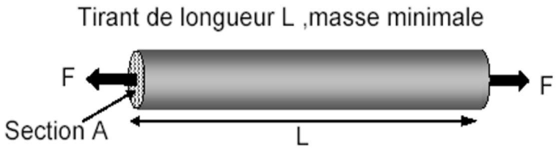
Solutions exercices _cours2

Génie des matériaux

Exercice 1 (résistance-légère)

Une barre cylindrique de longueur donnée (l) capable de supporter une force de traction F **sans casser** et qui doit être la plus légère possible.

La performance signifie (minimiser la masse en supportant la charge F sans se casser.



Fonction : Barre de traction (de section A)

Objectifs : poids minimum.

$$m = \rho . A . l$$

m : masse (kg).
ρ : poids volumique (kg/m^3).
l : longueur de la barre (m).

Contraintes :

- Longueur (l) spécifiée.
- Supporter la charge F.

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_f$$

σ_f : résistance à la rupture du matériau.
Variables libres : La section : A

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_f \Rightarrow F \leq A.\sigma_f \Rightarrow \frac{F}{\sigma_f} \leq A \Rightarrow A \geq \frac{F}{\sigma_f} \qquad (1)$$

Sachant

$$m = \rho . A . l \Rightarrow A = \frac{m}{\rho . l} \qquad (2)$$

L'équation (1) devient :

$$\frac{m}{l.\rho} \geq \frac{F}{\sigma_f}$$

$$m \geq \frac{F}{\sigma_f} . l . \rho$$

$$m \geq F.l.\frac{\rho}{\sigma_f}$$

Minimiser la masse revient à écrire :

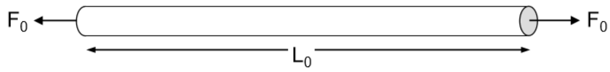
$$m = F.l.\frac{\rho}{\sigma_f}$$

Pour avoir une masse minimale, on doit minimiser $\frac{\rho}{\sigma_f}$ ou maximiser $\frac{\sigma_f}{\rho}$

Définissant ainsi l'indice de performance IP

$$IP = \frac{\sigma_f}{\rho}$$

Exercice 2 : Rigidité-légèreté



Une barre sollicitée en traction, devant avoir une rigidité donnée (c'est-à-dire ne s'allongeant pas de plus de ε_0) et possédant une masse minimale.

Fonction : Barre de traction (de section A).
Objectif : Masse minimale : m

$$m = \rho.A.l \tag{3}$$

m : masse (kg).
ρ : poids volumique (kg/m^3).
l : longueur de la barre (m).

Contraintes :

- Déformation imposée : ε_0

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A.E} \leq \varepsilon_0 \tag{4}$$

- Longueur imposée : L_0

Variables libres : La section : A

La variable libre A

$$A = \frac{m}{\rho l} \tag{5}$$

En remplaçant (5) en (4) :

$$\frac{\rho.l.F}{m.E} \leq \varepsilon_0$$

$$\rho.l.F \leq \varepsilon_0.m.E$$

$$\frac{\rho . l . F}{\varepsilon_0 . E} \leq m$$

$$m \geq \frac{F}{\varepsilon_0 .} . l . \frac{\rho}{E}$$

La section minimale pour une déformation de la barre limitée à ε_0 est donc :

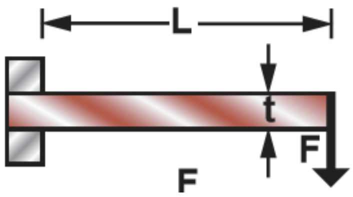
$$m_{min} = \frac{F}{\varepsilon_0 .} . l . \frac{\rho}{E}$$

Le matériau qui donnera une masse minimale est celui qui maximise $IP = \frac{E}{\rho}$.

Exercice 3 : Rigidité-légèreté

Une poutre circulaire en flexion, montrée sur la figure 1, notre objectif c'est de choisir un matériau à haute rigidité-léger pour ce système :
Objectif : barre à haute **rigidité-légère**
Variables libre : le diamètre et le matériau
Contraintes : la longueur de la barre (L), la flèche(δ).

$\delta = \frac{FL^3}{3EI}$; $I = \frac{\pi . d^4}{64}$



- Déterminer l'indice de performance de système ?

Solution

Fonction : Barre en flexion (de section A).
Objectif : haute rigidité, Masse minimale : m

$$m = \rho . A . L \Rightarrow m = \rho . \frac{\pi . D^2}{4} . L \qquad (6)$$

m : masse (kg).
ρ : poids volumique (kg/m^3).
l : longueur de la barre (m).
D : diamètre de la barre (m).

Contraintes :
- Longueur L de la barre imposée.

Variables libres : le diamètre de la barre (D).

Sachant

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

$$m = \rho.\frac{\pi.D^2}{4}.L$$

La variable libre étant (D) et on a :

$$F = \frac{3.E.I.\delta}{L^3}$$

$$F = \frac{3.E.\pi.D^4.\delta}{64.L^3}$$

$$D^2 = \left(\frac{64.L^3}{3.E.\pi.\delta}\right)^{1/2}$$

En remplace la valeur du diamètre dans l'équation (6) :
La fonction performance (m) est donnée par ce qui suit

$$m = \rho.\frac{\pi}{4}.L.\left(\frac{64.L^3}{3.E.\pi.\delta}\right)^{1/2}$$

$$m = \left(\frac{\pi}{4}.\frac{8}{\sqrt{3\pi}}\right).\left(\frac{F}{\delta}\right).L^{\frac{5}{2}}.\left(\frac{\rho}{\sqrt{E}}\right)$$

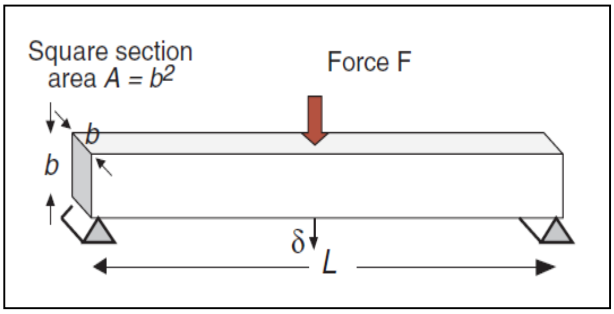
Minimiser la masse revient à maximiser $\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho}\right)$

Exercice 4 : Résistance-légèreté

Une poutre en flexion, montrée sur la figure 1, notre objectif c'est de choisir un matériau à haute résistance-léger pour ce système :

Fonction : poutre à haute **résistance-légère.**
Objectif : poids minimum.
Variables libres : section (A) et le matériau
Contraintes : la longueur de poutre (L).

$$F = \frac{C.I.\sigma}{Y_m.l}\ ;\ I = \frac{b.b^3}{12}\ ;\ Y_m = \frac{b}{2}$$



- Déterminer l'indice de performance de système ?

Solution

Fonction : poutre à haute **résistance-légère.**
Objectif : poids minimum
Variables libres : section (A) et le matériau
Contraintes : la longueur de poutre (L).
Supporter une charge en flexion F sans endommagement.

$$F = \frac{C.I.\sigma}{Y_m.l}\ ;\ I = \frac{b.b^3}{12}\ ;\ Y_m = \frac{b}{2}$$

$$\frac{I}{Y_m} = \frac{\frac{b^4}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b^3}{6} = \frac{A^{3/2}}{6}$$

$$F = \frac{C.I.\sigma}{Y_m.l}$$

$$F = \frac{C.A^{3/2}.\sigma}{6.l}$$

$$A = \left(\frac{6F.l}{c.\sigma}\right)^{2/3}$$

Nous avons la masse est donnée par la relation suivante

$$m = A.l.\rho$$

$$m = \left(\frac{6F.l}{c.\sigma}\right)^{2/3} .l.\rho$$

$$m = \left(\frac{6F}{C}\right)^{2/3} .l^{5/3}.\frac{\rho}{\sigma^{2/3}}$$

Indice de performance : minimiser le poids revient à minimiser la quantité $\frac{\rho}{\sigma^{2/3}}$ ou à maximiser la quantité $\frac{\sigma^{2/3}}{\rho}$, qui est l'indice de performance.

$$IP = \frac{\sigma^{2/3}}{\rho}$$

Exercice 5 : Rigidité-légèreté

Determiner l'indice de performance pour une colonne de rayon (r) rigide et bon marché et légère.

Solution

Fonction : colonne.
Objet : faible coût.
Contraintes :

- Longueur de la colonne est imposée.
- Supporter une charge sans flambage.

Variable libre : la surface A

$$F_{crit} = \frac{n^2.\pi^2.E.I}{l^2}$$

L’indice de coût est C

$$C = A.l.C_m.\rho$$

c_m : coût pour 1 kg de ce matériau.

Pour supporter la charge sans flambage il faut que :

$$F \leq F_{crit} = \frac{n^2.\pi^2.E.I}{l^2}$$

Le moment de la section

$$I = \frac{\pi.r^4}{4} = \frac{A^2}{4.\pi}$$

Et

$$A = \frac{C}{l.C_m.\rho}$$

Donc

$$F \leq F_{crit} = \frac{n^2.\pi^2.E.A^2}{l^2.4.\pi}$$

$$F \leq \frac{n^2.\pi^2.E.A^2}{l^2.4.\pi}$$

$$l^2.4.\pi.F \leq n^2.\pi^2.E.A^2$$

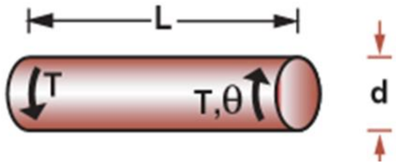
$$l^2.4.\pi.F \leq n^2.\pi^2.E.\left(\frac{C}{l.C_m.\rho}\right)^2$$

$$C \geq \left(\frac{l^2.4.\pi.F.l^2.{C_m}^2.\rho^2}{n^2.\pi^2.E}\right)^{1/2}$$

$$C \geq \frac{4.}{n^2.\pi}.F.l^4.\frac{C_m.\rho}{\sqrt{E}}$$

L’indice de performance est $\frac{\sqrt{E}}{C_m.\rho}$

Exercice 6 : Rigidité-légèreté
Arbre rigide et léger



Fonction : doit supporter une charge de torsion
Objectif : minimiser la masse
Contrainte : l'angle de torsion (θ) provoqué par un couple donné T ne doit pas dépasser un certain niveau.
Avec

$$\theta = \frac{L.T}{K.G}$$

θ : angle de torsion (rad).
L : longueur de l'arbre (m).
T : le couple (N.m)
K : est le moment d'inertie polaire (m^4).
G : module de cisaillement (N/m^2)

$$S = \frac{T}{\theta}$$

S : rigidité en torsion.

Solution

$$S = \frac{T}{\theta} = \frac{K.G}{L}$$

L'angle de torsion (θ) provoqué par un couple donné T ne doit pas dépasser un certain niveau.

$$S \leq S_{CR} = \frac{K.G}{L}$$

Puisque

$$K = \frac{\pi.D^4}{32} = \frac{16.\pi.r^4}{32} = \frac{\pi.r^4}{2} = \frac{A^2}{2.\pi}$$

$$S = \frac{K.G}{L} = \frac{A^2.G}{2.\pi.L} \Rightarrow A = \left(\frac{2.\pi.L.S}{G}\right)^{1/2}$$

L'expression de la masse est donnée :

$$m = A.L.\rho$$

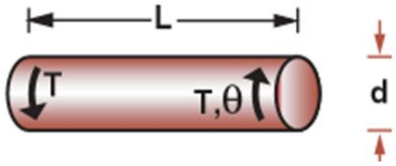
En remplace l'expression de la surface A dans l'équation de performance

$$m = \left(\frac{2.\pi.L}{G}\right)^{1/2}.L.\rho$$

$$m = (2.\pi.S)^{1/2}.L^{3/2}.\frac{\rho}{G^{1/2}}$$

Minimiser la masse revient à maximiser l'indice de performance $\boldsymbol{\frac{G^{1/2}}{\rho}}$

Exercice 7 : Rigidité-légèreté
Arbre rigide et léger



Fonction : doit supporter une charge de torsion
Objectif : minimiser la masse
Contrainte : l'angle de torsion (θ) provoqué par un couple donné T ne doit pas dépasser un certain niveau.
Avec

$$\tau = \frac{T.r_m}{J}$$

$$\tau = \frac{\sigma_y}{2}$$

Solution

$$\tau = \frac{T.r_m}{J}$$

$$\tau = \frac{T}{Q}$$

$$Q = \frac{J}{r_m} \Rightarrow Q = \frac{\pi.r^4}{32.r_m} \Rightarrow Q = \frac{\pi.r^3}{2} \Rightarrow Q = \frac{A^{3/2}}{2.\sqrt{\pi}}$$

$$\tau = \frac{T}{Q} \Rightarrow T = \tau.Q \Rightarrow T = \tau.\frac{A^{3/2}}{2.\sqrt{\pi}} \Rightarrow \ T = \frac{\sigma}{2}.\frac{A^{3/2}}{2.\sqrt{\pi}}$$

L'expression de la masse est donnée :

$$\mathrm{m = A.L.\rho}$$

$$\mathrm{m} = \left(4.\sqrt{\pi}.\mathrm{T}\right)^{3/2}.\mathrm{L}.\frac{\rho}{\sigma^{3/2}}$$

Minimiser la masse revient à maximiser l'indice de performance $\boldsymbol{\frac{\sigma^{3/2}}{\rho}}$

1.1. Procédure de choix de matériaux

1.1.1. Critère de maximisation des performances

Sur le diagramme module de Young (E)-Densité (ρ) en échelle logarithmique les indices de performances $\left({E^{1/2}}/{\rho}\right)$, $\left({E^{1/3}}/{\rho}\right)$ et $\left({E}/{\rho}\right)$… peuvent être représentés.

Dans le cas de l'exercice 1 où l'indice de performance est $\left({E}/{\rho}\right)$

Partant de la définition de l'indice de performance :

$$IP = \left({E}/{\rho}\right)$$

$$E = \rho.IP$$

$$logE = \log(\rho) + \log(IP) \quad (5)$$

L'équation (5) est une équation d'une droite de type

$$Y = \mathrm{a}\mathrm{X} + \mathrm{b}$$

Où :

Y=log(E).

X= log(ρ).

a : tangente de la droite (pente de la droite).

Construction des droites performances

$$\log(IP) = \log(E) - \log(\rho) \quad (6)$$

$$IP = 10^{\log(E) - \log(\rho)} \quad (7)$$

Exemple

Le module de Young E= 0.1GPa.

La masse volumique ρ =0.1 $Mg.m^{-3}$

$$IP = 10^{\log(0.1) - \log(0.1)}$$

$IP = 1$ Voir sur la figure de la droite *IP =1*

Un récapitulatif de quelques droites d'équipé performance est donnée dans le tableau qui suit.

Masse volumique ρ $Mg.m^{-3}$	**0,10**	**0,10**	**0,10**	**0,10**	**0,10**
Module de Young E **GPa**	0,01	0,10	1,00	10,00	20,00
Log(ρ)	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00
Log(E)	-2,00	-1,00	0,00	1,00	1,30
Log(E)- Log(ρ)	-1,00	0,00	1,00	2,00	2,30
$IP=10^{\log(E)-\log(\rho)}$	0,10	1,00	10,00	100,00	200,00

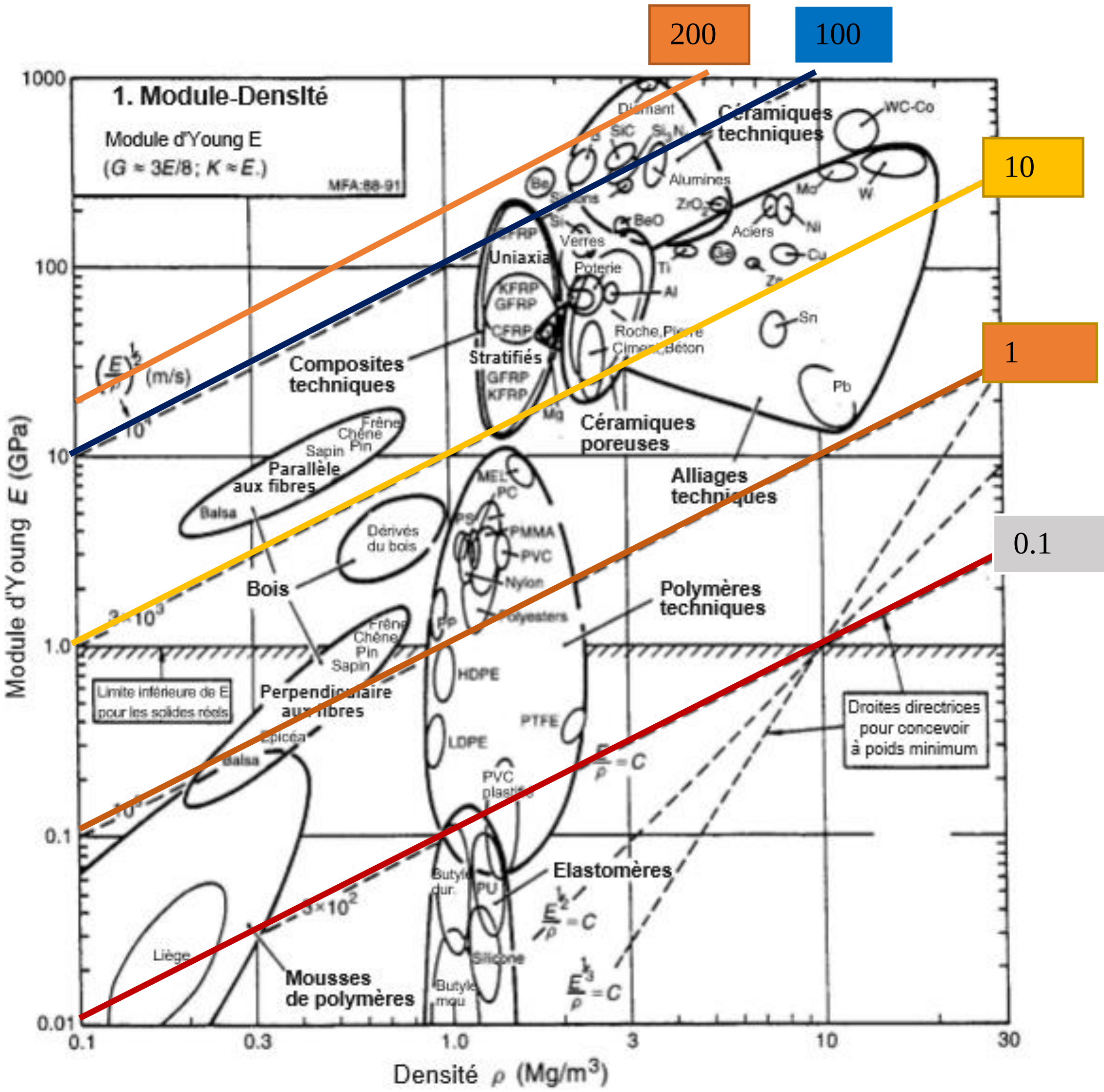
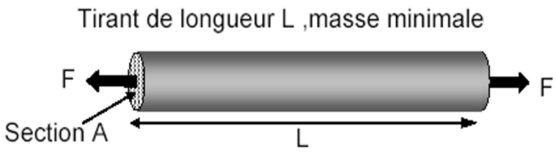


Figure 2 : Digramme E-ρ

Exercice 08 : Rigidité-légèreté

Une barre cylindrique de longueur donnée (l) capable de supporter une force de traction F **sans casser** et qui doit être la plus légère possible.

La performance signifie (minimiser la masse en supportant la charge F sans se casser.



Fonction : Barre de traction (de section A)

Objectifs : poids minimum.

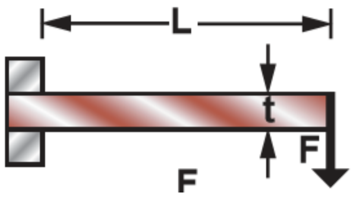
Solution l'indice de performance étant $IP = \frac{E}{\rho}$

Sur le diagramme (E-ρ), les matériaux les plus performants (qui ayant un grand indice de performance) sont :

- CFRP : polymère renforcés par les fibres de carbone (carbon fibre renforced polymer).
- B_4C : carbure de bore (température de fusion 2350°c, ébullition 3500°c).
- Si_3N_4 : nitrure de silicium : céramique les plus dure et aussi les plus résistants.

Exercice 09 : Rigidité-légèreté

Une poutre circulaire en flexion, montrée sur la figure 1, notre objectif c'est de choisir un matériau à haute rigidité-léger pour ce système :
Objectif : barre à haute **rigidité-légère**
Variables libre : le diamètre et le matériau
Contraintes : la longueur de la barre (L), la flèche(δ).



L'indice de performance étant $IP = \frac{\sqrt{E}}{\rho}$

$$IP = \frac{\sqrt{E}}{\rho} \Rightarrow \rho.IP = \sqrt{E} \Rightarrow \log(\rho) + \log(IP) = \frac{1}{2}\log(E)$$

$$\log(E) = 2\log(\rho) + 2\log(IP)$$

Cette équation de type :

$$Y = 2X + \text{B}$$

Construction des droites performances

$$\log(IP) = \frac{\log(E) - 2\log(\rho)}{2} \quad (8)$$

$$IP = 10^{\frac{\log(E) - 2\log(\rho)}{2}} \quad (9)$$

Exemple

Le module de Young E= 0.01GPa.

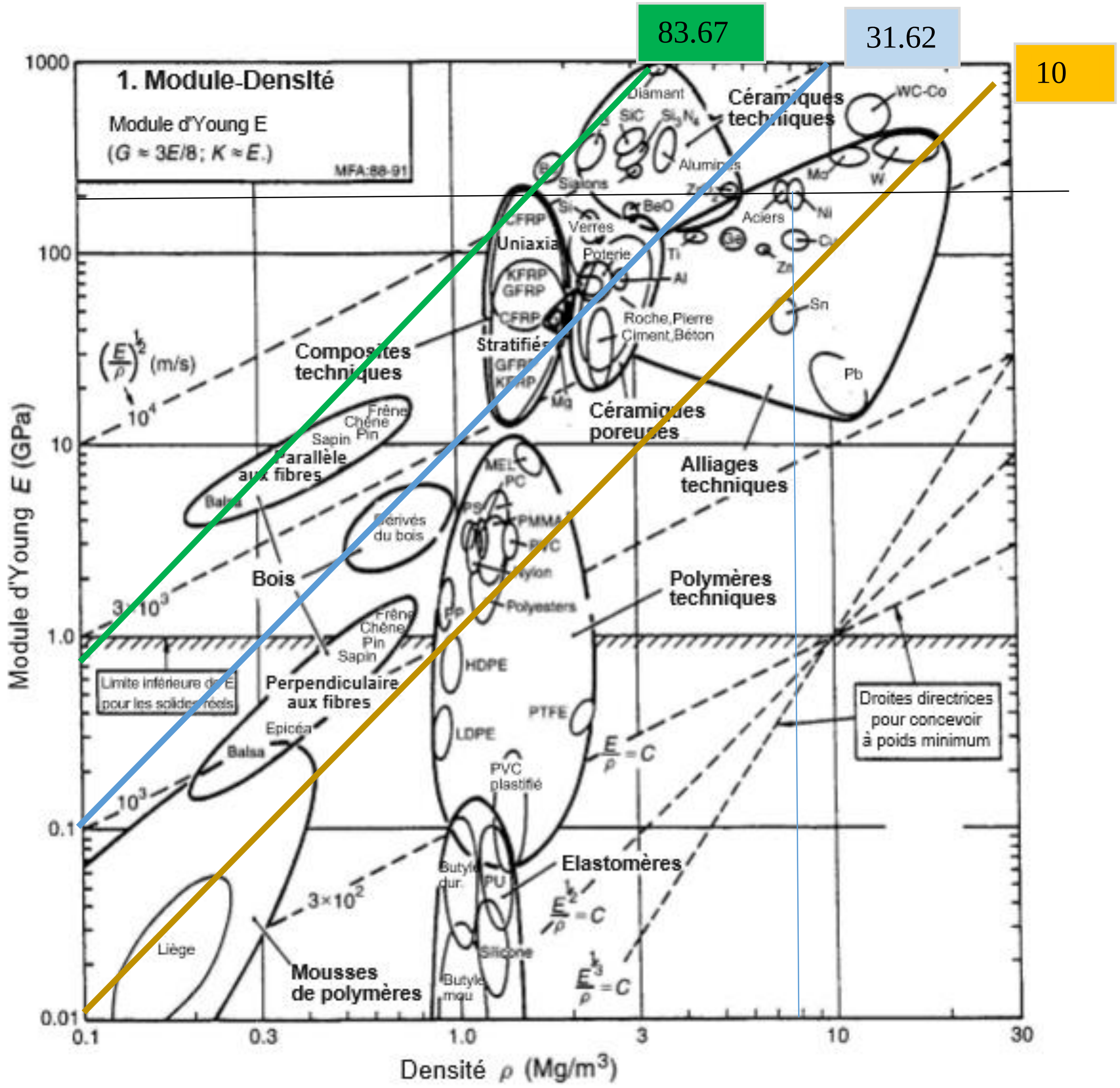
La masse volumique ρ =0.1 $Mg.m^{-3}$

$$IP = 10^{\frac{\log(0.01) - 2\log(0.1)}{2}}$$

$IP = 10$ Voir sur la figure de la droite $IP = 10$

Un récapitulatif de quelques droites d'équipé performance est donnée dans le tableau qui suit.

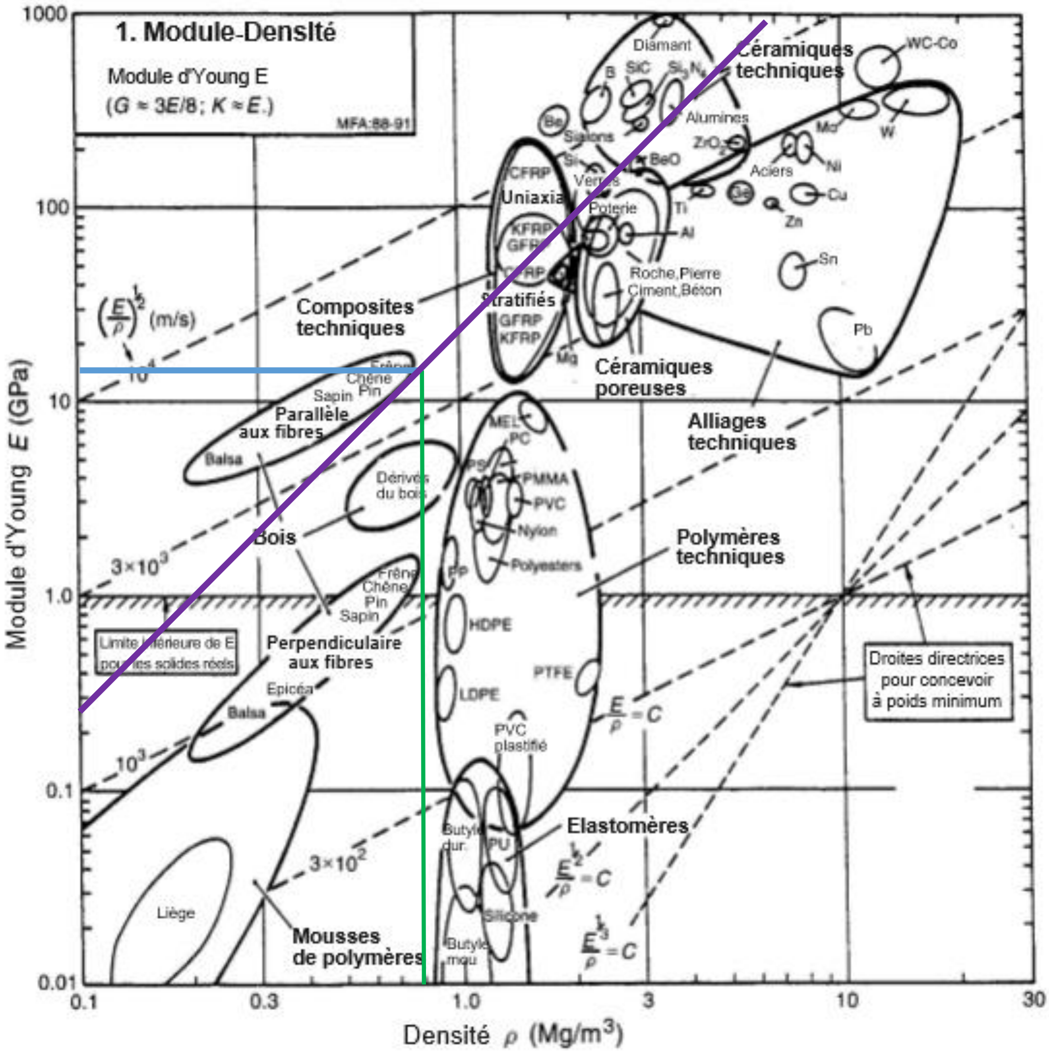
Masse volumique ρ **$Mg.m^{-3}$**	**0,10**	**0,10**	**0,10**
Module de Young E **GPa**	**0,01**	**0,10**	**0,70**
2Log(ρ)	-2,00	-2,00	-2,00
Log(E)	-2,00	-1,00	-0,15
A=[Log(E)- 2Log(ρ)]/2	1,00	1,50	1,92
IP=10^{A}	10,00	31,62	83,67



Mtériaux	E Gpa	Densité Mg/m3	IP	Coût ($)/ T
Acier	200	7,8	1,81	450
Bois	16	0,8	5,00	450
Béton	50	2,8	2,53	350
Aluminium	69	2,7	3,08	2000
CFRP	200	1,6	8,84	200 000

CFRP est le matériau le plus performant mais coûte cher, par conséquent le bois est le meilleur choix.

6.25


1. Module-Densité
Module d'Young E
(G ≈ 3E/8 ; K ≈ E.)
MFA:88-91
Module d'Young E (GPa)
Densité ρ (Mg/m3)
Céramiques techniques
Composites techniques
Bois
Parallèle aux fibres
Perpendiculaire aux fibres
Céramiques poreuses
Alliages techniques
Polymères techniques
Elastomères
Mousses de polymères
Limite inférieure de E pour les solides réels
Droites directrices pour concevoir à poids minimum
Diamant
WC-Co
Alumines
Aciers
Roche, Pierre Ciment, Béton
Liège
Balsa
Sapin
Pin
Chêne
Frêne
Epicéa
Dérivés du bois
Uniaxial
Stratifiés
CFRP
KFRP
GFRP
HDPE
LDPE
PTFE
PMMA
PVC
Nylon
Polyesters
PVC plastifié
Silicone
PU
Butyle dur
Butyle mou
Pb
Sn
Zn
Cu
Ni
Mo
W
Ti
Al
Mg
BeO
ZrO2
Sialons
Verres
Poterie