UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Les Fondements de la théorie des graphes

Chapitre 2: Représentation des graphes

Dr. SAID KADRI

Maître de Conférence

Department d'informatique, Faculté des Mathematiques et de l'Informatique, Université Mohamed Boudiaf de M'sila

E-mail: kadri.said28@gmail.com

Website: https://kadrisaid28.wixsite.com/sgadri

2017 - 2018

Méthodes de représentation des graphes

On distingue 02 classes de méthodes:

1.Méthodes statiques (utilisation des matrices)

- **Matrice d'adjacence (sommets – sommets)**
- **Matrice d'incidence (sommets – arcs)**
- **Liste des arcs (tries – non tries)**
- **Liste des successeurs**
- **Liste des prédécesseurs**
- **Liste linéaire des successeurs**
- **Liste linéaire des successeurs avec EOL**
- **Liste linéaire des successeurs avec BOL**

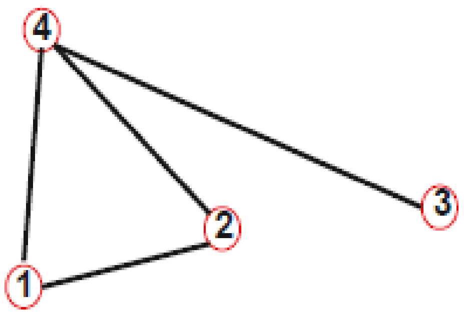
2. Méthodes dynamiques (utilisation des listes chainées)

- **Liste dynamique des sommets**
- **Liste dynamique d'arcs**

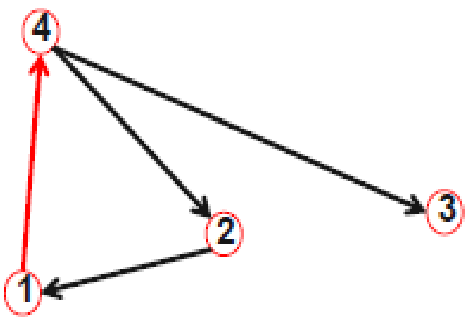
Méthodes statiques

1. Matrice d'adjacence (sommets – sommets)

Graphe G1



Graphe G2



$$\begin{cases} A_{ij} = 1 & s'il\ existe\ un\ lien\ entre\ les\ sommets\ i\ et\ j \\ A_{ij} = 0 & si\ les\ deux\ sommets\ i\ et\ j\ ne\ sont\ pas\ connectés \end{cases}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A(N, N)

A_{14}

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

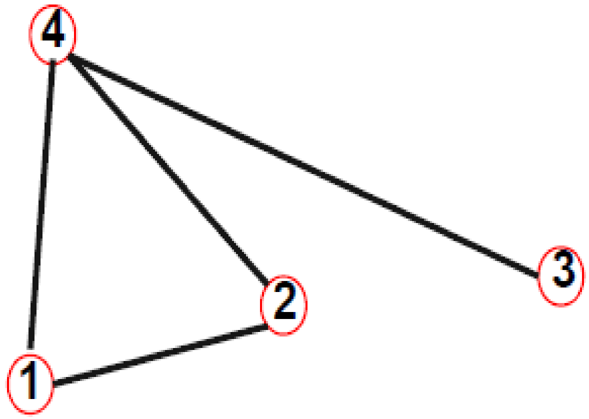
A(N, N)

N.B: Notons que pour un graphe orienté (à droite) la matrice n'est pas symétrique.

Matrice d'adjacence et degrés de sommets

Graphe non orienté

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

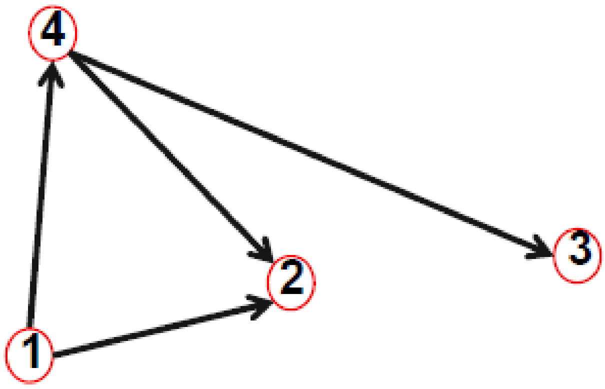


$$\begin{cases} A_{ij} = A_{ji} \\ A_{ii} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{k_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} = k_j = \sum_{i}^{n} A_{ij}}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{N} A_{ij}}$$

Graphe orienté



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_{ij} \neq A_{ji} \\ A_{ii} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{k_i^{ex}} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{A_{ij}} \quad ; \quad \mathbf{k_j^{in}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{A_{ij}}}$$

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{N} k_i^{in} = \sum_{j=1}^{N} k_j^{out} = \sum_{i,j}^{N} A_{ij}}$$

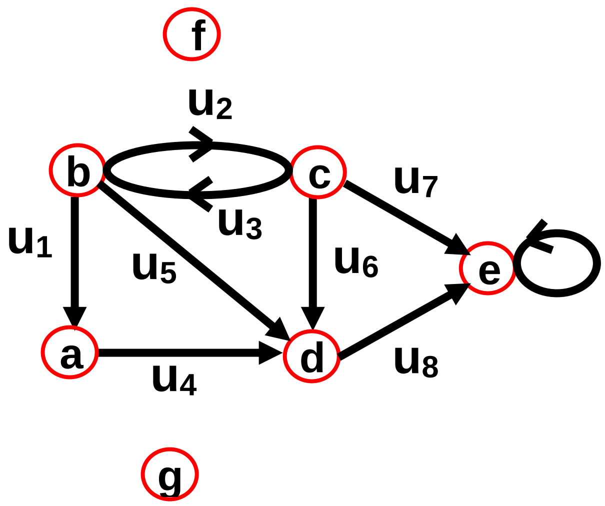
2. Matrice d'incidence (sommets – arcs)

Soit le graphe G(X, U) suivant:

X = {a, b, c, d, e, f, g}

U = {(a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (e, e)}

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\
a & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & +1 & +1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\
d & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\
e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\
f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$



A(N, M)

Remarques:

- **Chaque colonne dans la matrice contient un seul (+1) correspond à l'extrémité initiale de l'arc, et un seul (-1) correspond à son extrémité terminale**
- **Le nombre des (+1) sur la ligne donne le 1/2 degré extérieur du sommet, bien que le nombre des (-1) donne le 1/2 degré intérieur du même sommet.**

3. Liste des arcs triés (selon l'extrémité intial)

U_4	U_1	U_2	U_5	U_3	U_6	U_7	U_8	U_9
a	b	b	b	c	c	c	d	e
d	a	c	d	b	d	e	e	e

f	g	…..

Sommets isolés

A(2, M)/A(3, M)

4. Liste des arcs non triés (pris arbitrairement)

U_4	U_1	U_3	U_2	U_8	U_9	U_5	U_6	U_7
a	b	c	b	d	e	b	c	c
d	a	b	c	e	e	d	d	e

f	g	…..

Sommets isolés

A(2, M)/A(3, M)

5. Liste des successeurs

1	a	d		
2	b	a	c	d
3	c	b	d	e
4	d	e		
5	e	e		
6	f			
7	g			

A(N, d^{+}_{max})

6. Liste des prédécesseurs

1	a	b		
2	b	c		
3	c	b		
4	d	a	b	c
5	e	e		
6	f			
7	g			

$$A(N, d^-_{max})$$

7. Liste linéaire des successeurs

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
d	a	c	d	b	d	e	e	e					

1	1	2	4	5	7	8	8	9	9	nul	nul	nul	nul
a		b		c		d		e		f		g	

Ptr Adr. 1er Suc   Ptr Adr. Der Suc

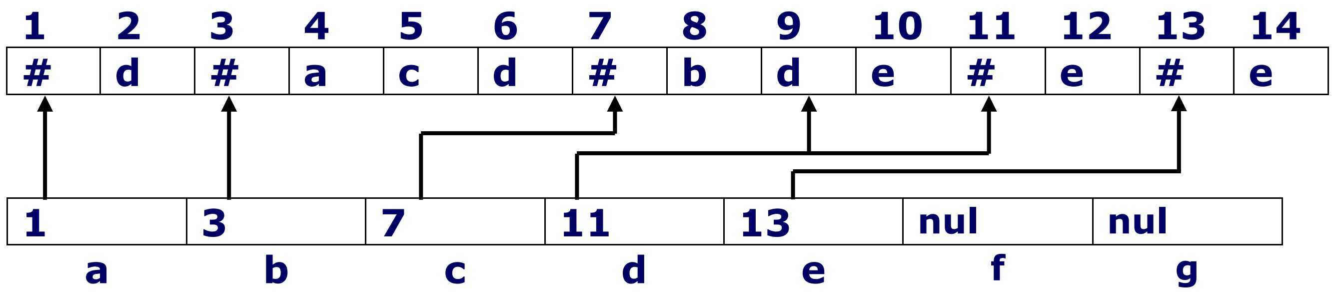
8. Liste linéaire des successeurs avec fin de liste (EOL)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
d	$	a	c	d	$	b	d	e	$	e	$	e	$

Ptr Adr. 1er Suc

1	3	7	11	13	nul	nul
a	b	c	d	e	f	g

9. Liste linéaire des successeurs avec début de liste (BOL)

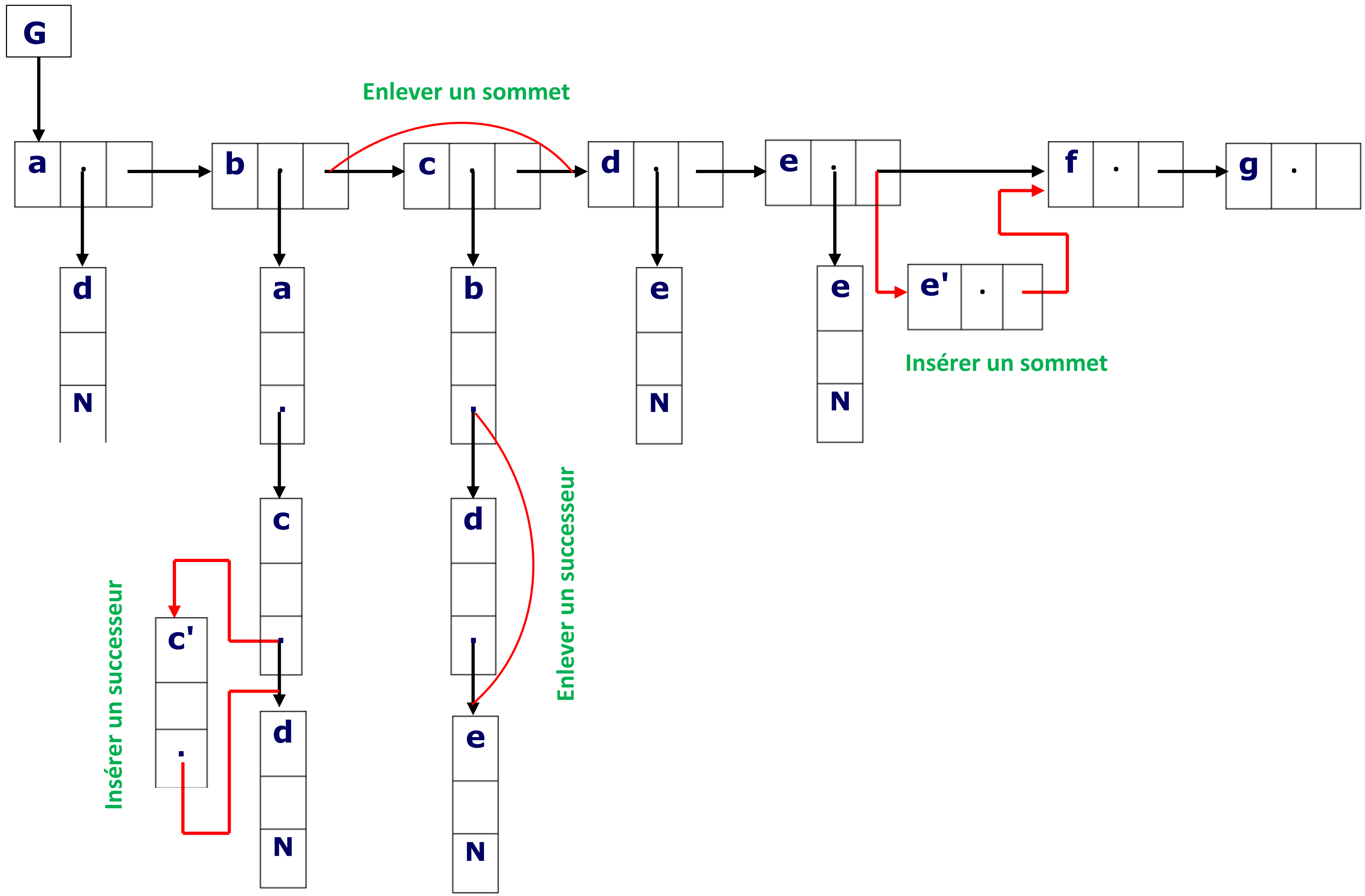


Méthodes dynamiques

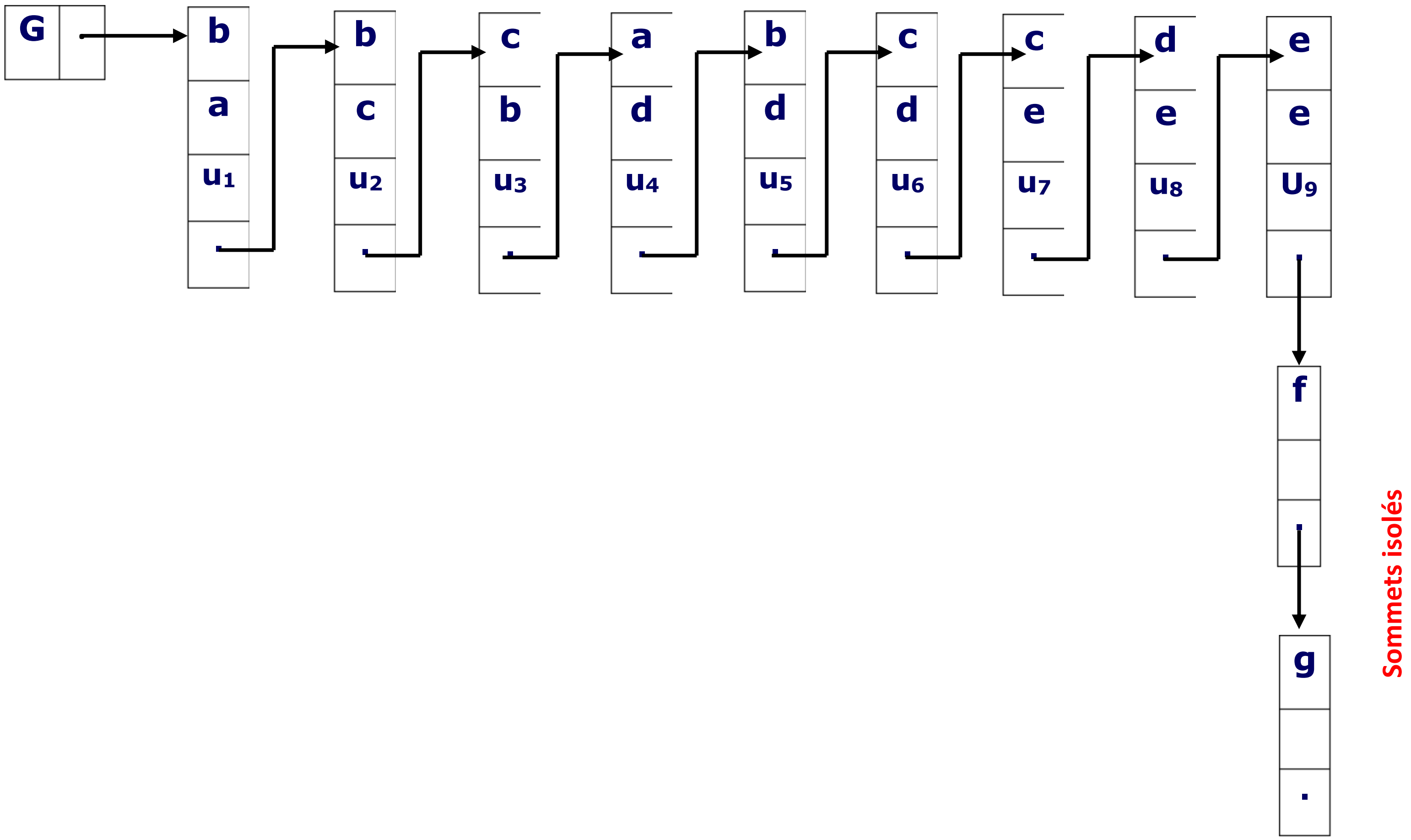
Pour chaque sommet on associe une suite des cases (cases/noeuds), chaque case contient une information élémentaire, telle que:

- **Nom du sommet (a, b, c, 1, 2, …)**
- **Adresse du 1^{ier} successeur**
- **Adresse du D^{ier} successeur**
- **Nombre de successeurs**
- **Valeur de l'arc.**
- **Autres**

1. Liste dynamique des sommets

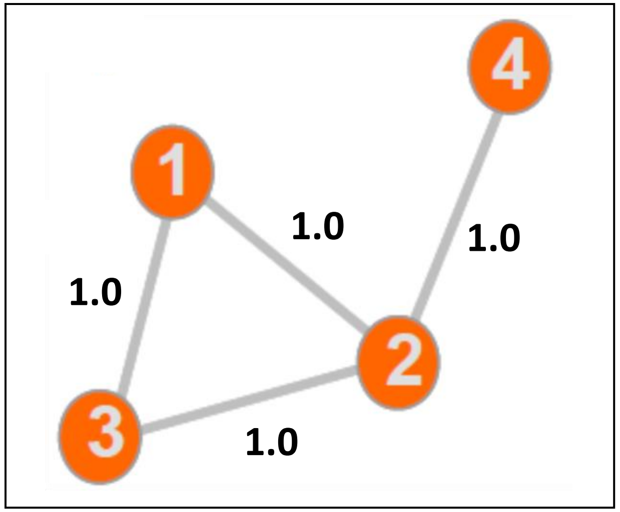


2. Liste dynamique des arcs



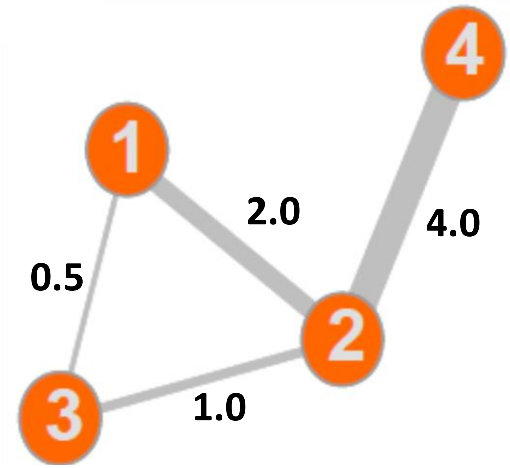
Méthodes pour représenter des graphes particuliers

1. Graphe non valué/Simple (non orienté)



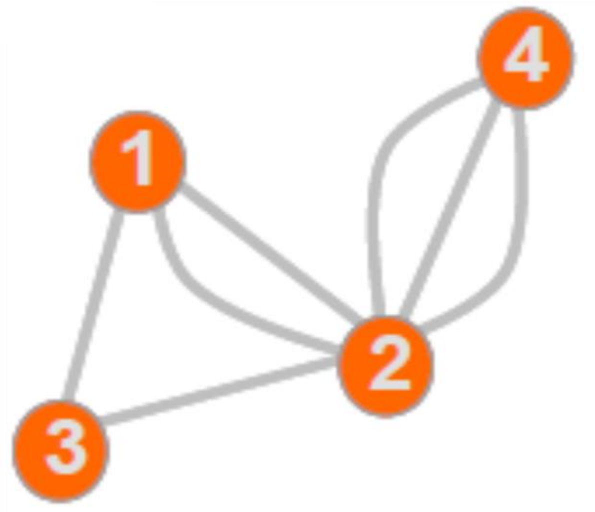
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Graphe valué/Simple (non orienté)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

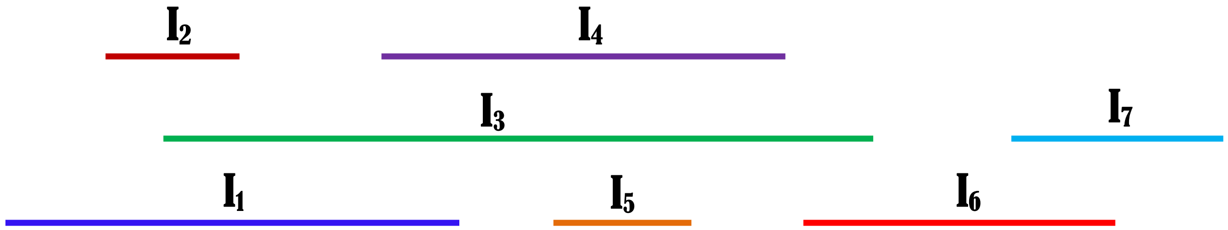
3. Multigraphe (non orienté)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphes d'intervalles

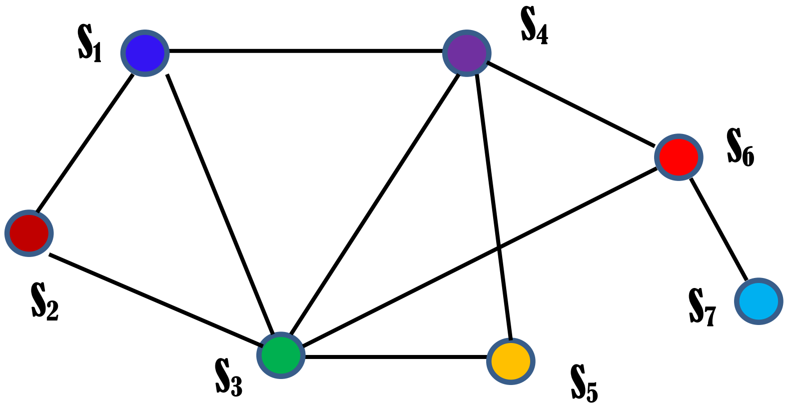
Soient les intervalles de la droite réelle I_1, I_2, I_3, …, I_n représentés comme suit:



On construit un graphe non orienté à partir des intervalles I_1, I_2, I_3, …, I_n ou les sommets de G sont numérotés comme suit: S_1, S_2, S_3, …, S_n.

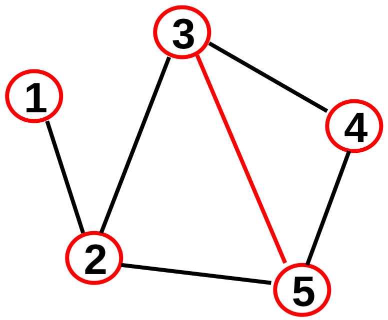
Dans le graphe G, il existe une arête entre les sommets S_i et S_j ($i \neq j$) si seulement si $I_i \cap I_j \neq \phi$

c.à.d, deux sommets sont reliés si les deux intervalles associés se chevauchent.

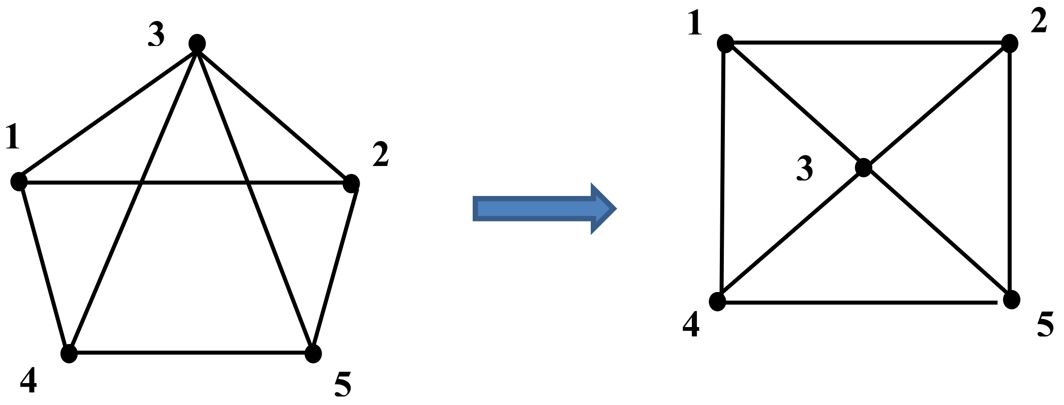


Graphes Triangulés

Un graphe est triangulé si tous ses cycles contenants plus de 3 sommets contiennent au moins une corde (arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle).

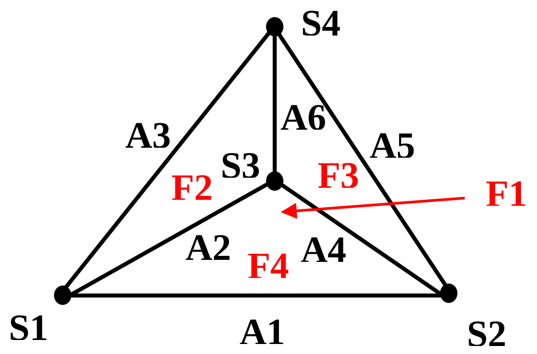


Graphes planaires



Formule d'Euler pour un graphe planaire

$$S - A + F = 2$$



S: nb.sommets

A: nb.arêtes

F: nb.faces

Graphes euleriens et graphes hamiltoniens

Théorème 1:

- **Un graphe non orienté connexe possède une chaine eulerienne si seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.**
- **Il admet un cycle eulerien si seulement si tous ses sommets ont un degré pair.**

  Condition nécessaire :

  - **Pour chaque sommet x, d-(x) = d+(x) ==> d(x) est pair**

Chemins et circuits euleriens

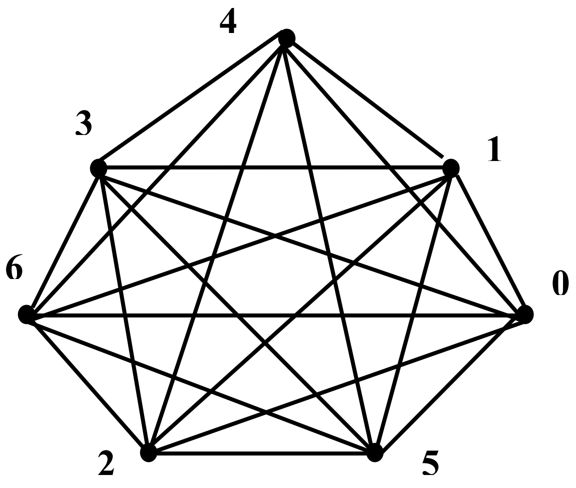
Théorème 2:

- **G(X, U) un graphe orienté connexe admet un chemin eulerien (mais pas un circuit eulerien) si seulement si:**

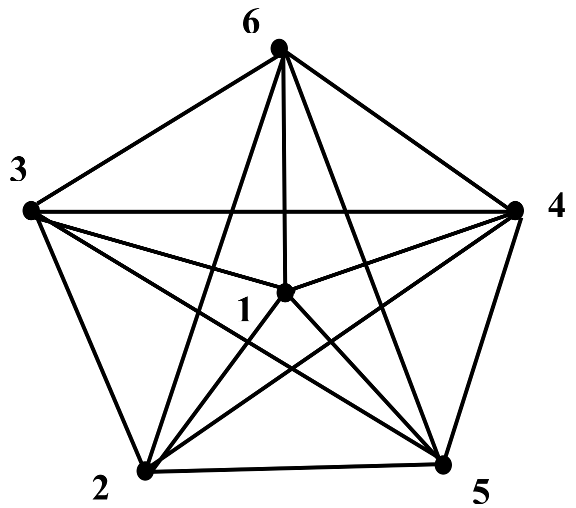
∀x∈G (sauf a et b) $\begin{cases} d^{-}(x) = d^{+}(x) \\ d^{-}(a) = d^{+}(a) - 1 \ ; \ d^{-}(b) = d^{+}(b) + 1 \end{cases}$

- **G admet un circuit eulerien si seulement si: $\forall x \in G \quad d^{-}(x) = d^{+}(x)$**
- **Un graphe simple connexe, G(X, U) est eulerien si seulement si tous ses sommets sont de degré pair ($\forall x \in X$, d(x) est pair)**

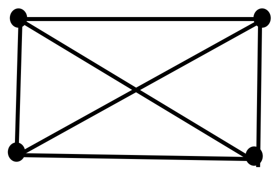
Exemples



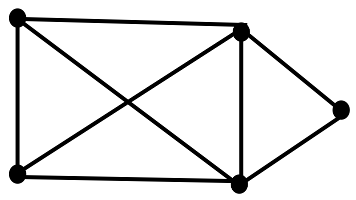
$\forall x \in X$, d(x) = 6 pair
G est Eulerien



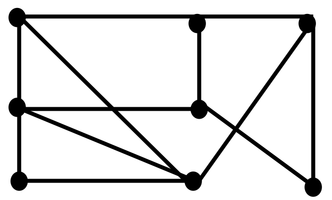
$\forall x \in X$, d(x) = 5 impair
G n'est pas Eulerien



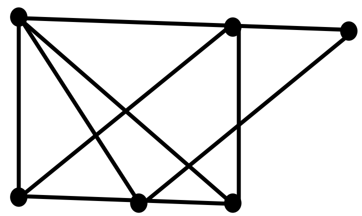
G n'est pas Eulerien



G est Eulerien

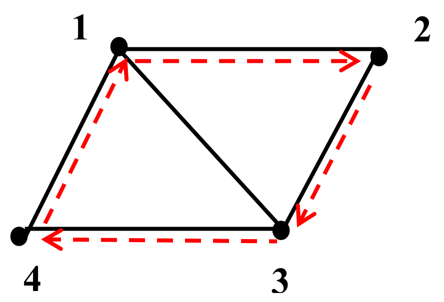


G n'est pas Eulerien



G est Eulerien

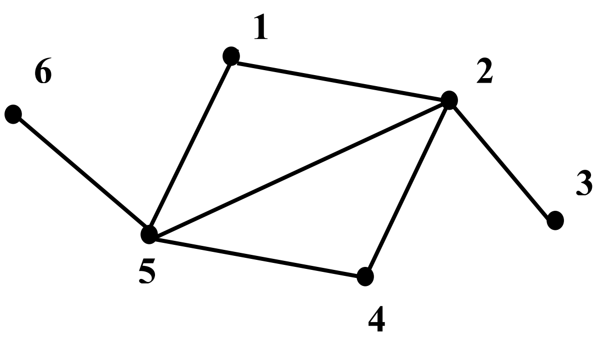
Cycles hamiltoniens



∃ un cycle hamiltonien

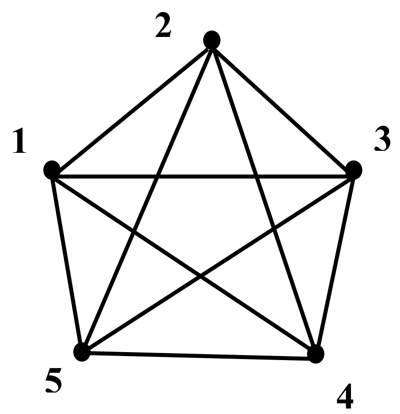
Remarque

- **Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien**

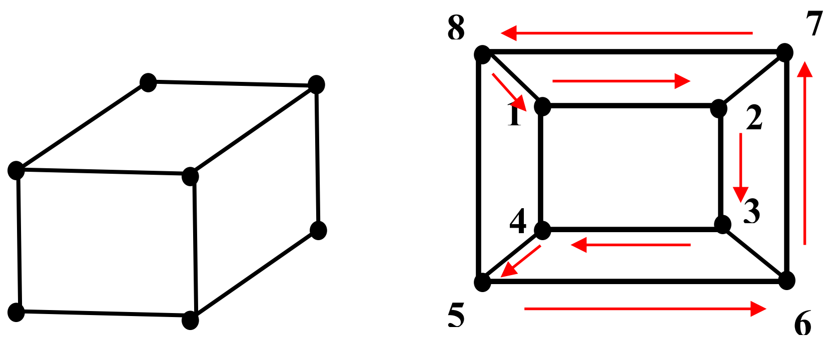


G n'est pas hamiltonien

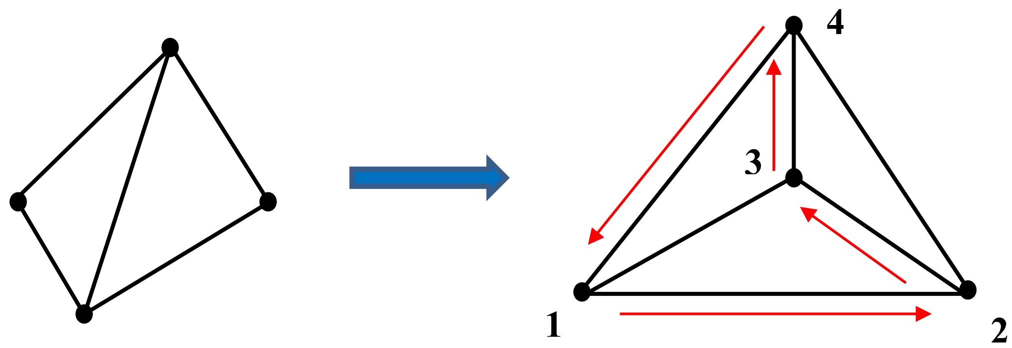
- **Les graphes complets k_n sont hamiltoniens si n > 3**



G est hamiltonien (complet, k4)



G contient un cycle hamiltonien



Graphe de type k3 (pyramide) **G est hamiltonien (complet, k3)**