Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année/ Optimisation
Année universitaire: 2020/2021

Série d'exercice N: 1

Exercice 1:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence suivante

$$A \text{ est convexe } \Leftrightarrow \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

Exercice 2:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tous $x, y \in A$

$$\frac{x+y}{2} \in A$$

1. Montrer par un exemple que A n'est pas forcément convexe.
2. Montrer que si de plus A est fermé, alors A est convexe.

Exercice 3:

Soit C un ensemble d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
1. Montrer que si C est convexe $\Longrightarrow$ $int\,(C)$ et $\overline{C}$ sont convexes.
2. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.

Exercice 4:

Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^m$ deux parties convexes.
1. Montrer que $T\,(C)$ et $T^{-1}\,(B)$ sont convexes.
2. Soit $b \in \mathbb{R}^m$, montrer que $B = \{y \in \mathbb{R}^m : y \leq b\}$ est convexe, où

$$y \leq b \iff \forall 1 \leq i \leq m : y_i \leq b_i.$$

3. En déduire que **le polyèdre** $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ est convexe, avec A est une matrice de format $m \times n$.

Exercice 5:

Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Montrer que:
1. $A \subset conv\,(A)$.
2. Si $A \subset B \Rightarrow conv\,(A) \subset conv\,(B)$.
3. $A = conv\,(A) \Leftrightarrow A$ est convexe.
4. $conv\,(conv\,(A)) = conv\,(A)$.
5. $conv\,(A + B) = conv\,(A) + conv\,(B)$.

Solution Ex1:

On note que:

1) C est convexe$\Leftrightarrow \forall x, y \in C, \forall 0 \leq \lambda \leq 1 : \lambda x + (1-\lambda) y \in C$.

2) Tout sous espace vectoriel (sous espace affine) est un convexe.

3) Un convexe C est celui qui vérifie la propriété suivante: C contient toujours le segment joignant deux de ses points.

$\Rightarrow$) Supposons que A est convexe.

- L'inclusion $(\alpha + \beta) A \subset \alpha A + \beta A$ est vraie sans hypothèse sur A.
- Le cas est trivial si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Supposons $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$. Soit $x \in \alpha A + \beta A$, alors $\exists a, b \in A$ tels que

$$\begin{aligned} x &= \alpha a + \beta b \\ &= (a+\beta)\left(\frac{\alpha}{a+\beta} a + \frac{\beta}{a+\beta} b\right) \in (\alpha+\beta) A \text{ car } \frac{\alpha}{a+\beta} a + \frac{\beta}{a+\beta} b \in A. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Soient $\lambda \in [0,1]$ et $x, y \in A$, alors

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in \lambda A + (1-\lambda) A = (\lambda + (1-\lambda)) A = A.$$

Solution Ex2:

1. On pose

$$A = [0,1] \cap Q.(\text{l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1})$$

A vérifie $\frac{x+y}{2} \in A$ mais A n'est pas convexe.

2. Supposons que $\forall x, y \in C : \left(\frac{x+y}{2}\right) \in C$. Soient $a, b \in C$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, on veut montrer que

$$\overline{x} = \lambda a + (1-\lambda) b \in C.$$

On prend les deux segments $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, celui qui contient $\overline{x}$ on le note $\left[x^{(1)}, y^{(1)}\right]$ et on a

$$\left|x^{(1)} - \overline{x}\right| \leq \frac{|a-b|}{2}$$

On réitère le processus de manière à obtenir

$$\overline{x} \in \left[x^{(k)}, y^{(k)}\right] \subset \left[x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right] \subset ... [x, y],$$

avec

$$\left|x^{(k)} - \overline{x}\right| \leq \frac{|a-b|}{2^k} \overset{k \to +\infty}{\to} 0$$

c'est à dire $\overline{x} = \lim x^{(k)}$. Grâce à l'hypothèse sur C (C est fermé), alors la limite $\overline{x}$ est dans C.

Solution Ex3:

1. Supposons que C est convexe. Soient $x, y \in int(C)$, alors il existe deux ouverts U_x, U_y tels que

$$U_x \subset C \text{ et } U_y \subset C.$$

alors, pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$\lambda U_x + (1-\lambda) U_y \text{ est un ouvert contient } \lambda x + (1-\lambda) y.$$

De plus, par la convexité de C la combinaison $\lambda U_x + (1-\lambda) U_y$ est inclu dans C. Donc

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in int(C).$$

Soient maintenant $x, y \in \overline{C}$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Alors, il existe des suites (x_n) et (y_n) d'éléments de C convergeant respectivement vers x et y. Alors $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n$ appartient à C et converge vers $\lambda x + (1-\lambda) y$ qui appartient forcément à $\overline{C}$.

2. **Exemple de la réciproque**: $C = [0,3[\cup]3,4]$. On a

$$\overline{C} = [0,4]$$

est convexe mais C n'est pas convexe.
$C = [0,3] \cup \{4\}$. On a

$$int(C) =]0,3[$$

est convexe mais C n'est pas convexe.

Solution Ex4:

1. On a

$$T(C) = \{T(x) : x \in C\}.$$

Soient $y_1, y_2 \in T(C)$ et $\lambda \in [0,1]$. Il existe x_1, x_2 tels que $y_1 = T(x_1)$ et $y_2 = T(x_2)$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 &= \lambda T(x_1) + (1-\lambda) T(x_2) \\ &= T(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \in T(C). \end{aligned}$$

Même méthode pour l'image réciproque $T^{-1}(B)$.
2. Soit $B = \{y \in \mathbb{R}^m : y \leq b\}$. Soient $x, y \in B$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $x \leq b$ et $y \leq b$. Donc

$$\lambda x + (1-\lambda) y = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, ..., \lambda x_m + (1-\lambda) y_m),$$

soit $1 \leq i \leq m$, on a $x_i \leq b_i$ et $y_i \leq b_i$ alors

$$\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \leq \lambda b_i + (1-\lambda) b_i \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \leq b.$$

3. On peut facilement vérifier que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = T^{-1}(B),$$

où $T(x) = Ax$. D'après la question 1, on trouve le résultat.

Solution Ex5:

Définition: On note que: $conv(A)$ est le plus petit convexe contenant A.

On note que si $(x_i)_{i=1}^n \subset A$ et $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ alors on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in conv\left(A\right).$$

1. Par définition $A \subset conv\left(A\right).$
2. Soit $x \in conv\left(A\right)$, alors

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, x_i \in A, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

comme $A \subset B$ on a $x_i \in B$, donc

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in B.$$

3. $\Rightarrow$) Clair

$\Leftarrow$) Supposons que A est convexe, donc A peut considérer comme le plus petit convexe contenant A, alors

$$A = conv\left(A\right).$$

4. Comme $conv\left(A\right)$ est convexe alors

$$conv\left(conv\left(A\right)\right) = conv\left(A\right).$$

5. Soit $x \in conv\left(A+B\right)$, alors

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, x_i \in A+b, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

donc

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \lambda_i\left(a_i+b_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in conv\left(A\right) + conv\left(B\right) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$conv\left(A+B\right) \subset conv\left(A\right) + conv\left(B\right).$$

Soit maintenant $x \in conv\,(A) + conv\,(B)$. Alors,

$$\begin{aligned}
x &= a+b \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j b_j \text{ avec } \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j = 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j a_i + \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i b_j \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i \mu_j a_i + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \mu_j b_j \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i \mu_j \left(a_i + b_j\right) \in conv\,(A+B)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i \mu_j &= \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j \\
&= 1.
\end{aligned}$$