Partie I : Rappel sur les éléments d'analyse combinatoire et les probabilités

I.1 Généralités :

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. La combinatoire porte sur le dénombrement de configurations d'objets satisfaisant des conditions données. Elle sert d'outil dans plusieurs problèmes élémentaires en théorie des probabilités, domaine des mathématiques qui trouve son origine dans l'´etude des jeux de hasard.

I.1.1. Eléments discernables et éléments indiscernables :

Représentons les éléments d'un ensemble par $e_1, e_2, \ldots \ldots \ldots, e_n$. L'ensemble Ω comporte n éléments, c.-à-d. $card(\Omega) = n$.

- Si e_i et e_j sont équivalents, on dit qu'ils sont **indiscernables**.
- Si e_i et e_j sont différents, on dit qu'ils sont **discernables**.

- L'ensemble Ω de n éléments peut être constitué d'éléments discernables 2 à 2.

Exemple : $\Omega = \{a, b, c, d\}$

- Tous les éléments de Ω peuvent aussi être tous indiscernables.

Exemple : $\Omega = \{b, b, b, b\}$

- Les éléments d'un ensemble peuvent être discernables ou indiscernables.

Exemple : $\Omega = \{a, b, a, a, c, d, d, c, a\}$

I.1.2. Les différentes dispositions :

Une disposition est l'ensemble formé d'éléments choisis parmi les n éléments de l'ensemble étudié. Un élément figurant dans une disposition est caractérisé par :

- Le nombre de fois où il figure dans l'ensemble.
- Sa place dans la disposition.

Exemple : Soit un ensemble de 4 cartes $\{7_{PIQUE}, 7_{TREFLE}, 8_{PIQUE}, 8_{COEUR}\}$, La hauteur 7 se répète 2 fois, mais le 7_{PIQUE} se trouve en première position.

Quelques définitions :

- **Définition 1** : Disposition sans répétition. C'est une disposition où un élément peut apparaître 0 ou 1 fois.
- **Définition 2** : Disposition avec répétition. Un élément peut figurer plus d'une fois.
- **Définition 3** : Disposition ordonnée. L'ordre d'obtention d'un élément est important.

  Exemple : éléments constituant la plaque d'immatriculation d'un véhicule**.**
- **Définition 4** : Disposition non-ordonnée. L'ordre d'obtention d'un élément n'est pas important, on n'en tient pas compte dans la caractérisation de la disposition.

  Exemple : Les numéros issu d'un tirage du loto.

Exemple : Prenons un jeu de dé à 6 faces (éléments discernables). $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Après 3 jets, nous obtenons A = (2; 5; 1) ; nous réitérons les jets et nous obtenons B = (5; 1; 2). A et B sont équivalents si nous considérons que les dispositions sont non-rdonnées. En revanche, ils ne sont pas équivalents si nous sommes dans le cadre d'une disposition non-ordonnée.

I.2 Formules classiques d'analyse combinatoire :

I.2.1 Les paires : Soient deux ensembles constitués respectivement de α éléments discernables et β éléments discernables : $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots \dots .., a_\alpha\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots \dots .., b_\beta\}$.

On appelle une paire une disposition de deux éléments dont le 1^{er} appartient à A, et le 2^{nd} appartient à B. La paire est une disposition ordonnée, mais les deux éléments sont de nature différentes. Pour décrire l'ensemble des paires possibles, il suffit de composer chaque élément de A avec chaque élément de B. Il y a donc $M = \alpha * \beta$ paires possibles.

Exemple : Combien y a-t-il de mots de 3 lettres ?

Il y a 26 lettres dans l'alphabet. On peut donc former 26 * 26*26 = 17 576 mots de 3 lettres.

Exemple : Combien y a-t-il de mots de 3 lettres formés en deux consonnes et un voyelle (sans tenir compte de l'ordre) ?

Il y a 20 consonnes et 6 voyelles. Nous pouvons former 20* 20*6 = 2 400 couples "Deux consonne X voyelle" et 20*6 *20 = 2 400 couples " consonne X voyelle X consonne " et 6*20 *20 = 2 400 couples " voyelle X consonne X consonne " Il y a donc 7 200 mots possibles formés par deux consonnes et une voyelle.

I.2.2 Les multiplets : Soient λ ensembles distincts formés d'éléments complètement discernables.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots \dots .., a_\alpha\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots \dots .., b_\beta\}$$

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots \dots .., c_\rho\}$$

....

....

....

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots \dots .., s_\lambda\}$$

On appelle multiplets un disposition ordonnée de λ éléments dont le 1er est un élément de A, le second un élément de B,..., et le λ ^{ème} un élément de S.

Les multiplets sont de la forme $\{a_{i_1}, b_{i_2}, c_{i_\rho}, \dots \dots .., s_{i_\lambda}\}$

Un multiplet de λ éléments peut être considéré comme une paire où : le 1er élément est constitué des (λ - 1) éléments, et le second élément, un élément de S.

$$\{a, b, c, \dots \dots .., s\} = [\{a, b, c, \dots \dots ..\}, s]$$

Pour obtenir le nombre de multiplets, nous pouvons raisonner par récurrence.

$$M_\lambda = M_{\lambda-1} * \lambda = M_{\lambda-2} * \rho * \lambda = \dots \dots \dots .. = \alpha * \beta * \rho * \dots \dots .* \lambda$$

Exemple : Quelle est la capacité d'un code constitué de mots où les 2 premiers symboles sont des lettres de l'alphabet, et les 2 derniers symboles sont des chiffres ?

Réponse : On applique le principe fondamental de l'analyse combinatoire

$M = 26 * 26 * 10 * 10 = 67\,600$ codes possibles

Exemple : Un digicode est composé d'une lettre (A ou B) suivi de 3 chiffres. Combien y a-t-il de codes possibles ?

Réponse : $M = 2 * 10 * 10 * 10 = 2000$ codes possibles

Exemple : Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Réponse : On applique le principe fondamental de l'analyse combinatoire

$M = 3 * 2 * 4 = 24$ menus différents.