Table des matières

Chapitre 1

Notions de Théorie Spectrale

Dans ce chapitre, on définit quelques notions essentielles de la théorie spectre. On rappelle qu'une application linéaire T définie de E dans un espace vectoriel F est appelée un opérateur (sous-entendu lorsque E est de dimension infinie). De plus, on dit que T est un opérateur borné lorsque T est continu, i.e. $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappellons aussi si $T \in L(E, F)$, alors on note

$$Ker(T) = \{x \in E : T(x) = 0\} \text{ et } Im(T) = \{T(x) : x \in E\}$$

1.1 Opérateurs compacts

1.1.1 Rappel (partie compacte)

Définition 1.1.1 *Soit $A \subset (X, d)$, l'ensemble A est dit compact si et seulement si toute suite $(x_n)_n$ dans A contient une sous suite convergente dans A*

$$A \textit{ est compact} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x_n)_n \subset A, \\ \exists (x_{n_k})_k \textit{ sous suite de } (x_n)_n \textit{ et } (x_{n_k})_k \to x \in A \end{cases}$$

Définition 1.1.2 *L'ensemble A est dit relativement compact si $\bar{A}$ est compact*

$$A \textit{ est relativement compact} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x_n)_n \subset A, \\ \exists (x_{n_k})_k \textit{ sous suite de } (x_n)_n \textit{ et } (x_{n_k})_k \to x \in \bar{A} \end{cases}$$

1.1.2 Opérateur de rang fini

Définition 1.1.3 *Soient E, F deux espaces normés et $T : E \to F$ un opérateur borné (continu). On dit que T est un opérateur de rang fini si $Im(A)$ est de dimension finie c-à-d*

$$Rang(T) = \dim(\operatorname{Im} T) < +\infty.$$

L'ensemble des opérateurs de rang fini est un sous espace de $\mathcal{L}(E, F)$

1.1.3 Opérateur compact

Définition 1.1.4 *Soient E, F deux espaces normés et $T : E \to F$ un opérateur borné. On dit que T est un opérateur compacte si l'image par T de la boule unité B_E est relativement compacte dans F*

$$T \text{ est compacte} \Leftrightarrow \overline{T(B_E)} \text{ est compact dans } F.$$

Remarque 1.1.1 *la condition "$\overline{T(B_E)}$ est compact dans F" assure la continuité de T; il n'y aurait donc pas besoin de la supposer au départ. c-à-d*

$$T \text{ est compacte} \Rightarrow T \text{ est continu.}$$

Preuve. $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F alors $\overline{T(B_E)}$ est borné d'ou $T(B_E)$ est borné dans F

$$\exists M > 0, \forall x \in B_E = B(0,1) : \|T(B_E)\| \leq M$$

on a $\forall x \in E$ $(x \neq 0)$ $x = \|x\| \frac{x}{\|x\|}$

$$\left\| T(\|x\| \frac{x}{\|x\|}) \right\| = 2\|x\| \left\| T(\frac{x}{2\|x\|}) \right\| \leq 2M\|x\| \text{ car } \frac{x}{2\|x\|} \in B_E$$

si $x = 0$ c'est evidente

$$\|T(0)\| = 0 \leq 2M\|0\|$$

conclusion T est continu ■

Notation 1.1.1 *On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $K(E) = K(E, E)$.*

Proposition 1.1.1 *Tout opérateur de rang fini est compact*

Preuve. Soit T un opérateur de rang fini $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \infty$. Comme T est continu alors $T(B_E)$ est borné donc $\overline{T(B_E)}$ est aussi partie bornée et en plus fermée dans un espace de dimension fermée alors $\overline{T(B_E)}$ est une partie compacte. ■

1.1.4 Propriétés de base des opérateurs compacts

Proposition 1.1.2 *1- L'ensemble des applications linéaires compactes $K(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$*

$$\begin{array}{l} T \text{ est compact} \\ S \text{ est compact} \end{array} \Rightarrow \alpha T + \beta S \text{ est compact}$$

2- Si E, F deux espaces de Banach, alors $K(E, F)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$

$$\begin{array}{c} (T_n) \subset K(E, F) \\ \|T_n - T\| \to 0 \end{array} \Rightarrow T \text{ est compact}$$

3- Soient $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$, alors si S ou T est compact, $T \circ S \in K(E, F)$.

Théorème 1.1.1 *L'opérateur identique $Id : E \to E$ est compact si et seulement si E est de dimension finie*

Corollaire 1.1.1 *Si E est de dimension infinie alors la boule unité $B_E = B(0, 1)$ n'est pas compact.*

Preuve. supposons que B_E est compact alors $\overline{Id(B_E)} = B_E$ est compact, donc Id est compact ce qui implique que $\dim(E) < +\infty$. contraduction ■

Remarque 1.1.2 *L'implication "T est continu$\Rightarrow$ T est compact" est fausse, en effet on prend $T = Id$.*

1.2 Composé de plusieurs opérateurs

Proposition 1.2.1 *Soient E, F et G trois e.v.n, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et l'on a l'inégalité suivante :*

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)}$$

Preuve. Le théorème de composition des applications continues assure que $g \circ f$ est continue.
La linéarité de $g \circ f$ est évidente. Soit $x \in E$. Par définition de $\|g\|_{\mathcal{L}(F,G)}$, on a

$$\|g \circ f(x)\|_G \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|f(x)\|_F ,$$

puis par définition de $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$,

$$\|g \circ f(x)\|_G \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E .$$

En conséquence, on a

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)}$$

■

Application : Soit $T \in \mathcal{L}(H,H)$ un opérateur de l'espace de Hilbert H dans lui même. On définit les puissances de l'opérateur T comme étant les opérateurs

de H dans H définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
T^0 &= Id \text{ (l'opérateur identité)},\\
T^1 &= T,\\
T^2 &= T \circ T,\\
&\dots.\\
T^n &= T \circ T \cdots \circ T = T \circ T^{n-1} = T^{n-1} \circ T \text{ avec } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Corollaire 1.2.1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Corollaire 1.2.2 *La série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n!} T^n$ converge dans $\mathcal{L}(H,H)$. Sa somme est un opérateur de H dans H appelé exponentielle de l'opérateur T et noté e^T ou $expT$. Sa norme vérifie:*

$$\|expT\| \leq exp(\|T\|).$$

1.3 Inverse d'un opérateur

Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ un opérateur.

Définition 1.3.1 *On dit que A est inversible s'il existe $A \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tel que*

$$A \circ B = Id_{H_2}, \quad \text{et } B \circ A = Id_{H_1},$$

où Id_{H_1} (resp. Id_{H_2}) est l'opérateur identité de H_1 (resp. de H_2). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B := A^{-1}$.

Exemple 1.3.1 *1. L'opérateur Id_H est inversible, et $Id_H^{-1} = Id_H$*
2. L'opérateur T définit sur $\ell_2(\mathbb{C})$:

$$T(x_1, x_2, .., x_n, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, .., \frac{x_n}{n}, ...)$$

il existe un opérateur T^{-1} qui vérifier $TT^{-1} = T^{-1}T = Id$ où

$$T(x_1, x_2, .., x_n, ...) = (x_1, 2x_2, .., nx_n, ...)$$

mais n'est pas borné.

1.4 Opérateur adjoint

1.4.1 Cas général (dans les espaces normés)

Proposition 1.4.1 *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe un autre opérateur appartient à $\mathcal{L}(F^*, E^*)$, noté T^*, et appelé l'adjoint de T, tel que :*

$$\langle \varphi, Tx \rangle_{F^*, F} = \langle T^* \varphi, x \rangle_{E^*, E} \text{ pour tout } x \in E \text{ et toute } \varphi \in F^*$$

1.4.2 Cas particulier: (dans les espaces de Hilbert)

Proposition 1.4.2 *Soit H_1, H_2 deux espaces de Hilbert. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, il existe un autre opérateur, noté T^*, et appelé l'adjoint de T, tel que :*

$$\langle \varphi, Tx \rangle_{H_2} = \langle T^* \varphi, x \rangle_{H_1} \text{ pour tout } x \in H_1 \text{ et toute } \varphi \in H_2$$

De plus $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)}$.

Définition 1.4.1 *Si $T \in \mathcal{L}(H,H)$ est tel que $T = T^*$, on dit que l'opérateur T est auto-adjoint (ou hermitien).*

Proposition 1.4.3 *(Propriétés de l'adjoint) :*
1) Pour tout $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, on a

$$(T^*)^* = T \text{ et } \|T\| = \|T^*\|$$

2) Si $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $U \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, alors

$$(U \circ T)^* = T^* \circ U^*$$

3) Pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et tout, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \overline{\alpha} T_1^* + \overline{\beta} T_2^*$$

4) Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H,H)$ est inversible si et seulement si T^* est inversible, et alors on a

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$$

Exemple 1.4.1 *Soit A un operateur défini par*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \to & (y+3z, 2x) \end{array}$$

Déterminer T^* l'opérateur adjoint de T.

Solution 1.4.1 *Soit T^* est l'opérateur adjoint de T*

$$\begin{array}{rccc} T^*: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \to & T^*(x,y) \end{array}$$

tel que $\langle Y, T(X)\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle T^*(Y), X\rangle_{\mathbb{R}^3}$ on a

$$\begin{aligned} \langle T^*((y_1,y_2)), (x_1,x_2,x_3)\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle (y_1,y_2), T(x_1,x_2,x_3)\rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= \langle (y_1,y_2), (x_2+3x_3, 2x_1)\rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= y_1x_2 + 3y_1x_3 + 2x_1y_2 \\ &= \langle (2y_2, y_1, 3y_1), (x_1,x_2,x_3)\rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

donc

$$T^*(y_1,y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1)$$

1.5 Quelques exercices corrigés

Exercice 1.5.1 *Soit $E = \ell_2$ sur $\mathbb{R}$ et T une application définie par*

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow & E \\ x = (x_i)_i &\rightarrow T((x_i)_i) & = (\tfrac{x_i}{i})_i \end{aligned}$$

1- Montrer que $T \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$

2- On pose $T_n(x) = (\frac{x1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, 0, 0, 0, ...)$. Montrer que T_n est de rang fini pour tout n

3- Estimer $\|T_n - T\|$ puis déduire que T est compact.

Solution 1.5.1 *La linéairité est évidente. Soit $x = (x_i)_i \in \ell_2$*

$$\|T(x)\|_E^2 = \sum_{n\geq 1} \left|\frac{x_i}{i}\right|^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_i|^2}{i^2} \leq \sum_{n\geq 1} |x_i|^2 \leq \|x\|_E^2$$

alors

$$\|T(x)\|_E \leq \|x\|_E \text{ d'ou la continuité}$$

2- Montrons que $\dim(T_n(E)) < +\infty$ *c-a-d $T_n(E)$ admet une base*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, 0, 0, 0, ...) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = \sum x_k e_k \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, ..., 0, 0, 0, 0, ...) \\ e_2 &= (0, \frac{1}{2}, 0, ..., 0, 0, 0, 0, ...) \\ &... \\ e_n &= (0, 0, 0, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, 0, ...) \end{aligned}$$

donc le systeme $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E.

3- $\|T_n - T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_n(x) - T(x)\|$ on a

$$T_n(x) - T(x) = (0, 0, ...0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, , ...)$$

donc

$$\|T_n(x) - T(x)\|^2 = \sum_{i \geq n+1} \left| \frac{x_i}{i} \right|^2 .$$

puisque $\|x\|^2 = 1 = \sum |x_i|^2$ *ce qui donne* $|x_i| \leq 1 \ \forall i$ *alors*

$$\|T_n(x) - T(x)\|^2 \leq \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i^2}.$$

posons

$$R_n = \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i^2} \text{ est le reste de série de Riemann } \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} \text{ donc } R_n \to 0$$

d'après la proposition précédente T *est compact.*

Exercice 1.5.2 *Soit* T *l'application de* $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *dans lui-même définie par*

$$\begin{aligned} T: \ \ell_2 \quad & \to \ \ell_2 \\ x = (x_i)_i \ & \to \ T(x) = T((x_i)_i) = (0, x_0, x_1, x_2 \ldots). \end{aligned}$$

Vérifier que T *est continue et calculer son adjoint ?*

Solution 1.5.2 *Il est simple de vérifier que l'application* T *est une isométrie*

$$\|T\left((x_i)_i\right)\| = \|(x_i)_i\| ,$$

alors T *est continue et sa norme égale à 1.*
Soient $x = (x_i)_{i \geq 0}$ *et* $y = (y_i)_{i \geq 0}$. *si* T^* *est l'opérateur adjoint de* T, *alors*

$$\begin{aligned} \langle x, T(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle \ & \Leftrightarrow \ \left\langle (x_i)_{i \geq 0}, T\left((y_i)_{i \geq 0}\right) \right\rangle = \left\langle T^*((x_i)_{i \geq 0}), (y_i)_{i \geq 0} \right\rangle \\ & \Leftrightarrow \ x_0 \times 0 + \sum_{i \geq 1} x_i y_{i-1} = \left\langle T^*((x_i)_{i \geq 0}), (y_i)_{i \geq 0} \right\rangle , \end{aligned}$$

on a

$$\left\langle T^*((x_i)_{i \geq 0}), (y_i)_{i \geq 0} \right\rangle = \sum_{i \geq 1} x_i y_{i-1} = \sum_{i \geq 0} x_{i+1} y_i = \left\langle (x_{i+1})_{i \geq 0}, (y_i)_{i \geq 0} \right\rangle$$

ce qui donne

$$T^*((x_0, x_1, x_2 \ldots)) = (x_{i+1})_{i \geq 0} = (x_1, x_2, x_3 \ldots).$$

Exercice 1.5.3 *Soit* H *un espace de Hilbert, et* $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$. *Montrer que:*

1) $Im(T)^{\perp} = ker(T^*)$

2) $Im(T^*)^{\perp} = ker(T)$

3) $(T + S)^* = T^* + S^*$

Solution 1.5.3 *1) Pour tout $x \in Im(T)^{\perp}$, on a*

$$\begin{aligned} x \in Im(T)^{\perp} &\Leftrightarrow \langle x, T\left(y\right)\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow \langle T^{*}(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow T^{*}(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in ker(T^{*}) \end{aligned}$$

2) Par la même méthode.

$$\begin{aligned} x \in Im(T^{*})^{\perp} &\Leftrightarrow x \perp Im(T^{*}) \\ &\quad\ \langle x, T^{*}\left(y\right)\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow \langle T(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow T(x) = 0 \ (\text{ pout obtenir l'égalité, on prend par exemple } y = T(x)) \\ &\Leftrightarrow x \in ker(T) \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} \langle (T+S)^{*}(x), y\rangle &= \langle x, T\left(y\right) + S\left(y\right)\rangle \\ &= \langle x, T\left(y\right)\rangle + \langle x, S\left(y\right)\rangle \\ &= \langle T^{*}x, y\rangle + \langle S^{*}x, y\rangle \\ &= \langle \left(T^{*} + S^{*}\right)x, y\rangle \end{aligned}$$

ce qui donne $(T+S)^{*} = T^{*} + S^{*}$.

Exercice 1.5.4 *Montrer que si E un espace de Banach et T un opérateur de $\mathcal{L}(E,E)$ tel que $\|T\| < 1$, alors l'opérateur $Id - T$ est inversible et son inverse*

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^{k}$$

Solution 1.5.4 *On a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|T^{k}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^{k}$$

La contraine $\|T\| < 1$ assure la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^{k}$. Il en résulte que $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^{n}\|$ est aussi converge. Comme E est Banach donc $\sum_{k=0}^{\infty} T^{k}$ est converge vers un élément de

$\mathcal{L}(E,E)$.

Pour tout natural $n \in \mathbb{N}$,

$$(Id - T)\sum_{k=0}^{n} T^k = Id - T^{n+1}$$

Comme

$$\left\|T^{n+1}\right\| \leq \|T\|^{n+1} \to 0, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

le passage à la limite donne

$$(Id - T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = Id.$$

D'où:

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Exercice 1.5.5 *Soit* ℓ_∞ *l'espace des suites réelles muni de la norme* $\|x\|_\infty = \left\|(x_i)_{i\geq 1}\right\|_\infty = \sup_{i\geq 1} |x_i|$. *On considère l'application* T *de* ℓ_∞ *dans lui-même définie par*

$$\begin{array}{llll} T: & \ell_\infty & \to & \ell_\infty \\ & x = (x_i)_i & \to & T(x) = T((x_i)_i) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, ...). \end{array}$$

1) Montrer que T *est injective?*

2) Montrer que T *est continue? Calculer sa norme?*

3) Montrer que T *n'est pas surjective?*

4) Montrer que T *admet un inverse (à gauche) non continu?*

Solution 1.5.5 *1) Si* $T((x_i)_i) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, ...).= T((y_i)_i) = (y_1, \frac{y_2}{2}, \ldots, \frac{y_n}{n}, ...)$, *alors* $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n, ...$ *Donc* T *est injective.*

2) Pour tout $(x_i)_{i\geq 1}$ *dans* ℓ_∞, *on a*

$$\|T(x)\|_\infty = \left\|T\left((x_i)_{i\geq 1}\right)\right\|_\infty = \sup_{i\geq 1}\left|\frac{x_i}{i}\right| \leq \sup_{i\geq 1}|x_i| = \|x\|_\infty,$$

on trouve ce qui donne

$$\|T\| \leq 1. \tag{1.5.1}$$

Considéron $x_0 \in \ell_\infty$ *définie par* $x_0 = (1, 1, 1, ..., 1, ...)$.. *On a* $\|x_0\|_\infty = 1$ *et*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|T(x)\|_\infty \geq \|T(x_0)\|_\infty = \sup_{i\geq 1} \frac{1}{i} = 1 \tag{1.5.2}$$

(1.5.1) et (1.5.2) donnent

$$\|T\| = 1.$$

3) On fixons $(x_i)_i = (1, 1, ..., 1, ...) \in \ell_\infty \; \exists \, (y_i)_i = (1, 2, ..., n, ...)$ *tel que* $T((x_i)_i) = (y_i)_i$ *mais*

$$\left\| (y_i)_{i \geq 1} \right\|_\infty = \sup_{i \geq 1} i = +\infty,$$

donc T n'est pas surjective.

4) Inverse de T est donné par

$$T^{-1}((x_i)_i) = (x_i, 2x_2, ..., nx_n, ...)$$

il n'est pas borné sur ℓ_∞.Il est donc non continu.