**Faculté des Mathématiques de l'Informatique**
**Département des mathématiques**
**Licence 3ième année/ Optimisation**
**Année universitaire: 2020/2021**

## Série d'exercice N: 2

**Exercice 1**:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction à la fois convexe et concave. C'est à dire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On pose $g(x) = f(x) - f(0)$.
1. Montrer que $g$ est impaire.
2. Montrer que $g$ est positivement homogène : $\forall \lambda \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n : g(\lambda x) = \lambda g(x)$.
3. Montrer que $g$ est linéaire.
4. En déduire que $f$ est une fonction affine ($f(x) = \langle a, x\rangle + b$).

**Exercice 2**:

Soit $f(x) = \ln(x)$ une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
1. Montrer que $f$ est concave.
2. En déduire que: $\varphi(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$ est décroissante sur $]0, +\infty[_{\backslash\{1\}}$.
3. En déduire l'inégalité suivante: pour toute combinaison convexe des nombres strictements positifs on a

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{m} x_i^{\lambda_i}.$$

**Exercice 3:**

I) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.
1. Si $f$ et $g$ sont convexes, avec $g$ est croissante, démontrer que $g \circ f$ est convexe sur $I$.
2. Si $f$ et $g$ sont concaves, avec $g$ est croissante, démontrer que $g \circ f$ est concave sur $I$.

II) 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $\ln(f)$ est convexe sur $I$, montrer que $f$ est convexe sur $I$.
2. En déduire la convexité de $f(x) = (1+x)^x$ sur $I = ]0, +\infty[$.

**Exercice 4:**

Etudier la convexité des fonctions suivantes:
(1) $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. (2) $f(x) = (x-1)^4$, sur $\mathbb{R}$. (3) $f(x) = e^{x^2}$, sur $\mathbb{R}$. (4) $f(x) = tg(x)$, sur $\mathbb{R}$

**Exercice 5**:

1. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R} : e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^x + e^y)$.
2. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire que $\forall x, y \in ]1, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

**Exercice 6:**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène. Montrer que

$$f \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

**Solution Ex1**:

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x),$$

alors $g(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) &= f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) - f(0) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) - f(0), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) - 2f(0) &= 0 \\ &\Rightarrow f(-x) - f(0) = -(f(x) - f(0)) \\ &\Rightarrow g(-x) = -g(x). \end{aligned}$$

2. Si $\lambda = 0$, le cas est trivial. Soient $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On distingue deux cas:

♦ $\lambda \leq 1$ : on trouve

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= g(\lambda x + (1-\lambda)0) = f(\lambda x + (1-\lambda)0) - f(0) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(0) - f(0) \\ &= \lambda f(x) - \lambda f(0) \\ &= \lambda(f(x) - f(0)) = \lambda g(x) \end{aligned}$$

♦ $\lambda > 1$ : On pose $x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) + \frac{(\lambda-1)}{\lambda}0$, alors

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x) + \frac{(\lambda-1)}{\lambda}0\right) \\ &= f\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x) + \frac{(\lambda-1)}{\lambda}0\right) - f(0) \\ &= \frac{1}{\lambda}f(\lambda x) + \frac{(\lambda-1)}{\lambda}f(0) - f(0) \\ &= \frac{1}{\lambda}f(\lambda x) - \frac{1}{\lambda}f(0) = \frac{1}{\lambda}g(\lambda x) \end{aligned}$$

d'où $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

3. $g$ **est linéaire:**

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g\left(2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) = 2g\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \\ &= 2\left(f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - f(0)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right) \\ &= f(x) - f(0) + f(y) - f(0) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

Soient $\lambda < 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= g((-\lambda)(-x)) = (-\lambda) g((-x)) \\ &= -(-\lambda) g(x) = \lambda g(x). \end{aligned}$$

Finalement $g$ est linéaire.
4. Comme $g$ est linéaire, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$g(x) = \langle a, x \rangle,$$

donc

$$f(x) = g(x) + f(0) = \langle a, x \rangle + b \text{ avec } b = f(0).$$

**Solution Ex2**:

1. On a

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ por tout } x \in ]0, +\infty[$$

donc $f$ est concave sur $]0, +\infty[$.
2. On utilise le fait que

$$f \text{ est concave sur } I \Leftrightarrow \forall a \in I : \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ est décroissante sur } I_{/\{a\}}.$$

3. On a

$$\ln(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ln(x_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \ln\left(x_i^{\lambda_i}\right) \geq \ln(\prod_{i=1}^{m} x_i^{\lambda_i}),$$

comme la fonction $e$ est croissante on a

$$e^{\ln(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i)} \geq e^{\ln(\prod_{i=1}^{m} x_i^{\lambda_i})},$$

donc

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{m} x_i^{\lambda_i}.$$

**Solution Ex3**:

I)
1. Supposons que $f$ et $g$ sont convexes, avec $g$ est croissante. Alors

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y),$$

comme $g$ est croissante, on trouve le résultat.
2. Même méthode.
II)
1. Supposons que $\ln(f)$ est convexe. Alors

$$\ln(f(\lambda x + (1 - \lambda) y)) \leq \lambda \ln(f(x)) + (1 - \lambda) \ln(f(y))$$

comme $e$ est croissante, on trouve

$$e^{\ln(f(\lambda x+(1-\lambda)y))} \leq e^{\lambda \ln(f(x))+(1-\lambda)\ln(f(y))}$$

et encore comme $e$ est convexe, on trouve

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda) y) &\leq \lambda e^{\ln(f(x))} + (1-\lambda) e^{\ln(f(y))} \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

2. On a

$$\ln(f(x)) = x \ln(1+x).$$

Donc

$$(\ln(f(x)))'' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ sur } ]0,+\infty[$$

on déduit alors que $f(x) = (1+x)^x$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

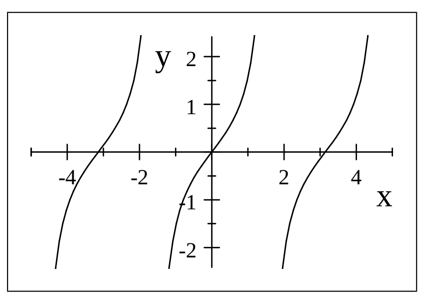
**Solution Ex4**:

1. $f''(x) = 6x$, alors

$$\begin{cases} f \text{ est convexe sur } [0,+\infty[ \\ f \text{ est concave sur } ]-\infty,0] \end{cases}$$

2. $f''(x) = 12(x-1)^2 \geq 0$, alors $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} \geq 0$, alors $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. $f''(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)^4}$, alors

- sur l'intervalle $\left[k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ $f$ est convexe avec $k \in \mathbb{Z}$
- sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi, (k+1)\pi\right]$ $f$ est concave avec $k \in \mathbb{Z}$




$tg(x)$

**Solution Ex5**:

1. Comme $e$ est convexe, le résultat est immédiate.
2. On applique l'exercice précédent. $\ln(x)$ est concave et croissante.
3. On a

$$\ln\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\ln\ln(x) + \frac{1}{2}\ln\ln(y),$$

on a encore

$$e^{\ln\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} \geq e^{\frac{1}{2}\ln\ln(x)+\frac{1}{2}\ln\ln(y)}$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geq e^{\ln\ln(x)^{\frac{1}{2}}} e^{\ln\ln(y)^{\frac{1}{2}}} \\
&\geq \ln(x)^{\frac{1}{2}}\ln(y)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}
\end{aligned}$$

**Solution Ex6**:

$\Rightarrow$) Supposons que $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= f\left(2\frac{x+y}{2}\right) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)f(x) + 2\left(\frac{1}{2}\right)f(y) \\
&\leq f(x) + f(y).
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supposons que la propriété est vraie

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq f(\lambda x) + f((1-\lambda)y) \\
&\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).
\end{aligned}$$