A. **Hypothèses**

Lorsque des forces sont appliquées à une structure elles effectuent un travail pour :

- déformer la structure,
- produire de l'énergie cinétique,
- vaincre les résistances de frottement (dissipation en chaleur).

Nous nous placerons dans des conditions telles que l'énergie cinétique et celle dissipée en chaleur soient nulles. Il faut pour cela supposer :

1°- que les forces sont appliquées "statiquement", c'est-à-dire sans produire d'accélération,

2°- que les frottements aux liaisons sont négligeables,

3°- que les frottements internes sont aussi négigeables, c'est-à-dire que le système est parfaitement élastique.

Nous supposerons en outre :

4°- que les déplacements sont petits et sans effet sur les forces extérieures,

5°- que le passage de l'état initial à l'état final de déformation est réversible (nous pourrons ainsi appliquer la loi de Hooke).

6° - qu'il ne se produit aucune variation de température.

Soit une structure constituée d'un ensemble de poutres. Pour amener cette structure, par application d'un système de forces extérieures, d'un **état initial naturel** à un **état final** caractérisé par un tenseur contrainte et un tenseur déformation il faut dépenser un travail W.

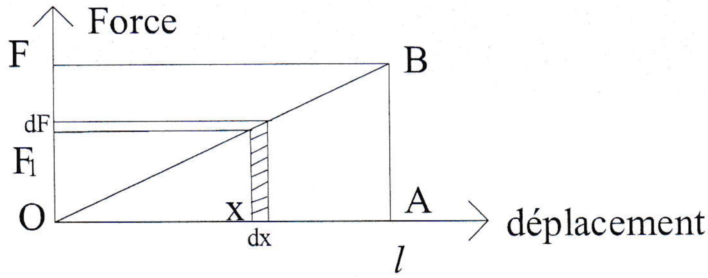
Si le passage de l'état initial à l'état final se fait de façon réversible, le travail ne dépend que de l'état final (principe de thermodynamique). Ce travail est par définition le **potentiel interne** de la structure. C'est l'énergie potentielle emmagasinée par la structure pendant la déformation.

Rappels :

1) Travail d'une force constante :

W = F * *déplacement projeté* sur sa direction. Unité : Nm (comme un moment)

2) Travail d'une force qui varie de O à F pour un déplacement l :

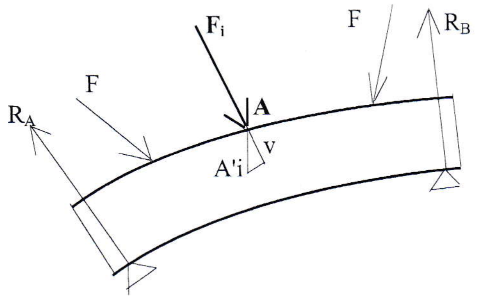


Calculons le travail pour un accroissement dF à partir d'une valeur intermédiaire $\mathbf{F_1}$: le déplacement est dx et le travail $\mathbf{dW = F_1 dx}$, il se mesure par l'aire hachurée.

Calculons le travail total de O à F : $\mathbf{W = 1/2\ F}\boldsymbol{l}$: mesure de l'aire du triangle OAB

B. Théorème de CLAPEYRON

1) Calcul du potentiel interne en fonction des forces extérieures :



- Soit une poutre en équilibre sous l'action d'un système de forces concentrées : F_1, F_2, ... F_i,... F_n.
- F_i se déplace de A_i à A'_i. Dans tout ce qui suit nous considèrerons seulement v_i : *déplacement projeté de F_i sur sa direction*. Ceci pour pouvoir exprimer simplement le travail de F_i.

Faisons varier les forces de 0 à leur valeur maximum F_i. D'après la loi de Hooke, si l'on applique kF_i, le déplacement est kv_i ($0 < k < 1$).

Le travail d'une force F_1 est donc :

$$W = \int_0^{v_1} kF_1.d(kv_1) = \int_0^1 kF_1.v_1.dk = \tfrac{1}{2} F_1.v_1$$

En appliquant le principe de superposition on obtient le travail total des forces qui sont appliquées à la structure :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum F_i . v_i}$$

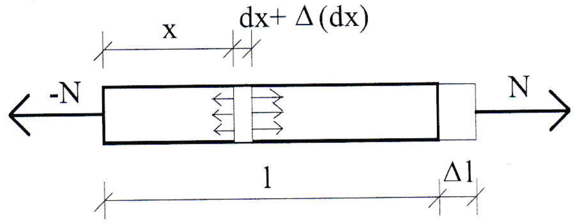
Remarque : On peut appliquer le même raisonnement à des couples :

$$W = 1/2 \ \ \Sigma \ M_i \ \ \omega_i$$

2) Expression du potentiel interne en fonction des sollicitations internes :

On peut donc calculer le potentiel interne d'une poutre en déterminant les déplacements par les équations de Bresse. On peut procéder plus simplement dans le cas **d'une poutre droite**.

a. Effort normal N(x) :



$W = 1/2 \ \ N \ \ \Delta l$

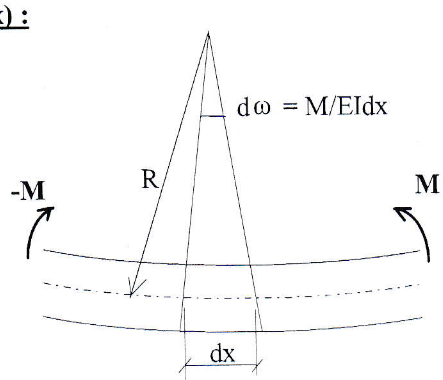
Considérons un tronçon dx : $dW = \ 1/2 \ \ N \ \ \Delta(dx)$

$\Delta(dx) = N \ \ dx/ES$ (loi de Hooke)

$dW = 1/2 \ N^2 \ dx/ES$ et pour la poutre entière :

$$\boxed{W_N = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{ES} dx}$$

b. Moment de flexion M(x) :



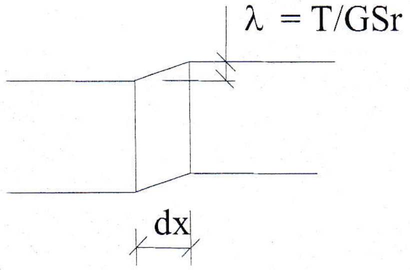
On a de même pour un tronçon dx : $dW = 1/2 \ M \ d\omega$

$d\omega / dx = M/EI$

$dW = 1/2 \ M^2 \ dx/EI$ et pour la poutre entière :

$$\boxed{W_M = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI} .dx}$$

c. **Effort tranchant T(x) :**



$dW = 1/2\ T\ \lambda\ dx$

avec: $\lambda = T / GS_r$

$dW = 1/2\ T^2\ dx/GS_r$; *et pour la poutre entière :*

$$\boxed{W_T = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2}{GS_r}.dx}$$

d. **Cas général :**

Si toutes ces actions sont appliquées ensemble on obtient :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_0^l (\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_r} + \frac{M^2{}_t}{GI_0}).dx}$$

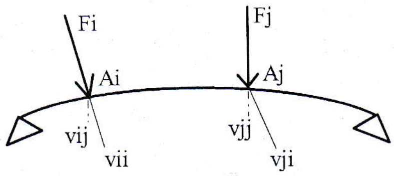
N, M et T sont en général des fonction de *x*.

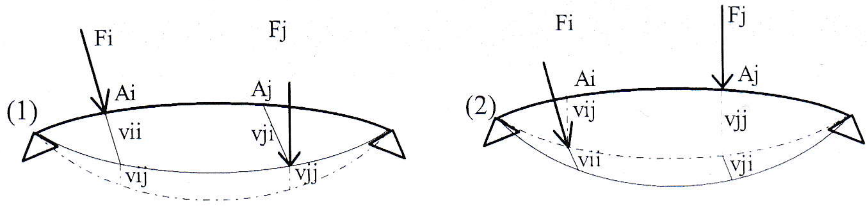
e. **Remarque :**

Dans le cas d'une poutre en flexion simple on néglige en général les déformations dues à T, on a donc :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}.dx}$$

C. Théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI





Considérons une poutre en équilibre sous l'action de 2 systèmes de forces :

(1) le système de forces $\mathbf{F}_i$ appliquées aux points $\mathbf{A}_i$

(2) le système de forces $\mathbf{F}_j$ appliquées aux points $\mathbf{A}_j$

- Sous l'action de $\mathbf{F_i}$ les déplacements projetés sur la direction de $\mathbf{F}_i$ sont :

$\mathbf{v}_{ii}$ pour $\mathbf{A}_i$ et $\mathbf{v}_{ji}$ pour $\mathbf{A}_j$.

- Sous l'action de $\mathbf{F}_j$ les déplacements projetés sur la direction de $\mathbf{F}_j$ sont :

$\mathbf{v}_{jj}$ pour $\mathbf{A}_j$ et $\mathbf{v}_{ij}$ pour $\mathbf{A}_i$.

Le premier indice indique l'effet (le déplacement), le deuxième indice indique la cause (la force).

Evaluons de 2 manières le potentiel dû à l'action simultanée de $\mathbf{F}_i$ et de $\mathbf{F}_j$:

➢ Appliquons d'abord $\mathbf{F}_i$: $W_i = 1/2\ \Sigma\ F_i v_{ii}$

Puis appliquons $\mathbf{F}_j$. Il faut tenir compte du fait que les forces $\mathbf{F_i}$ qui demeurent constantes, se déplacent et effectuent le travail $\Sigma\ F_i v_{ij}$.

Le potentiel interne a donc pour valeur : $W_{i+j} = 1/2\ \Sigma\ F_i v_{ii} + 1/2\ \Sigma\ F_j v_{jj} + \Sigma\ F_i v_{ij}$

➢ Appliquons d'abord $\mathbf{F_j}$, puis $\mathbf{F_i}$, on obtient :

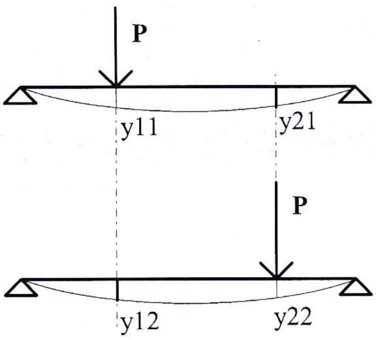
$W_{j+i} = 1/2\ \Sigma\ F_j v_{jj} + 1/2\ \Sigma\ F_i v_{ii} + \Sigma\ F_j v_{ji}$

Les 2 expressions du potentiel sont égales :

$$\boxed{\Sigma\ F_i v_{ij} = \Sigma\ F_j v_{ji}}$$

Théorème : ***Le travail du système de forces F_i pour les déplacements provoqués par le système de forces F_j est égal au travail du système F_j pour les déplacements provoqués par F_i.***

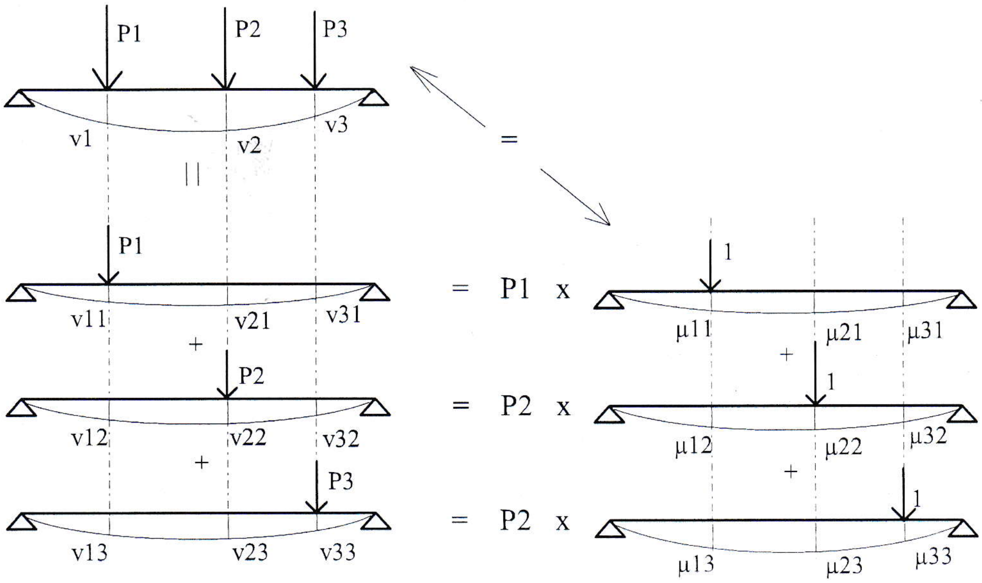
Exemple :



$P.\ y12 = P.\ y21$

$y12 = y21$

Coefficients d'influence (déplacements sous l'action d'une charge unité) :



$v_i = \mu_{i1}.P_1 + \mu_{i2}.P_2 + \mu_{i3}.P_3 = \Sigma\ \mu_{ij}.P_j$

D'après Maxwell on a $\mu_{ij} = \mu_{ji}$

Cette méthode est utilisée pour le tracé des lignes d'influence.

D. Théorème de CASTIGLIANO

Cherchons une méthode simple pour calculer les déplacements.

Forces appliquées : $\mathbf{P_1, P_2 \ldots P_i \ldots P_n}$

Points d'application : $\mathbf{A_1, A_2 \ldots A_i \ldots A_n}$

Le déplacement de $\mathbf{A_i}$ sous l'effet d'une force unité appliquée en :

$\mathbf{A_1}$ dans la direction de $\mathbf{P_1}$ est μ_{i1}

$\mathbf{A_2}$ " " $\mathbf{P_2}$ " μ_{i2}

$\mathbf{A_i}$ " " $\mathbf{P_i}$ " μ_{ii}

$\mathbf{A_n}$ " " $\mathbf{P_n}$ " μ_{in}

Le déplacement de $\mathbf{A_i}$ dû à toutes les forces $\mathbf{P_1 \ldots P_n}$ est $\mathbf{v_i}$.

$$v_i = \mu_{i1}.P_1 + \mu_{i2}.\ P_2 + \ldots + \mu_{ii}.\ P_i + \ldots + \mu_{in}.\ P_n$$

$$v_1 = \mu_{11}.P1 + \mu_{12}.P_2 + \ldots + \mu_{1j}.\ P_j + \ldots + \mu_{1n}.\ P_n$$

$$v_j = \mu_{j1}.\ P_1 + \mu_{j2}.\ P_2 + \ldots + \mu_{jj}.\ P_j + \ldots + \mu_{jn}.P_n$$

D'après le théorème de Clapeyron : $\mathbf{W = 1/2\ \Sigma\ P_i\ v_i}$

$$W = 1/2(v_1P_1 + v_2P_2 + \ldots + v_i.P_i + \ldots + v_j.P_j + \ldots + v_n.P_n)$$

Ce qui peut s'écrire, avec les coefficients d'influence, sous la forme :

$$W = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{l}
\mu_{11}.P_1.P_1 + \mu_{12}.P_1.P_2 + .. + \mu_{1i}.P_1.P_i + .. + \mu_{1n}.P_1.P_n \\
\mu_{21}.P_2.P_1 + \mu_{22}.P_2.P_2 + .. + \mu_{2i}.P_2.P_i + .. + \mu_{2n}.P_2.P_n \\
. \\
. \\
\mu_{i1}.P_i.P_1 + \mu_{i2}.P_i.P_2 + .. + \mu_{ii}.P_i.P_i + .. + \mu_{in}.P_i.P_n \\
. \\
. \\
\mu_{n1}.P_n.P_1 + \mu_{n2}.P_n.P_2 + .. + \mu_{ni}.P_n.P_i + .. + \mu_{nn}.P_n.P_n
\end{array}\right|$$

Faisons varier P_i en gardant les autres forces constantes et calculons

la dérivée partielle de W par rapport à P_i et en remarquant que :

$$\frac{\delta(\mu_{1i}P_1P_i)}{\delta P_i} = \mu_{1i}.P_i \qquad \text{et que} \qquad \mu_{i1} = \mu_{1i}$$

$$\frac{\delta W}{\delta P_i} = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{l}
0 + 0 + \ldots + \mu_{1i}.P_1 + 0 \\
\mu_{2i}.P_2 \\
. \\
. \\
\mu_{i1}.P_1 + \mu_{i2}.P_2 + \ldots + 2\mu_{ii}.P_i + \ldots + \mu_{in}.P_n \\
. \\
. \\
0 + 0 + \ldots + \mu_{ni}.P_n + 0
\end{array}\right|$$

$$\frac{\delta W}{\delta P_i} = \mu_{i1}.P_1 + \mu_{i2}.P_2 + \ldots + \mu_{ii}.P_i + \ldots + \mu_{in}.P_n = v_i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\delta W}{\delta P_i} = v_i}$$

Théorème : ***Le déplacement du point d'application d'une force quelconque, projeté sur la direction de cette force, est égal à la dérivée partielle, par rapport à cette force, du potentiel interne exprimé en fonction des forces appliquées.***

Le raisonnement est le même pour un couple : $\frac{\delta W}{\delta M_i} = \omega_i$

Remarque :

Le théorème de **Clapeyron** permet de calculer le déplacement du point d'application d'une force (projeté sur sa direction) lorsque cette force est unique. En effet :

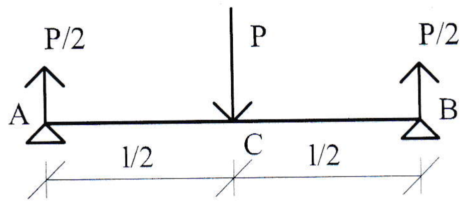
$$W = 1/2\ F.v \rightarrow v = 2W/F$$

Le théorème de **Castigliano** permet de calculer directement les déplacements projetés des points d'application des forces quel que soit leur nombre.

Applications :

a) Calcul de flèche sous charge concentrée :

Remarque **:** pour calculer $v = \frac{\delta W}{\delta P}$ avec $W = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}.dx$, il est en général plus facile de calculer : $\frac{\delta W}{\delta P} = \int M \frac{\delta M}{\delta P}.\frac{dx}{EI}$



$v_C = \frac{\delta W}{\delta P}$ et $W = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}.dx$

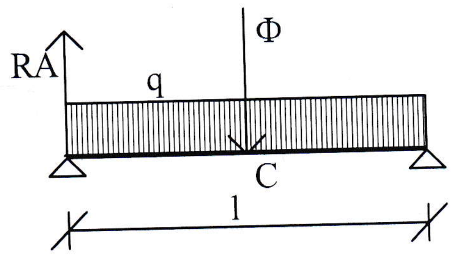
Compte tenu de la symétrie calculons :

$$W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} . dx \qquad \text{et} \qquad v_C = 2\int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta P} . \frac{dx}{EI}$$

avec ***EI*** constant, ***M = Px/2*** *et* ***δM/δP = x/2*** *on obtient :*

$$\boxed{v_C = \frac{Pl^3}{48EI}}$$

b) On peut aussi calculer le déplacement d'un point où n'agit aucune force en appliquant une force fictive Φ. On calcule l'énergie potentielle avec cette force, puis sa dérivée partielle et on fait tendre $\boldsymbol{\Phi}$ vers **0**. Cette méthode est pratique pour calculer les **<u>flèches sous charges réparties</u>** :



$$v_C = \frac{\delta W}{\delta \phi} \qquad \text{et} \qquad W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} . dx \qquad \text{en utilisant la symétrie}$$

$\boldsymbol{M(x) = R_A x - qx^2/2}$ et $\boldsymbol{R_A = \Phi/2 + ql/2}$

$$\frac{\delta M}{\delta \phi} = \frac{x}{2} \qquad \textbf{et} \qquad v_C = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta \phi} dx \qquad \text{on obtient :}$$

$$\boxed{v_C = \frac{5ql^4}{384EI}}$$

<u>Remarque sur le signe des déplacements</u> :

Par les formules de Bresse, ou par la double intégration, les déplacements dirigés vers le bas sont obtenues avec une valeur négative. Les méthodes énergétiques calculent des déplacement projetés sur les directions des forces qui en sont la cause. Leurs valeurs sont donc positives.

E. Théorème de MENABREA

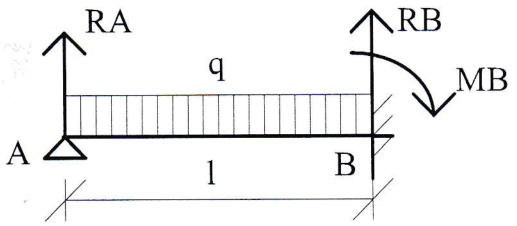
Appliquons le théorème de Castigliano à l'action de contact d'un appui. Le déplacement de cette force sur sa direction est nul si l'appui est fixe. Ce déplacement peut être perpendiculaire à la direction de la force s'il s'agit d'un appui glissant (et dans ce cas la force se déplace sans effectuer de travail). Donc :

Théorème : ***La dérivée partielle du potentiel interne d'une poutre par rapport à une action de contact surabondante est nulle :***

$$\boxed{\frac{\delta W}{\delta R_i} = 0}$$

Ce théorème s'applique pour un nombre quelconque d'appuis et permet de calculer les inconnues hyperstatiques.

Application : poutre encastrée-appuyée.



Calculons R_A avec Ménabréa : $\frac{\delta W}{\delta R_A} = 0$

M(x) = $R_A x - qx^2/2$, $\frac{\delta M}{\delta R_A} = x$

$$\frac{\delta W}{\delta R_A} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\delta M}{\delta R_A}.dx = 0\ ,$$

on obtient : $\boxed{R_A = \frac{3ql}{8}}$ (c'est plus rapide qu'avec Bresse...)

Remarque :

si on utilise la même méthode avec une poutre isostatique associée on obtient le même résultat :

$R_A = 3ql/8$.

Le théorème de Ménabréa ne s'applique qu'à des inconnues hyperstatiques .