/Binaire (Betweenness Centrality)

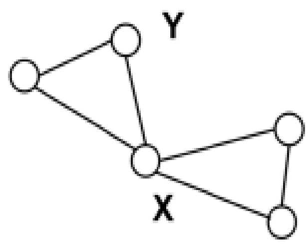
Définition

Les interactions entre deux sommets non-adjacents X et Y peuvent dépendre d'autres sommets du graphe, surtout ceux qui appartiennent aux chemins reliant les deux sommets X et Y.

- **lesquels des deux sommets X ou Y a une valeur élevée de centralité binaire?**

Example 1:

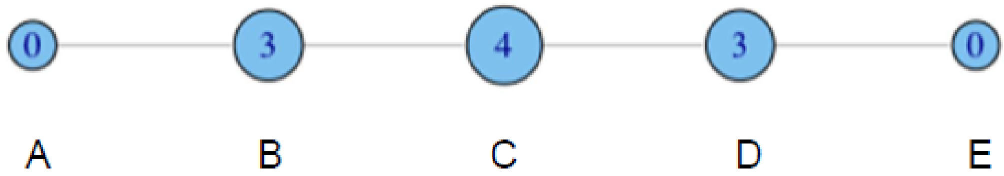




Dans fig 1: X a une valeur élevée de centralité binaire (4) contre Y(3)

Dans fig 2: X a une valeur élevée de centralité binaire (5) contre Y(1)

Example 2:



☐ A est un sommet qui ne relie entre aucuns autres deux sommets dans le graphe.

☐ B relie entre A et 3 autres sommets: C, D, et E

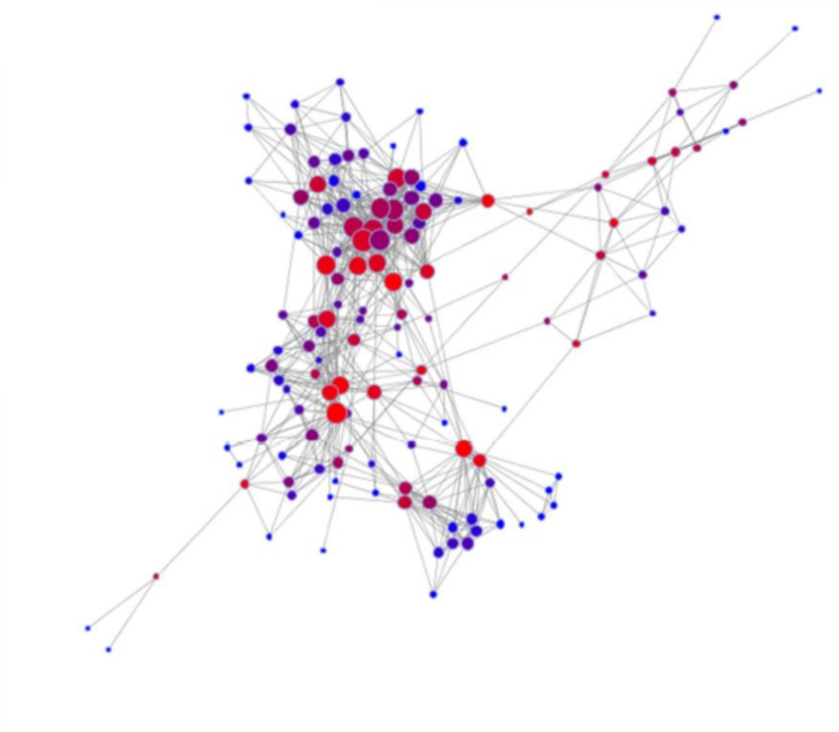
☐ C relie entre 4 pairs de sommets (A, D),(A, E),(B, D), (B, E).

On note ici qu'il n'existe aucun autre chemin alternatif reliant ces pairs de sommets sauf ceux qui passent par le sommet C.

Example 3:

(Degré de centralité/centralité binaire) sur le réseau Facebook

☐ Les sommets sont dimensionnés par **degré de centralité** et colorés par **centralité binaire**



Centralité de proximité

☐ **Cette mesure focalise sur la façon qu'un sommet est proche des autres sommets dans le graphe.**

☐ **Centralité de proximité est basée sur la longueur moyenne du plus court chemin entre un sommet et tous les autre sommets du graphe.**

Centralité de proximité :

$$C_c(i) = \left[\sum_{j=1}^{N} d(i,j) \right]^{-1}$$

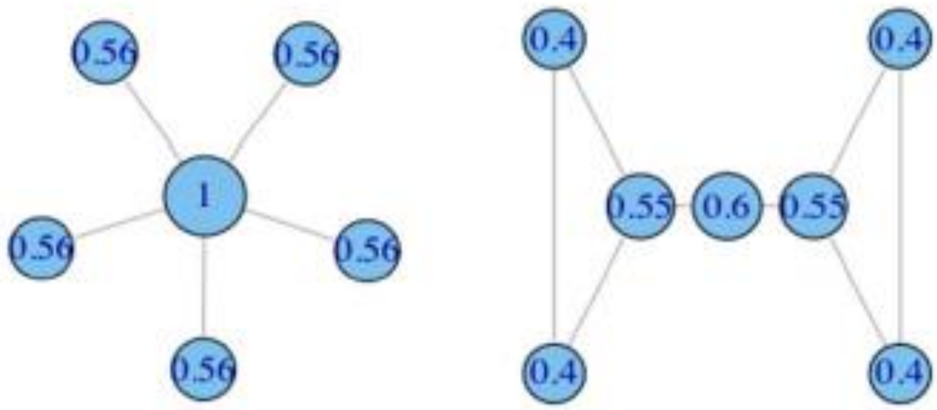
Centralité de proximité normalisée :

$$C_C^{'}(i) = C_C(i)(N-1)$$

Exemple : Centralité de proximité

$$C_c^{'}(A) = \left[\frac{\sum_{j=1}^{N} d(A,j)}{N-1} \right]^{-1} = \left[\frac{1+2+3+4}{4} \right]^{-1} = \left[\frac{10}{4} \right]^{-1} = 0.4$$

Plus d'exemples:



Prestige

Le prestige est une métrique de centralité qui prend en considération la direction des arcs.

Degré de prestige/Popularité

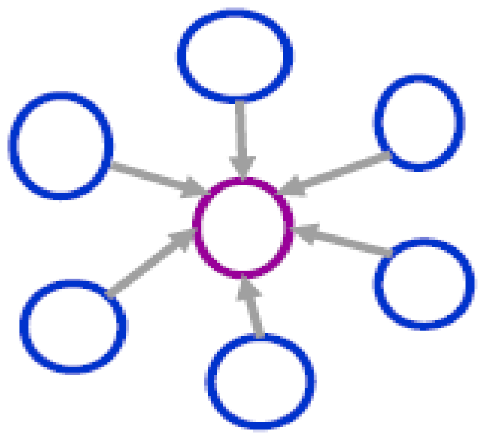
- **le prestige d'un sommet est calculé en fonction du demi-degré intérieur du sommet (in-degree)**

Degré de prestige/Popularité

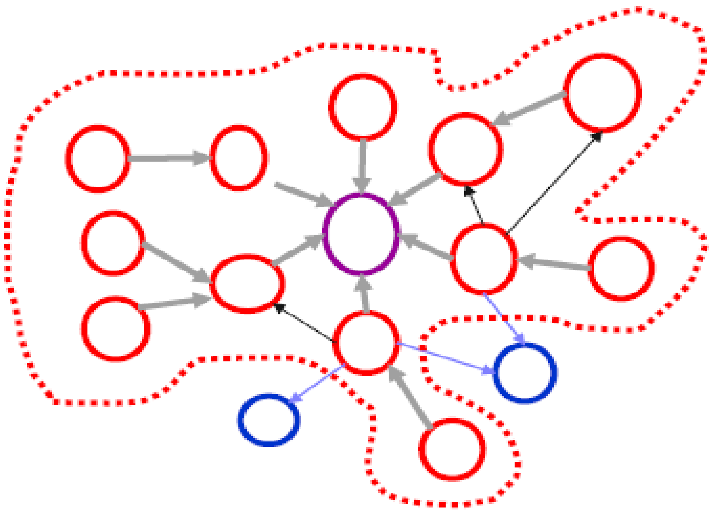
$$P_D(n_i) = d^{in}(n_i)$$

Degré de prestige normalisé

$$P'_D(n_i) = d^{in}(n_i)/(N-1)$$



Domaine d'entrée (d'influence)



■ Le degré de prestige calcule uniquement les acteurs qui sont adjacents ou liés directement à l'acteur ni, mais on peut aussi prendre en considération des sommets qui sont liés indirectement à ni.

■ Le domaine d'entrée d'un sommet dans un graphe orienté est le nombre ou le pourcentage de tous les autres sommets qui sont liés par des Chemins à ce sommet. Il est aussi appelé domaine d'influence.

Rang du Prestige

☐ Une nouvelle métrique qui prend en considération les prestiges des acteurs (sommets) appartenant au même domaine d'influence.

☐ Un sommet sera plus prestigieux s'il a beaucoups d'autres sommets prestigieux appartenant au même domaine d'influence.

$$P_R(i) = \sum_{(j,i)\in E} P_R(j)$$

j: un sommet dans le domaine d'entrée de *i*

$P_R(i)$: Rang du prestige du sommet *i*

$P_R(j)$: prestige du sommet *j*