TD2

Exercice 1 :

On considère une transmission 8-aire (alphabet de 8 symboles) en bande de base sur un canal AWGN de bande passante B= 70 kHz. Le bruit de canal à une densité spectrale de puissance constante $N_0/2$, le rapport (E_b/N_0) dB (E_b énergie par élément binaire sur N_0) est fonction du débit binaire D_b comme indiqué sur la figure ci-dessous.

1) Combien de bits porte chaque symbole transmis?

2) Pour annuler l'interférence entre symboles (IES), on utilise un filtrage en cosinus surélevé avec un facteur de retombée (Roll-Off) $\alpha = 0.4$. La durée T_s de chaque symbole doit alors vérifier : $\frac{1+\alpha}{2T_s} \leq B$

-Exprimer le débit maximal D_{max} sans IES en fonction de B et α puis le calculer.

3) On souhaite que la probabilité d'erreur par symbole n'excède pas 10^{-5}. D'après les courbes ci-dessous, le débit précédemment calculé permet-il d'atteindre cette performance ? Si non, quel doit être le débit ? Permet-il une transmission sans IES ?

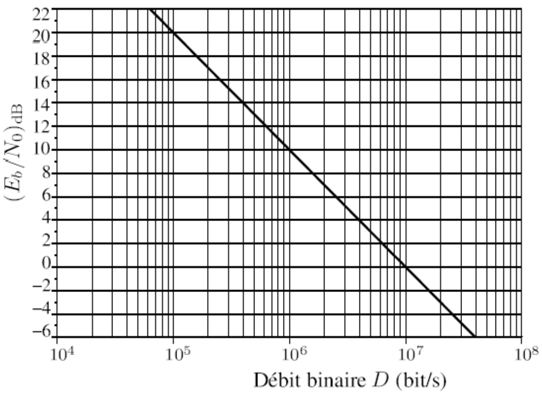


Fig. 1 – Rapport $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$ en fonction du débit D.

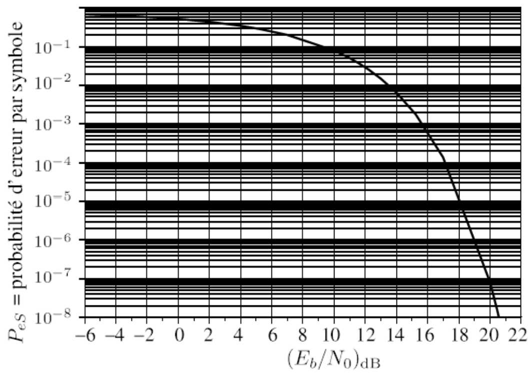


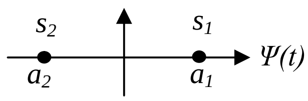
Fig. 2 – Probabilité d'erreur par symbole pour un code NRZ à symboles 8-aires.

Exercice 2 :

Soit un canal de communication AWGN. On émet des symboles binaires équiprobables. Pour chaque symbole émis s_i, le récepteur traite, après filtrage adapté et échantillonnage, un échantillon $z = s_i + b$, où b est une variable aléatoire de PDF (densité de probabilité) gaussienne définie par :

$p(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sigma_0}\right)^2\right)$ avec une moyenne nulle et de variance $\sigma_0{}^2 = \frac{N_0}{2}$, ($\frac{N_0}{2}$: la DSP du bruit).

La constellation de cette transmission est la suivante :



1- Exprimer les PDF conditionnelles $p(z/s_i)$ puis les tracées dans le même schéma.

2- Formuler la règle de décision utilisant le détecteur ML (Maximum de Vraisemblance) basant sur le critère MAP (Maximum a postériori) et la règle de Bayes.

3- Exprimer l'expression de la probabilité d'erreur par bit P_B en fonction de d_{12} (la distance entre les deux point s_1 et s_2) et N_0. Faire l'application numérique dans le cas : $a_1=2$, a_2=-2 et N_0=2.

Formules utiles :

La fonction d'erreur Q(z) : $\mathrm{Q}(z)=\int_{z}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$

Tableau pour calculer la fonction Q :

z	Q(z)	z	Q(z)	z	Q(z)
0.0	0.5	1.0	0.15866	2.0	0.02275
0.1	0.46017	1.1	0.13567	2.1	0.01785
0.2	0.42074	1.2	0.11507	2.2	0.01390
0.3	0.38029	1.3	0.09680	2.3	0.01072
0.4	0.34458	1.4	0.08076	2.4	0.00820
0.5	0.30854	1.5	0.06681	2.5	0.00620
0.6	0.27425	1.6	0.05480	2.6	0.00466
0.7	0.24196	1.7	0.04457	2.7	0.00347
0.8	0.21186	1.8	0.03593	2.8	0.00256
0.9	0.18406	1.9	0.02872	2.9	0.00187

Notations des probabilités utilisées :

$p(s_i)$: les probabilités *a priori*,

$p(s_i/z)$: les probabilités *a postériori*

$p(z)$: la probabilité de l'échantillon reçu

$p(z/s_i)$: les PDFs conditionnelles du signal reçu

$p(e,s_i)=p(e/s_i)p(s_i)$: la probabilité d'erreur

Théorème de Bayes : $p(s_i/z)=\frac{p(z/s_i)p(s_i)}{p(z)}$