COMBINATOIRE I (Master AMD 1ere année)

January 7, 2021

Programme Combinatoire I (Master I AMD)

Chapitre I Introduction à la combinatoire, Rappels sur la théorie des ensembles.

Chapitre ii Analyse combinatoire, principes de dénombrements (principe d'addition, principe de multiplication). Exemples d'illustrations (nombre d'applications entre deux ensembles finis, nombre d'injections, permutations, injections, combinaisons).

Chapitre iii. Principe d'inclusion-exclusion + exemples (nombre de dérangements, nombre de surjections, etc).

Bibliographie:

1. Introduction to Combinatorial Mathematics, C. L. Liu, McGraw-Hill Book Company.1968.
2. An Introduction to Combinatorics, Alan Slomson, CHAPMAN AND HALL MATHEMATICS.
3. Discrete Mathematics for Computer Scientists and Mathematicians, Joe l Mott et al.

Chapitre I Introduction à la combinatoire

La combinatoire est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux méthodes permettant de compter ou bien dénombrer dans les ensembles finis (combinatoire énumérative). On s'intéresse dans ce cours à quelques techniques qui permettent de compter sur les ensembles finis, et si possible leurs sous ensembles, sans énumérer tous leurs éléments. On fait tout d'abord, un rappel sur le nombre de permutations, arrangements et combinaisons sur un ensemble fini $E = \{1, 2, ..., n\}$ contenant n éléments. Nous étudierons ensuite des techniques de comptage d'ensembles finis qui nous permettent de compter le nombre d'éléments d'une union , d'une intersection , et de diverses combinaisons d'ensemble finis avec et sans répetition d'éléments.

I.1 Rappels sur la théorie des ensembles

Un ensemble E est une collection d'objets dits éléments de l'ensemble E. Si e est un élément de E on note $e \in E$, sinon on note $e \notin E$. Pratiquement, on peut définir un ensemble de deux façons:

1) par extension: en décrivant tous ses éléments entre accolades $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

2) par compréhension: en donnant une propriété commune caractérisant tous ses éléments.

$E = \{x/x \text{ vérifie la propriété } p\}$. Par exemple, l'ensemble des entiers pairs peut etre défini par :

$P = \{n \in \mathbb{N}/ \text{ l'entier } n \text{ est pair}\}$.

Soit E un ensemble, on note par $\wp(E)$ l'ensemble des parties de E, on a:

$$A \subseteq E \iff A \in \wp(E)$$

Donc $\wp(E) = \{A/A \subset E\}$. Il suffit de prendre $A = E$ ou bien $A = \emptyset$, pour voir qu'on a respectivement: $E \in \wp(E)$ et $\emptyset \in \wp(E)$. En particulier, si $a \in E$ alors le singleton $\{a\} \in \wp(E)$, on a:

$$a \in E \iff \{a\} \subset E \iff \{a\} \in \wp(E)$$

Soient E, F deux ensembles. On a

$$E = F \iff E \subseteq F \text{ et } F \subseteq E \text{ (double inclusion)}$$

$$E \subseteq F \iff (a \in E \implies a \in F)$$

Exercice 1

1/ Soient $A_1 = \{x \in \mathbb{N}/x^2 - x - 2 = 0\}$, $B_1 = \{2\}$. Montrer que $A_1 = B_1$.

2/ Soient $A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ est divisible par } 6\}$, $B_2 = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ est multiple de } 2 \text{ et } 3\}$. Montrer qu'on a $A_2 = B_2$.

I.2 Partition et recouvrement d'un ensemble

Soit E un ensemble et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, i.e, $\forall i \in I$, $A_i \subseteq E$ (ou bien $A_i \in \wp(E)$), avec I un ensemble d'indices fini ou infini. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si d'une part, l'union ces parties donnent E, et d'autres parts ces parties sont disjoints 2 à 2 i.e,

a) $\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$,
b) $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tous $i, j \in I$,avec $i \neq j$.
c) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = E$

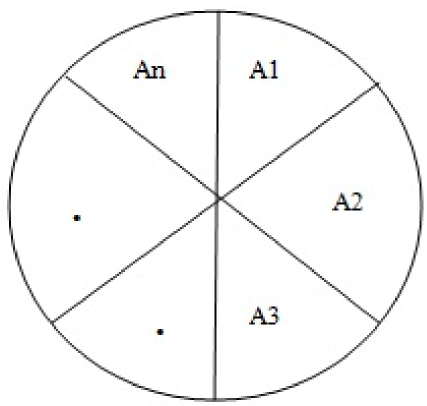
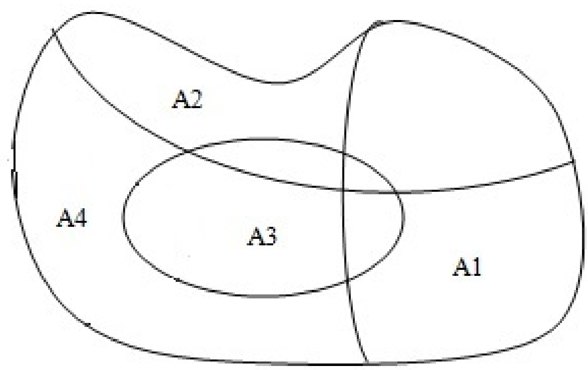


Figure 1: partition de E

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est dite un recouvrement de E si on a $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = E$, dans ce cas des parties de $(A_i)_{i \in I}$ peuvent avoir des éléments en commun, c.à.d, il peut exister i, $j \in I$, $i \neq j$ avec $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.



recouvrement de E

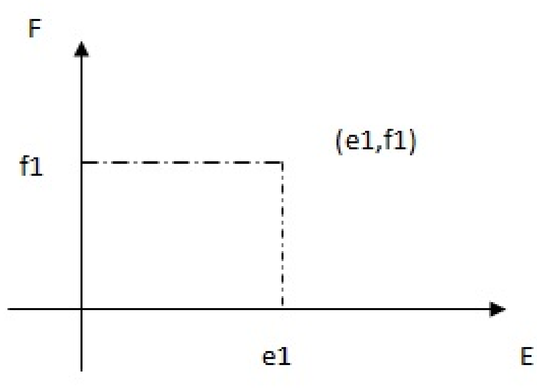
Exercice 2 Montrer que si un ensemble E contient n éléments, alors l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E, contient 2^n parties.

Preuve: voir td

Exercice 2 Soient $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{Z}$. On définit $\forall i \in I : A_i = [i, i+1[$. Par exemple, $A_0 = [0,1[$, $A_1 = [1,2[$, $A_{-1} = [-1,0[$, $A_{-2} = [-2,-1[$. On a
1/ Pour $i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$,
2/ $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i \in Z} [i, i+1[= \mathbb{R}$. Vérifier les résultats 1 et 2.

I.3 Produit cartésien

Soient E, F deux ensembles. Leur produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble $E \times F = \{(x,y) \,/\, x \in E \text{ et } y \in F\}$.



produit cartésien

En général, si $E_1, E_2, ..., E_n$ sont n ensembles, leur produit cartésien est l'ensemble $E_1 \times E_2 ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ \ x_i \in E_i\}$. Un élément $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 ... \times E_n$ est dit un n-uplet. L'élément $(x, y) \in E_1 \times E_2$ est dit un couple, l'élément $(x, y, z) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ un triplet, l'élément $(x, y, z, t) \in E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ un quadruplet...etc. Si $E_1 = E_2 = ... = E_n = E$, on note par E^n (n copies de E), le produit cartésien $E \times E ... \times E$ (n fois).

Exemples:
1/ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ on a $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. De meme, $\{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, x) / x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$et $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{(0, 0)\}$.

Exercice 3 Soit A, B et C trois ensembles quelconques. Démontrer l'égalité

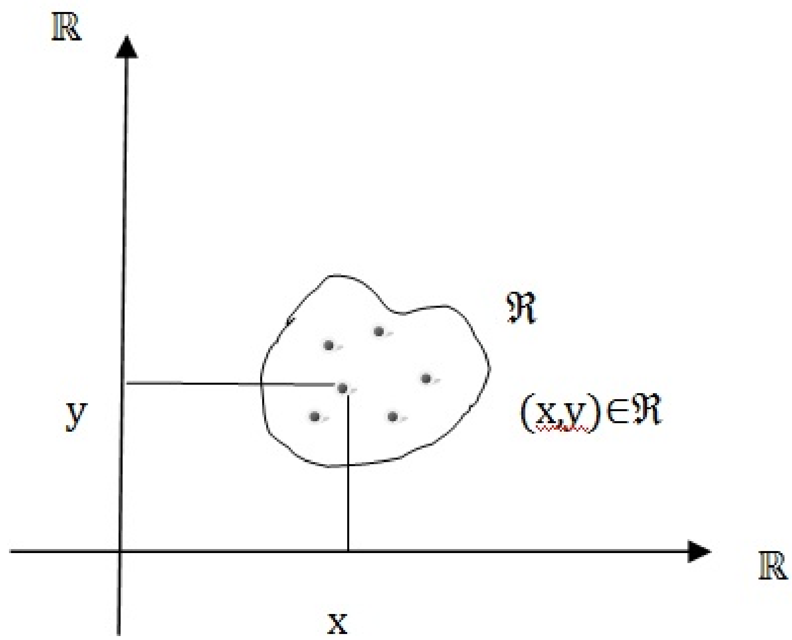
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Si $A \times B = A \times C$ avec $A \neq \emptyset$ alors $B = C$.

I.4 Relation

Soient E, F deux ensembles. Une relation binaire $\Re$ de E vers F est une partie de $E \times F$, i.e, $\Re \subseteq E \times F$. Si $(x, y) \in \Re$ on note par $x \Re y$ le fait que l'élément x est en relation avec l'élément y selon la relation $\Re$, sinon on a $(x, y) \notin \Re$ (x et y ne sont pas en relation selon $\Re$). Comme $\emptyset \subseteq E \times F$, alors $\emptyset$ est dite la relation vide qui ne contient aucun couple (aucun élément de E n'est en relation avec aucun élément de F). De même comme on a $E \times F \subseteq E \times F$, alors $E \times F$ est dite la relation pleine (tout élément de E est en relation avec tout élément de F).

Soit $\Re : A \to B$ une relation, on note par
$Dom(\Re) = \{a \in A / \exists b \in B : (a, b) \in \Re\} \subseteq A$
le domaine de la relation $\Re$ et par
$Rang(\Re) = \{b \in B / \exists a \in A : (a, b) \in \Re\} \subseteq B$.



l'image de la relation $\Re$

L'image d'un élément $a \in A$ est l'ensemble $\Re(a) = \{b \in B : (a,b) \in \Re\}$ des éléments de B avec lequels l'élément a est en relation. Les antécedents de $b \in B$ est l'ensemble $\Re^{-1}(b) = \{a \in B : (a,b) \in \Re\}$ des éléments de A en relation avec b.

Inverse relation(relation inverse):

If $\Re \subseteq A \times B$ then the inverse of $\Re$ is a relation from the set B to set A which is denoted by $\Re^{-1}$ and is defined by $\Re^{-1} = \{(b,a) / (a,b) \in \Re\}$ or equivalently, $(a,b) \in \Re \iff (b,a) \in \Re^{-1}$.
On fait remarquer ici qu'on peut calculer la relation inverse $\Re^{-1}$ de toute relation binaire $\Re$. Alors que la réciproque f^{-1} d'une application f de E vers F ne peut être définie que si f est une bijection (au moins une injection).

Une relation binaire sur un ensemble E est une partie de $E \times E$. On note par I_E ou bien $\triangle_E$ le relation identité de E, c.à.d, $I_E = \{(a,a) / a \in E\}$ qui représente aussi la diagonale dans la table du produit cartésien $E \times E$. Certaines propriétés remarquables d'une relation binaire $\Re$ sur un ensemble E sont: La relation $\Re$ est dite réflexive si $(a,a) \in \Re$ pour tout $a \in E$; symétrique si $(b,a) \in \Re$ lorsque $(a,b) \in \Re$; antisymétrique si $(a,b) \in \Re$ et $(b,a) \in \Re$ alors $a = b$, et transitive si

$(a,b) \in \Re$ et $(b,c) \in \Re$ alors $(a,c) \in \Re$.
Exemples a). Soient $E = \{1,2,3,4,5\}$, $F = \{5,6,7,8,9\}$ et la partie $\Re = \{(a,b)\,/a \in E \text{ et } b = 2a+3 \in F\} = \{(1,5),(2,7),(3,9)\}$ est une relation sur $E \times F$.
b). Toute fonction $f : E \longrightarrow F$ est une relation binaire de E vers F, i.e , $f \subseteq E \times F$ avec la condition: si $(a,b) \in f$ et $(a,c) \in f$ alors $b = c$ (pour une fonction un élément ne peut avoir plus d'une image).
Exercice 4

a/ Soit E un ensemble. Montrer que toute relation d'équivalence $\Re$ sur E détermine une partition $P = (A_i)_{i \in I}$ de l'ensemble E. Inversement, à toute partition $P = (A_i)_{i \in I}$ de E on peut définir une relation d'équivalence correspondante. Donc le nombre de partitions d'un ensemble est égal au nombre de relations d'équivalences sur cette ensemble.

b/ b/ Soient P et P' 2 partitions d'un ensemble E. On dit que P est plus fine que P' si:

$\forall p \in P, \exists p' \in P'$ tel que $p \subseteq p'$.

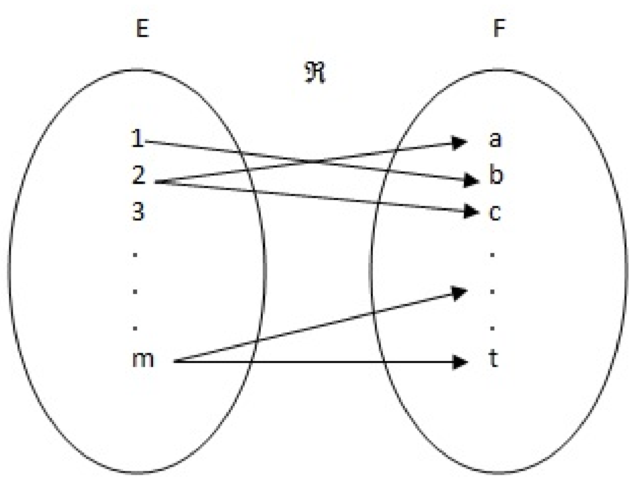
Soient R et R' deux relations d'équivalences sur E. Montrer que $\Re \subseteq \Re' \iff E/\Re$ est plus fine que $E/\Re'$.

c/ Soit $E = \mathbb{Z}$ et les relations $\Re = (\equiv \bmod [4])$, $\Re' = (\equiv \bmod [2])$. Montrer que $\mathbb{Z}/ \equiv \bmod [4]$ est plus fine que $Z/ \equiv \bmod [2]$.

Graphe d'une relation

Soit $\Re \subseteq A \times B$ une relation. On peut représenter $\Re$ d'une manière saggitale, cartésienne ou bien matricielle.

Représentation saggitale



Représentation saggitale d'une relation

Représentation cartésienne de $\Re$

E\F	Y1	Y2	.	.	.	.	Ym
X1	x						
X2		x					
.							
.							
Xn							

Représentation cartésienne de $\Re$

Représentation Matricielle d'une relation

On peut représenter une relation $\Re$ par une matrice $M_{\Re}$qu'on définie par

$M_{\Re}(i,j) = 1$ si $(i,j) \in \Re$ sinon on pose $M_{\Re}(i,j) = 0$, par exemple $M_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Une relation binaire intéressante sur un ensemble E est la relation d'équivalence qui permet de quotienter l'ensemble E en une partition. Si la relation binaire $\Re$ sur l'ensemble E est une relation d'équivalence, alors la classe de l'élément $a \in E$ est la partie de E définie par: $\overline{a}_{\Re} = \{b \in E/a\Re b\}$. Evidemment, on a $\forall a, b \in E$, soit $\overline{a}_{\Re} \cap \overline{b}_{\Re} = \emptyset$ soit $\overline{a}_{\Re} = \overline{b}_{\Re}$. Comme exemple de congruence (une congruence est une relation d'équivalence compatible avec les lois de la structure), prenons $E = \mathbb{Z}$ (l'ensemble des entiers) et la congruence, notée $\equiv$, définie sur $\mathbb{Z}$ par: Soit $(n \geq 2) \in \mathbb{N}$, pour $x, y \in \mathbb{Z}$ on dit que $a \equiv b\,[\mathrm{mod}\, n]$ si et seulement si l'entier n divise $a - b$. Evidemment, cette relation est réflèxive, symétrique et transitive. La classe $\overline{a}_{\equiv}$d'un élément $a \in \mathbb{Z}$ est $\overline{a}_{\equiv} = a + n\mathbb{Z}$. Comme pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on a par division euclidienne de l'entier a par l'entier naturel n:
$a = nq + r$ (q :le quotient de la division et r son reste), avec $0 \leq r < n$. Par passage aux classes on obtient:

$\overline{a} = \overline{nq + r} = \overline{nq} \bar{+} \overline{r} = \overline{0} \bar{+} \overline{r} = \overline{r}$ avec $0 \leq r < n$. Et par suite, l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est :

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$ avec $\overline{0} = n\mathbb{Z}$, $\overline{1} = 1 + n\mathbb{Z}$, ..., $\overline{n-1} = (n-1) + n\mathbb{Z}$. Il est clair que le cardinal de toute classe est infini.

Exercice 5

Soit n un entier naturel donné. On suppose $n \geq 2$. On définit dans $\mathbb{Z}$ une relation $a \equiv b\,[\mathrm{mod}\, n]$ qui signifie que $(\exists k \in \mathbb{Z})$ tel que $a - b = kn$.

1/ Montrer que cette relation est une relation d'équivalence. Cette relation est appelé congruence modulo n. On désigne par $\overline{a}$ la classe d'équivalence de l'entier relatif a. Déterminer tous les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2/

a/ On définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une addition et une multiplication par:

$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$ et $\overline{a}.\overline{b}=\overline{ab}$.

Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ est un anneau commutatif. est il intègre?

b/ Montrer que si n est premier alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

3/ Donner les tables d'addition et multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et résoudre le système d'équations suivant dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\{ \begin{array}{l} 1x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{array}$ où x,y sont des éléments cherchés dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

4/ Résoudre l'équation $x^2-4x-2=0$, x étant un élément cherché dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

5/ Soit $a\in\mathbb{Z}$, on désigne par $a\mathbb{Z}$ l'ensemble $a\mathbb{Z}=\{ay/y\in\mathbb{Z}\}$.

5a/ Montrer que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=p\operatorname{gcd}(a,b)\mathbb{Z}$.

5b/ Montrer que $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=ppcm(a,b)\mathbb{Z}$.

Exercice 6

Soit E un ensemble à n éléments Trouver:

1/ Le nombre de relations binaires dans E,

2/ Le nombre de relations réflexives dans E,

3/ Le nombre de relations symétriques dans E.

Preuve: Voir td

I.5 Application

Soit E,F deux ensembles. Une application f de E vers F est une relation binaire de E vers F qui vérifie en plus la condition suivante: si on a $(a,b)\in f$ et $(a,c)\in f$ alors $b=c$ (c.à.d, l'élément $a\in E$, ne peut avoir plus d'une image $f(a)\in F$).

Soit f une application de E vers F.

a/ L'application f est dite injective (one to one)
si pour $x_1,x_2\in E$ on a $f(x_1)=f(x_2)$ alors $x_1=x_2$,
ceci est équivalent à dire si $x_1\neq x_2$ alors on a aussi $f(x_1)\neq f(x_2)$ (deux éléments différents de l'ensemble de départ ont des images différents dans l'ensemble d'arrivé). Tout cela est équivalent à dire qu'on a: $\forall y\in F$ on $\left|f^{-1}(y)\right|\leq 1$.

b) L'application f est dite surjective(onto),
si $\forall y\in F \Longrightarrow \exists x\in E$ tel que $y=f(x)$.
Ceci est équivalent à dire qu'on a : $f(E)=F$, ce qui revient à dire qu'on a aussi : $\forall y\in F$ on a $\left|f^{-1}(y)\right|\geq 1$.

c/ L'application f est dite bijective si elle est injective et surjective ce qui est équivalent à dire: $\forall y\in F$ on $\left|f^{-1}(y)\right|=1$.

Exercice 7

Soit E,F deux ensembles finis avec $|E|=|F|$. Pour montrer qu'une application f de E vers F est une bijection, il suffit de montrer que

c'est une injection (ou bien une surjection). En d'autres mots, on doit montrer f est injective si et seulement si f est surjective.
Preuve: Voir td.

Notion de cardinal

Soit E un ensemble. Le cardinal de l'ensemble E mesure la taille (size) de l'ensemble E. Pour mesurer la taille d'un ensemble, on utilise les applications (Cantor). Si l'ensemble E est fini, alors il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et note $Card(E) = |E| = n$. Par exemple, on a $|\emptyset| = 0$, $|\{2\}| = 1$, $|\{1, 2, ..., n\}| = n$. Si l'ensemble E est infini, on compare sa taille avec les ensembles infinis usuels tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$,...etc. On dit qu'un ensemble E est infini dénombrable, s'il est en bijection avec l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans ce cas, on définit $|E| = \aleph_0$ (aleph zéro), qui est le plus petit cardinal infini, evidemment $\aleph_0 \notin \mathbb{N}$. Sinon, l'ensemble E est dit infini non dénombrable, dans ce cas on a $|E| > \aleph_0$.

Exercice 8
1/ Montrer que les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2/ Montrer que l'intervalle(ensemble) $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ est non dénombrable.
Preuve: voir td