

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Les Fondements de la théorie des graphes

Chapitre 4: Couplages et problème d'affectation

Dr. SAID KADRI

Maître de Conférence

Department d'informatique, Faculté des Mathématiques et de l'Informatique, Université

Mohamed Boudiaf de M'sila

E-mail: kadri.said28@gmail.com

Website: <https://kadrisaid28.wixsite.com/sgadri>

2017 - 2018

Couplages dans les graphes

Définition d'un couplage

Soit $G(X, U)$ un graphe simple non orienté.

Un couplage C du graphe G est un sous graphe partiel de G , ou un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. (sans extrémités communes)

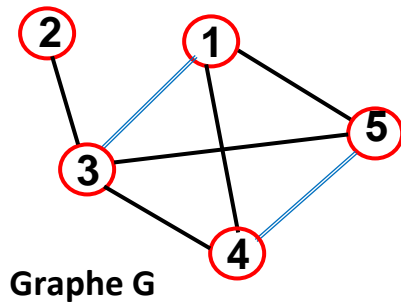
Intérêt du couplage

- Permet de résoudre des problèmes d'affectation.
- Utilisable pour la résolution d'une large classe de problèmes en programmation linéaire des nombres entiers.

Propriétés d'un couplage

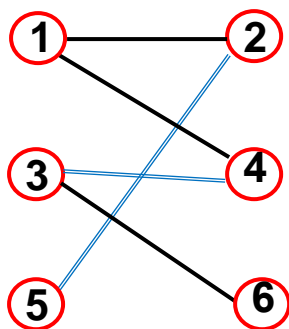
- Le cardinal du couplage C , et on note $|C|$ est le nombre de ses arêtes.
- Un sommet $s_i \in X$ est dit saturé par le couplage C si s_i est l'extrémité d'une arête de C . dans le cas contraire, s_i est dit insaturé.
- Un couplage maximum est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes (de cardinalité maximale $|C| = \max$).

- Dans un graphe, on peut trouver plusieurs couplages maximum.

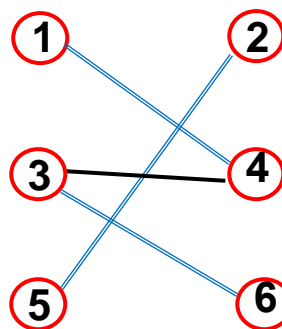


- En bleu, un couplage maximum de G de cardinalité $|C|=2$
- Les sommets 1, 3, 4, 5 sont des sommets saturés.
- Un couplage parfait est un couplage où chaque sommet du graphe est saturé.

Exemple:



Un couplage

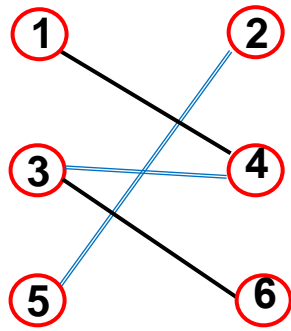


Un couplage maximum et parfait

Définition d'une chaîne alternée

- Soit $C \subseteq U$ un couplage de $G(X, U)$, on appelle une chaîne alternée relative à C, une chaîne élémentaire de G dont les arêtes appartiennent à C et hors C (à $U-C$).
- Une chaîne alternée est dite augmentante ou améliorante, si elle relie deux sommets insaturés.

Exemple:

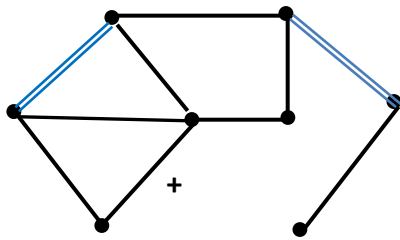


Un couplage

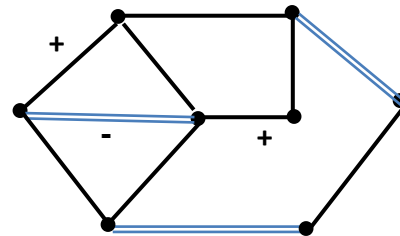
Par exemple la chaîne $c=(1, 4, 3, 6)$ est une chaîne augmentante.

On peut dire alors, qu'un couplage C est maximum si et seulement s'il n'existe aucune chaîne augmentante relative à C .

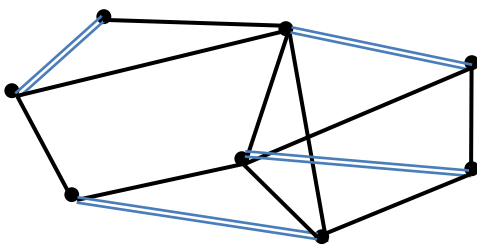
Exemples:



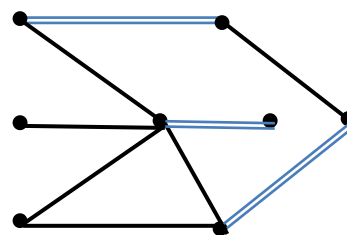
Un couplage non maximal



Un couplage maximal
non maximum



Un couplage parfait



Un couplage maximum
non parfait

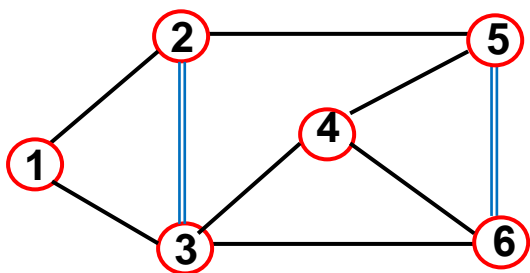
Transfert de couplage le long d'une chaîne alternée

Etant donné un couplage $C \subset U$, et soit L une chaîne alternée dont chaque extrémité est un sommet insaturé (et/ou) telle que l'unique arête de C qui lui est incidente soit dans la chaîne L .

Alors le couplage C' obtenu en échangeant le rôle des arêtes de C et de $(U-C)$ le long de la chaîne L est encore un couplage de G . Cette opération qui fait passer du couplage C au couplage C' est appelée transfert le long de la chaîne alternée L . Cette opération augmente la cardinalité du couplage d'une unité.

Exemple:

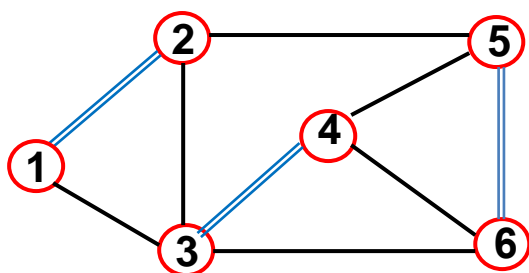
Soit le graphe $G(X, U)$ suivant:



- $C = \{(2, 3), (5, 6)\}$ est un couplage de cardinalité égale à 2.
- La chaîne $L = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ ou $L = \{1, 2, 3, 4\}$ est une chaîne alternée dont les extrémités 1 et 4 sont des

sommets insaturés \rightarrow c'est une chaîne alternée augmentante.

- Un transfert le long de cette chaîne produit le nouveau couplage $C'=\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ de cardinalité égale à 3.



Remarque:

Le couplage C' est un couplage maximum, car pour un graphe G d'ordre n la cardinalité d'un couplage maximal est à la partie entière de $(n/2)$

Définition d'un couplage maximal

Un couplage C est maximal si et seulement si il n'existe pas de chaîne alternée augmentante relative à C .

Construction d'un couplage maximal

Pour rechercher un couplage maximal, il suffit de trouver une chaîne alternée augmentante (si elle existe) relative à un couplage $C \subset U$ quelconque, pour ce fait on suit la procédure suivante:

1. Initializer $C = \emptyset$
2. Trouver une chaîne améliorante c_a de C , effectuer le transfert le long de cette chaîne et remplacer le couplage C par le nouveau couplage C' ainsi obtenu (avec $\text{card}(C') = \text{card}(C) + 1$).
3. Jusqu'à ce qu'il ne soit pas possible de trouver une nouvelle chaîne augmentante, et alors $k^{(i)}$ est un couplage maximal.

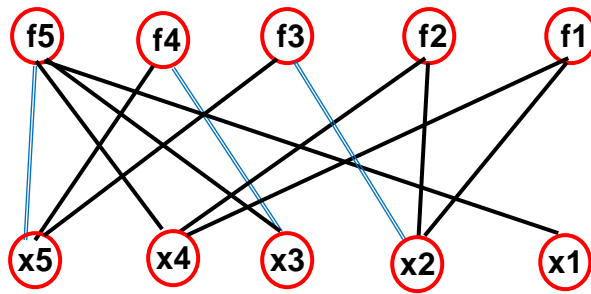
Une méthode simple pour trouver une chaîne alternée augmentante pour un couplage donné.

1. On fixe sur le graphe une origine x_0 pour toutes les chaînes alternées.
2. On construit l'arbre $T(X, U')$ qui est un sous graphe partiel connexe et sans cycles de G .
3. Pour tout $x_i \in X$, la chaîne unique $c_t(x_0 x_i)$ de l'arbre T est une chaîne alternée.

Construction d'un arbre alternée T_{alt}

1. On choisit comme racine de l'arbre T_{alt} (i.e., niveau N_0) un sommet insaturé x_0 ($x_0 \notin C$)
2. Au niveau i impair (N_1, N_3, N_5, \dots), on insère dans l'arbre T_{alt} un sommet adjacent à l'un des sommets insérés au niveau $(i-1)$ par le biais d'une arête n'appartenant pas au couplage C , ainsi que cette arête.
3. Au niveau i pair (N_2, N_4, N_6, \dots), on insère dans l'arbre T_{alt} un sommet adjacent à l'un des sommets insérés au niveau $(i-1)$ par le biais d'une arête appartenant au couplage C , ainsi que cette arête.
4. On continue à construire progressivement cet arbre jusqu'à l'insertion - à un niveau impair - d'un sommet insaturé ou bien jusqu'à ce que l'on puisse plus insérer de sommet.
5. S'il existe une chaîne alternée augmentante (améliorante) du couplage courant C , on finit nécessairement par insérer un sommet insaturé s . la chaîne reliant s à la racine de l'arbre T_{alt} est alors une chaîne alternée augmentante (améliorante).

Exemple

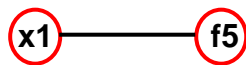


$$C = \{(f_5, x_5), (f_4, x_3), (f_3, x_2)\}, \quad |C| = 3$$

1. On choisit le sommet insaturé x_1 comme racine de l'arbre T_{alt} (soit $x_1, x_1 \notin C$) (le niveau N_0)



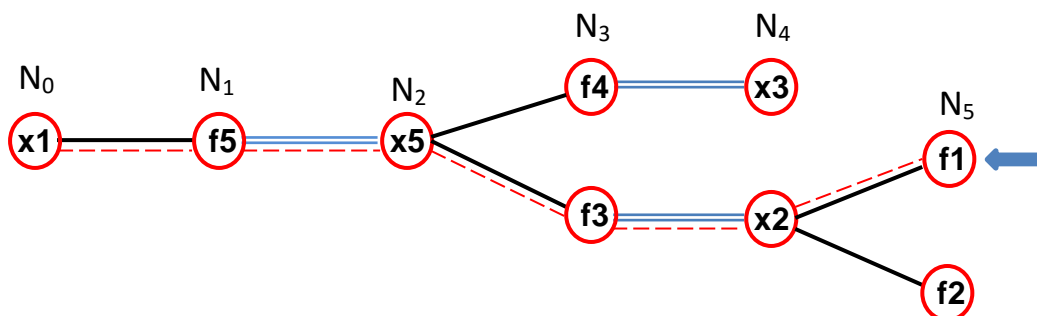
2. Dans le niveau impair N_1 , on insère dans l'arbre T_{alt} un sommet adjacent à l'un des sommets déjà insérés (ici x_1) au niveau $(i-1)$ (c.à.d N_0) par le biais d'une arête $A_1 \notin C$, ainsi que cette arête (on prend ici l'arête $A_1 = (x_1, f_5)$)



3. Dans le niveau pair N_2 , on insère dans l'arbre T_{alt} un sommet adjacent à l'un des sommets déjà insérés (x_1, f_5) au niveau N_1 , par le biais d'une arête $A_2 \in C$, ainsi que cette arête (soit ici l'arête $A_2 = (f_5, x_5)$ qui est la seule possibilité)



4. On continue de la même manière à construire progressivement l'arbre T_{alt} d'une façon alternée, c.à.d, insérer une arête $A_i \notin C$ dans un niveau impair, et une arête $A_i \in C$ dans un niveau pair, jusqu'à l'insertion d'un sommet insaturé à un niveau impair ou jusqu'à ce que l'on puisse plus insérer un sommet.



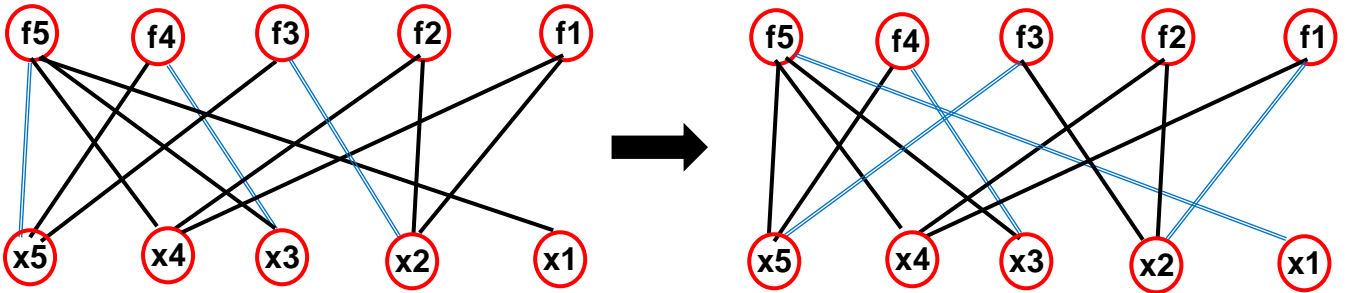
On constate que pour le niveau N_6 , on ne peut pas trouver une arête $A_i \in C$ à insérer, soit pour f_1 ou f_2 .

====> Donc on s'arrête au niveau N_5 , et on constate aussi que les sommets f_1, f_2 sont deux sommets insaturés.

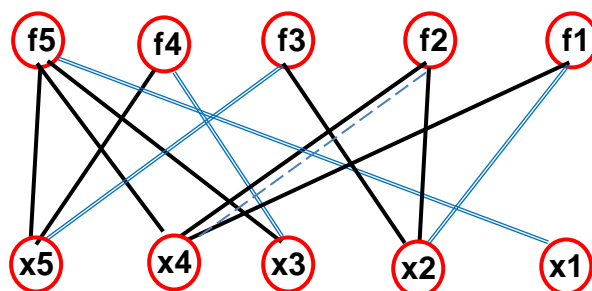
====> Selon (5), il existe deux (02) chaînes alternées augmentantes c_a, c_b (parce qu'on a fini par 02 sommets insaturés f_1, f_2).

- La chaîne augmentante c_a relie f_1 à la racine x_1 de l'arbre T_{alt} .
- La chaîne augmentante c_b relie f_2 à la racine x_1 de l'arbre T_{alt} .

On améliore donc le couplage suivant c_a ou c_b en faisant rentrer dans le couplage C les arêtes qui n'appartiennent pas déjà à C et sortir celle qui appartient à C (sauf celles qui n'appartiennent pas à c_a ou c_b on les gardes)



- Si on suit c_b , on remplace dans C' l'arête (f_1, x_2) par l'arête (f_2, x_2) .
- Et pour maximiser ce couplage, il suffit d'ajouter l'arête (f_2, x_4) au couplage C' pour obtenir un couplage C'' maximum.



- C'' est aussi parfait, car tous les sommets sont saturés.

Problème d'affectation

Exposition du problème

Etant donné n tâches $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ à réaliser sur n machines M_1, M_2, \dots, M_n .

Et soit C_{ij} le coût de réalisation de la tâche t_i sur la machine m_j . ($C_{ij} = \infty$ la tâche t_i ne peut pas être effectuée sur la machine m_j)

Le problème d'affectation consiste à chercher une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ conduisant à un coût total $c_{tot} = \sum_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}$ qui doit être minimal sur l'ensemble de toutes les $n!$ permutations possible.

Le problème d'affectation peut être considéré comme un cas particulier :

- D'un problème de transport (sans capacité).
- D'un problème de couplage parfait de poids minimum.

Des directives pour la réalisation du problème.

- On ne doit pas changer la(es) solutions optimale(s) en augmentant ou en diminuant tous les éléments d'une même ligne (ou d'une même colonne) la matrice des C_{ij} par une même valeur v .

- Si on arrive à faire apparaître par ces transformations suffisamment de 0 dans la matrice des C_{ij} (mais pas de coût négatifs), et qu'il existe n zéros indépendants (un seul 0 dans chaque ligne et chaque colonne), on aura trouvé une affectation optimale.

Algorithme Hangrois.

Soit le problème d'affectation envisagé par la matrice des C_{ij} ci-dessous:

	1	2	3	4	5
A	7	3	5	7	10
B	6	∞	∞	8	7
C	6	5	1	5	∞
D	11	4	∞	11	15
E	∞	4	5	2	10

L'algorithme hangrois est un algorithme itératif comportant trois phases:

Phase 1: Obtention des valeurs nulles.

A tous les éléments de chacune des colonnes, on enlève le plus petit élément de cette colonne, puis dans la matrice ainsi obtenue, on effectue la même opération sur toutes les lignes. On obtient une nouvelle matrice C_{ij} ayant au moins un zéro par ligne et par colonne.

	1	2	3	4	5
A	7	3	5	7	10
B	6	∞	∞	8	7
C	6	5	1	5	∞
D	11	4	∞	11	15
E	∞	4	5	2	10



	1	2	3	4	5
A	1	0	4	5	3
B	0	∞	∞	6	0
C	0	2	0	3	∞
D	5	1	∞	9	8
E	∞	1	4	0	3

-6 -3 -1 -2 -7

	1	2	3	4	5
A	1	0	4	5	3
B	0	∞	∞	6	0
C	0	2	0	3	∞
D	4	0	∞	8	7
E	∞	1	4	0	3

-0
-0
-0
-1
-0

Phase 2: Recherche de maximum d'affectations possibles

A partir de la matrice des C_{ij} , on cherche une solution à coût nul (un seul zéro dans chaque ligne et dans chaque colonne). Si c'est le cas, on a la solution optimale cherchée, sinon, on effectue les traitements suivants :

- a. On prend la ligne ayant un nombre maximal de 0.
- b. On encadre l'un des zéros de cette ligne.
- c. On barre les zéros qui se trouvent sur la même ligne ou la même colonne du zéro encadré.
- d. On répète les mêmes tâches précédentes pour toutes les lignes.

	1	2	3	4	5
A	1	0	4	5	3
B	0	∞	∞	6	0
C	0	2	0	3	∞
D	4	0	∞	8	7
E	∞	1	4	0	3

Phase 3: Détermination des affectations intéressantes

Pour déterminer ces affectations, on procède comme suit:

- On marque par un (*) toutes les lignes qui ne contiennent aucun zéro encadré.
- On marque par un (*) les colonnes ayant un ou plusieurs 0 barrés dans une ligne marquée.
- On marque par un (*) les lignes ayant un zéro encadré dans une colonne marquée.
- On répète les tâches précédentes jusqu'à ce que l'on puisse plus faire de nouveaux marquages.

	1	2	3	4	5	
A	1	0	4	5	3	* Voir (c)
B	0	∞	∞	6	0	
C	0	2	0	3	∞	
D	4	0	∞	8	7	* Voir (a)
E	∞	1	4	0	3	

*
Voir (b)

- Les affectations intéressantes à considérer (sur l'exemple précédent) sont celles issues des sommets correspondant aux lignes marquées ==> on barre donc les lignes non marquées.
- Les sommets correspondants aux colonnes marquées ne sont pas intéressants, car ils peuvent être réaffectés;

On barre donc aussi les colonnes marquées.

	1	2	3	4	5	
A	1	0	4	5	3	*
B	0	∞	∞	6	4	
C	0	2	0	3	∞	
D	4	1	∞	8	7	*
E	∞	1	4	0	3	

*

- Dans le nouveau tableau obtenu après réduction (cases non barrées), on recherche l'élément le plus petit (qui doit être nécessairement $\neq 0$) \rightarrow dans notre exemple c'est 1
- On retranche sa valeur aux colonnes non barrées, et on l'ajoute aux lignes barrées, on obtient :

	1	2	3	4	5
A	0	0	3	4	2
B	-1	∞	∞	5	-1
C	-1	2	-1	2	∞
D	3	0	∞	7	6
E	∞	1	3	-1	2

-1 -1 -1 -1

	1	2	3	4	5	
A	0	0	3	4	2	
B	0	∞	∞	6	0	+1
C	0	3	0	3	∞	+1
D	3	0	∞	7	6	
E	∞	2	4	0	3	+1

Retour à la phase 2 (Recherche du maximum d'affectations possibles) et effectuer les mêmes tâches de cette phase vues précédemment. Lorsqu'une solution optimale est

obtenue (un zéro par ligne et par colonne) on s'arrête, sinon on recommence les phases précédentes de l'algorithme.

	1	2	3	4	5
A	0	4	3	4	2
B	4	∞	∞	6	0
C	4	3	0	3	∞
D	3	0	∞	7	6
E	∞	2	4	0	3



Solution optimale

La solution optimale est obtenue grace aux éléments:

$$C_{A1} = C_{B5} = C_{C3} = C_{D2} = C_{E4} = 0$$

Et la permutation possible est:

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Positions des zéros encadrés

Solution optimale

$$S = C_{A1} + C_{B5} + C_{C3} + C_{D2} + C_{E4}$$

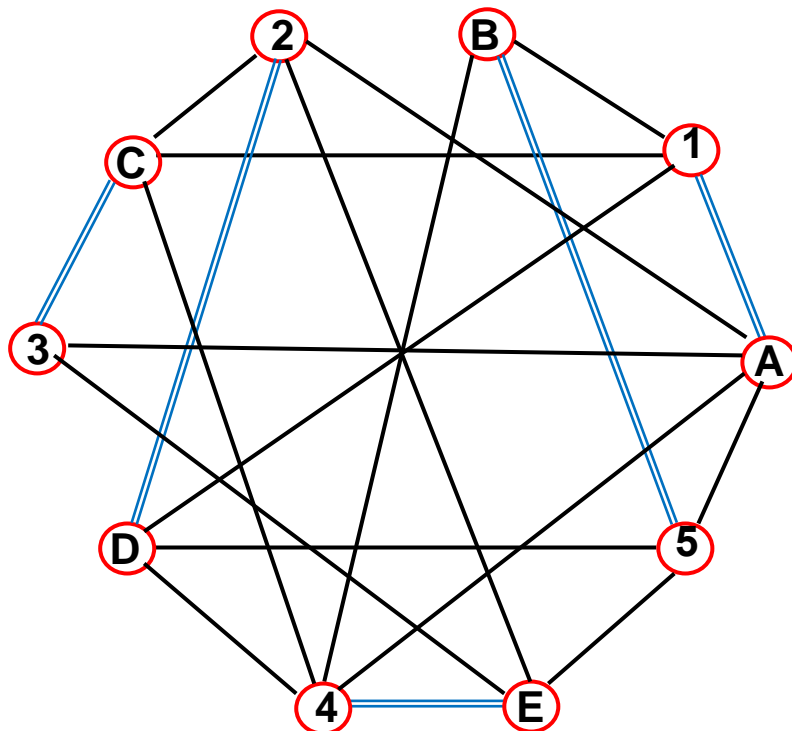
Et si on revient aux données initiale, on obtient:

	1	2	3	4	5
A	7	3	5	7	10
B	6	∞	∞	8	7
C	6	5	1	5	∞
D	11	4	∞	11	15
E	∞	4	5	2	10

$$C_{A1} = 7; C_{B5} = 7; C_{C3} = 1; C_{D2} = 4; C_{E4} = 2$$

→ $S = 21$

Le graphe suivant envisage le couplage optimal obtenu



Affectation optimale

Hypergraphes: extensions des graphes

- Les hypergraphes sont des objets mathématiques généralisant la notion de graphe. Ils ont été nommés ainsi par Claude Berge dans les années 1960.
- Les hypergraphes généralisent la notion de graphe non orienté dans le sens où les arêtes ne relient plus un ou deux sommets, mais un nombre quelconque de sommets.
- Certains théorèmes de la théorie des graphes se généralisent aux hypergraphes.

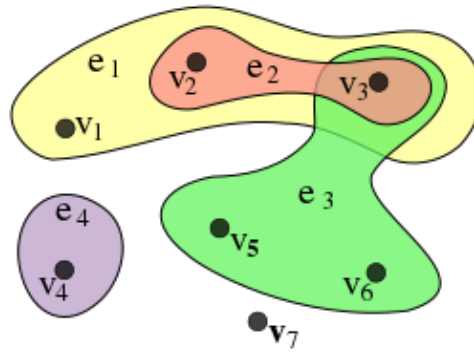
Définition d'un hypergraphe

Un hypergraphe H est un couple (V, E) où $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un ensemble non vide de sommets (généralement fini) et $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ est une famille de parties non vides (sous-ensembles) de V . Avec :

- $E_i \neq \emptyset$ ($i=1, 2, \dots, m$)
- $\bigcup_{i=1}^m E_i = V$

À l'instar des graphes, on dit que:

- Les éléments de V sont les sommets de H .
- Le nombre de sommets n est l'ordre de l'hypergraphe. H noté $n(H)$
- Les éléments de E sont les arêtes de H , noté $m(H) = |H|$
- On dit aussi $H = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ est un hypergrpahe sur V



Exemple d'hypergraphe :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{ \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\} \}$$

Les hypergraphes correspondent précisément aux matrices à coefficients 0 ou 1 (dont chaque colonne contient au moins un 1). En effet, tout hypergraphe H correspond de manière univoque à la matrice $A_{n,m}$ telle que :

$$\forall a_{i,j} \in A, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in E_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Domaines d'utilisation d'un hypergraphe

Les hypergraphes sont manipulés dans tous les domaines où on utilise la théorie des graphes, notamment :

- Résolution de problèmes de satisfaction de contraintes.
- Traitement d'images.
- Optimisation d'architectures réseaux.
- Modélisation, etc.

Hypergraphe uniforme

Parmi les propriétés « nouvelles » des hypergraphes par rapport aux graphes figurent deux notions associées :

- On appelle rang d'un hypergraphe le nombre maximum de sommets d'une arête:

$$\text{Rang}(H) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |E_i| \quad (\text{noté aussi } r(H))$$

- Le rang d'un hypergraphe est majoré par son ordre.
Si $\text{rang}(H)=2$, alors H est un graphe.
- On appelle anti-rang d'un hypergraphe le nombre minimum de sommets d'une arête:

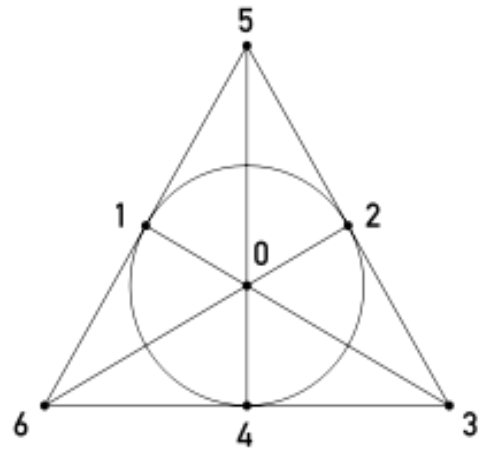
$$\text{Anti-Rang}(H) = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} |E_i| \quad (\text{noté aussi } s(H))$$

Par définition d'un hypergraphe, les arêtes sont des parties non vides de l'ensemble des sommets de l'hypergraphe. L'anti-rang d'un hypergraphe est donc non nul.

Un hypergraphe est dit uniforme lorsque son rang et son anti-rang sont égaux $\rightarrow (r(H) = s(H))$

Hypergraphe du plan de Fano

L'hypergraphe du plan de Fano a sept sommets appelés points $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ et sept arêtes appelées droites $(013, 045, 026, 124, 346, 325, 516)$. L'ordre de l'hypergraphe (nombre de sommets) est 7.



Le rang et l'anti-rang sont égaux à 3 (nombre de sommets d'une arête). Par conséquent, l'hypergraphe du plan de Fano est un hypergraphe 3-uniforme.

Hypergraphe simple et de Sperner

- À l'instar des graphes (non orientés), on dit qu'un hypergraphe est simple s'il n'a pas d'arête multiple.
- On appelle famille de Sperner (ou clutter en anglais) un hypergraphe simple dont aucune arête n'est contenue dans une autre.

Hypergraphe partiel et sous-hypergraphe

1. Un hypergraphe partiel $H_p=(V, E_p)$ d'un hypergraphe $H=(V,E)$ est tel que:
 - $E_p \subset E$.
2. Un sous-hypergraphe $H'=(V', E')$ d'un hypergraphe $H=(V,E)$ est tel que:
 - $V' \subseteq V$ et
 - $\forall E_i \in E', E_i \subseteq V' \wedge E_i \in E$

Ces notions généralisent à la théorie des hypergraphes les notions de graphe partiel et de sous-graphe.