Chapitre 4

Mesure produit, image d'une mesure : définitions et résultats

Soit $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On notera π_i la projection de $X_1 \times X_2$ sur $X_i\,(i = 1, 2)$. Si f est une application de $X_1 \times X_2$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on notera $f(x_1, .)$ l'application $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ de X_2 dans $\overline{\mathbb{R}}$, appelée section de f suivant x_1. On définit de même $f(., x_2)$

4.1 Mesure de produit

Rppellons que la tribu de produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur $X_1 \times X_2$ est la tribu engendrée par R, l'ensemble des rectangles de $X_1 \times X_2$ (Voir ch1).

Proposition 4.1. [6] : *Les projections $\pi_i\,(i = 1, 2)$ sont des applications $\mathcal{A}_i-$ mesurables. De plus si une tribu $\mathcal{B}$ sur $X_1 \times X_2$ rend $\pi_i\,(i = 1, 2)$ des applications $\mathcal{A}_i-$ mesurables, alors $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$.*

Proposition 4.2. [6] : *Soit $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable, st soit $f = (f_1, f_2)$ une fonction de $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. f est mesurable si et seulement si f_1, f_2 sont mesurables.*

Proposition 4.3. [6] : *Soit $C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ Les sections $C_1 = \{x_2 : (x_1, x_2) \in C\}, C_2 = \{x_1 : (x_1, x_2) \in C\}$ sont des ensembles mesurables.*

Corollaire 4.1. [6] : *Les sections $f(x_1, .), f(., x_2)$ d'une fonction numérique mesurable f sont des fonctions mesurables.*

Définition 4.1. *Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est $\sigma-$ fini s'il existe une suite croissante $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant :*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad\qquad \mu(A_n) < +\infty, \forall n \geq 1.$$

Théorème 4.1. [*mesureproduit*] [6, 16] : *Suppposons que $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ sont $\sigma-$ finis.*

1. *Il existe un mesure unique $\sigma-$ fini $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ vérifiant :*

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 : (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1).\mu 2(A_2).$$

2. *Pour tout $C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : (\mu_1 \otimes \mu_2)(C) = \int_{X_1} \mu_2(C_1) d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(C_2) d\mu_2$*

Remarque 4.1. [6]

1. *On peut généraliser la mesure produit sur le des espaces mesurés $\sigma-$ finis $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)\,(i = 1 \ldots n)$, et en remarquant que la tribu prduit, et la mesure produit sont associatives.*
2. *En utilise la méthode précédante pour construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ comme une prosuit de n mesures de Lebesgues sur $\mathbb{R}$.*

4.2 Théorème de Fubini et conséquences

Il y a deux versions du théorème de Fubini : l'une pour les fonctions positives, et l'autre pour les fonctions intégrables :

Théorème 4.2. $[Fubini - Tonelli]$[6] *Soient f une fonction mesurable de $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. Supposons que μ_1, μ_2 sont $\sigma-$ finies. Alors :*

1. *Les fonctions $x_1 \longmapsto \displaystyle\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2, x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1$ sont respectivement $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ mesurables.*
2. $\displaystyle\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_1 \right) d\mu_2.$

Exemple 4.1. [2, 6] *Soit f une fonction intéfrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, et soit F la fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Alors, pour tout $a > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{F(ax) - F(x)}{x} = \ln a \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Théorème 4.3. $[Fubini - Lebesgue]$[2, 6, 16] *Soient f une fonction intégrable de $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que μ_1, μ_2 sont $\sigma-$ finies. Alors :*

1. *Les fonctions $f(x_1, .), f(.n, x_2)$ sont intégrables respectivement μ_1- ppt, μ_2- ppt.*
2. *Les fonctions $x_1 \longmapsto \displaystyle\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2, x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1$ sont définies respectivement μ_1- ppt, μ_2- ppt, et intégrables.*
3. $\displaystyle\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_1 \right) d\mu_2.$

Remarque 4.2. [6] *L'hypothèse d'intégrabilité de la fonction f dans le théorème précédant est crucial.*
Par exemple : *$f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ de $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.*
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = 0 \qquad \int_0^1 f(x, y) dy = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = 0 \qquad \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx > 0.$
Donc : $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy \neq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$

4.3 Image d'une mesure, changement de variable

Soit $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, et T une application mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{B})$.

Proposition 4.4. [2] *L'application $B \in \mathcal{B} \longmapsto \mu(T^{-1}(B))$ est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$, appelée la mesure image par T de la mesure μ, on la note par μ_T ou $\mu(T)$.*

Théorème 4.4. $[Transfert]$ [2]

1. *Si f est une fonction mesurable, positive de $(Y, \mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, alors $f \circ T$ est mesurable.*
2. *Si $f \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{B}, \mu_T)$, alors $f \circ T \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

De plus, on a :

$$\int_Y f(y)d\mu_T = \int_X f(T(x))d\mu$$

Théorème 4.5. *[Changement de variable dans $\mathbb{R}^n$] [2] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, T un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $T(U)$, et f une application mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Notons par $J_{T^{-1}}(v)$ la valeur de Jaccobien de T^{-1} au point $v \in T(U)$.*

1. *Si f est une fonction positive, alors $f \circ T^{-1}$ est mesurables sur $T(U)$.*
2. *Si f est intégrable sur U, alors $f \circ T^{-1}$ est intégrable sur $T(U)$.*

De plus, on a :

$$\int_U f(u)du = \int_{T(U)} f(T^{-1}(v))|J_{T^{-1}}(v)|dv$$

Corollaire 4.2. *citeAncel Soit T un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout partie mesurable $A \subset \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\lambda_T(A) = \int_{\mathbb{R}^n} f(T^{-1}(v))|J_{T^{-1}}(x)|\chi_A(x)dx$$

Proposition 4.5. *[2] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et ρ une application positive, $\mu-$ intégrable. Pour toute fonction f $(\rho.\mu)-$ intégrable, $f\rho$ est $\mu-$ intégrable et on a :*

$$\int_X fd(\rho.\mu) = \int_X f\rho d\mu$$