Université de Msila
Faculté Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique

Cours de Théorie des graphes

2eme année Informatique

Dr Nasser Eddine MOUHOUB

2015 / 2016

Chapitre II

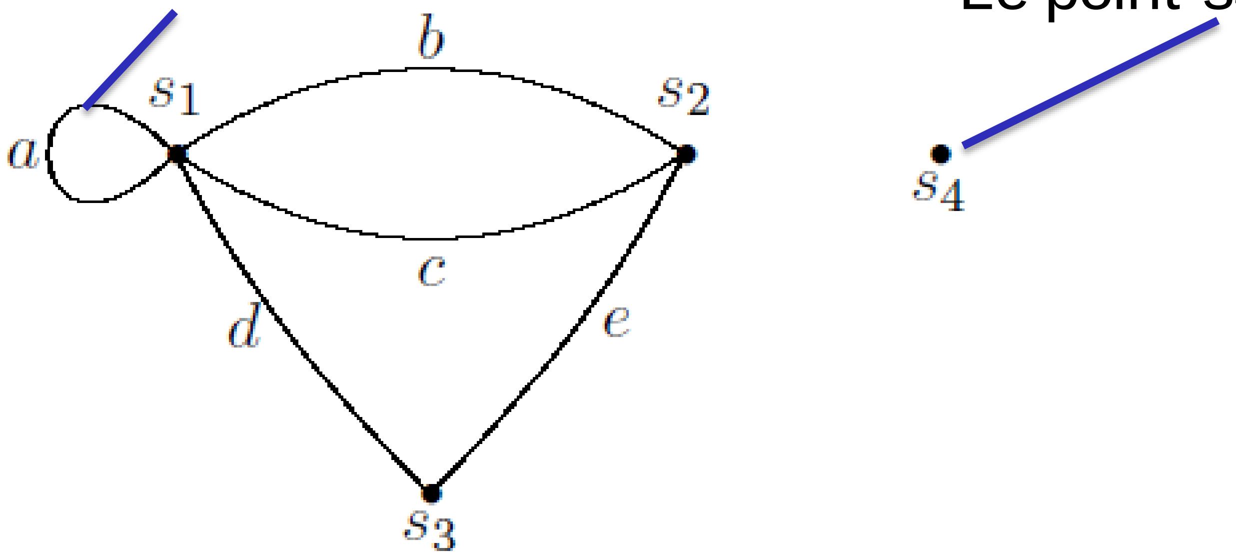
Définitions de base

- Vocabulaire de base : Graphes, sommets, arêtes
- Définition: Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ de points, appelés sommets, et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ d'arêtes, tels qu'à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S, appelés ses extrémités, et que nous noterons $[s_j , s_k]_i$
- s_j et s_k sont dits adjacents
- Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ;
- dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une boucle.
- Définition: L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.
- Définition: Un graphe est dit simple si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.
- Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités

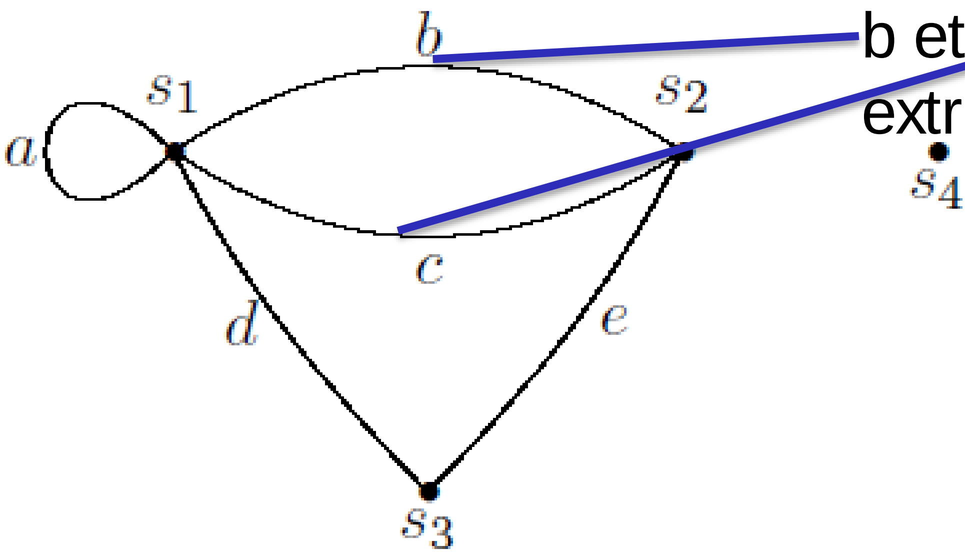
- Exemple : Considérons le graphe G_1 d'ordre 4 défini par :
- $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$
- tel qu'aux arêtes a, b, c, d, e soient respectivement
- associés $[s_1, s_1]$, $[s_1, s_2]$, $[s_1, s_2]$, $[s_1, s_3]$, $[s_2, s_3]$.
- Une représentation possible de ce graphe est :

l'arête a est une boucle

Le point s_4 est un point isolé ,

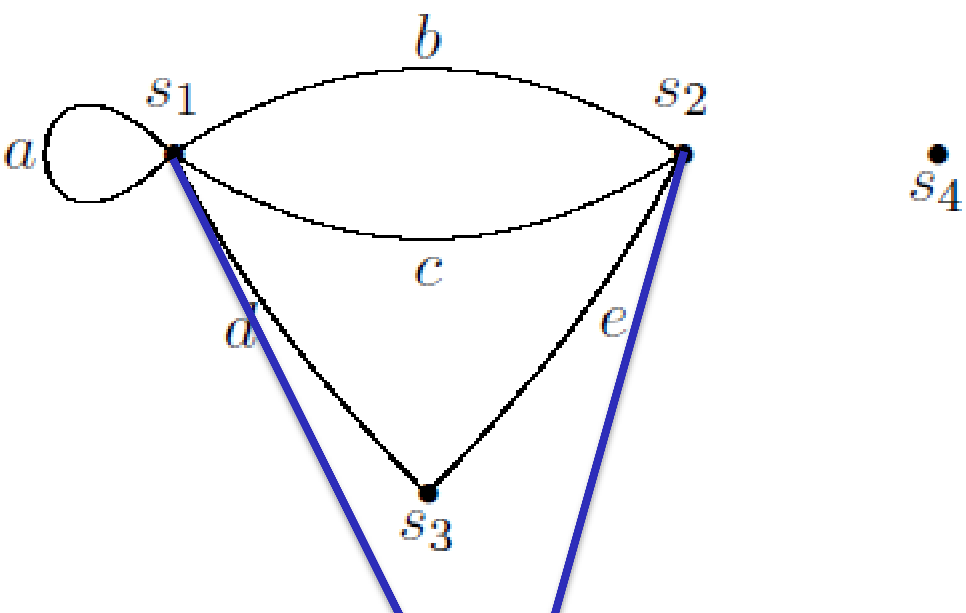


- Exemple : Considérons le graphe G_1 d'ordre 4 défini par :
- $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$
- tel qu'aux arêtes a, b, c, d, e soient respectivement
- associés $[s_1, s_1]$, $[s_1, s_2]$, $[s_1, s_2]$, $[s_1, s_3]$, $[s_2, s_3]$.
- Une représentation possible de ce graphe est :



b et c sont des arêtes ayant mêmes extrémités, $[s_1, s_2]$ est une arête multiple,

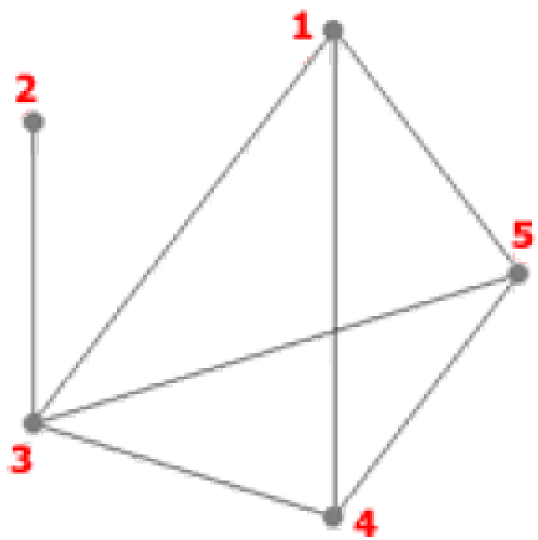
- Exemple : Considérons le graphe G_1 d’ordre 4 défini par :
- $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$
- tel qu’aux arêtes a, b, c, d, e soient respectivement
- associés $[s_1, s_1], [s_1, s_2], [s_1, s_2], [s_1, s_3], [s_2, s_3]$.
- Une représentation possible de ce graphe est :

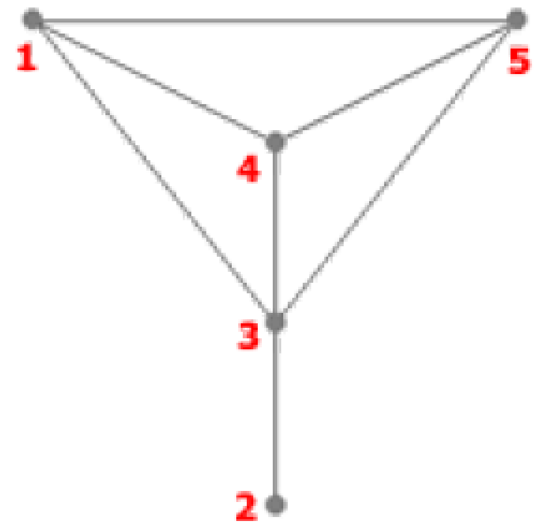


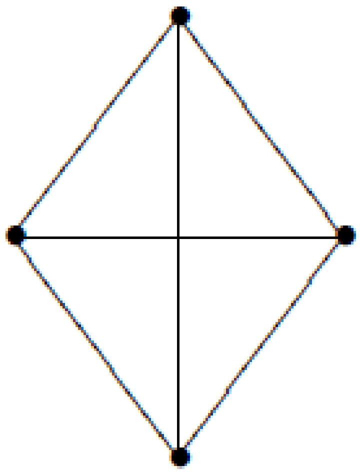
les sommets s_1 et s_2 sont adjacents,
ainsi que s_1 et s_3, puisqu’ils sont reliés par une arête.

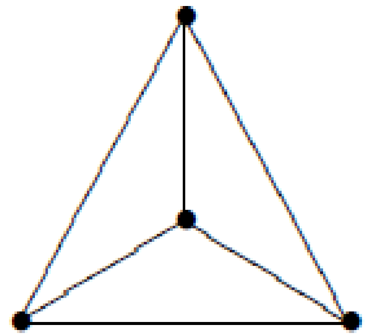
Représentation graphique

- Il existe une infinité de manières de représenter graphiquement un graphe.
- Exemple:
- Ensemble des sommets : $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
- Ensemble des arêtes :
- $E = \{ (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5) \}$

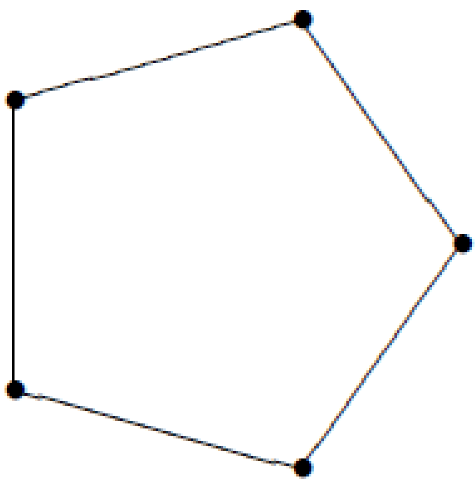


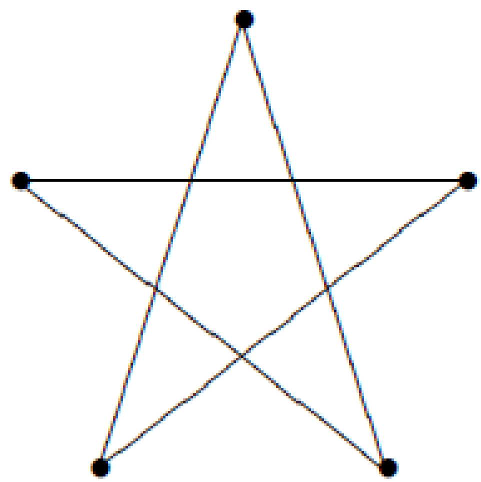






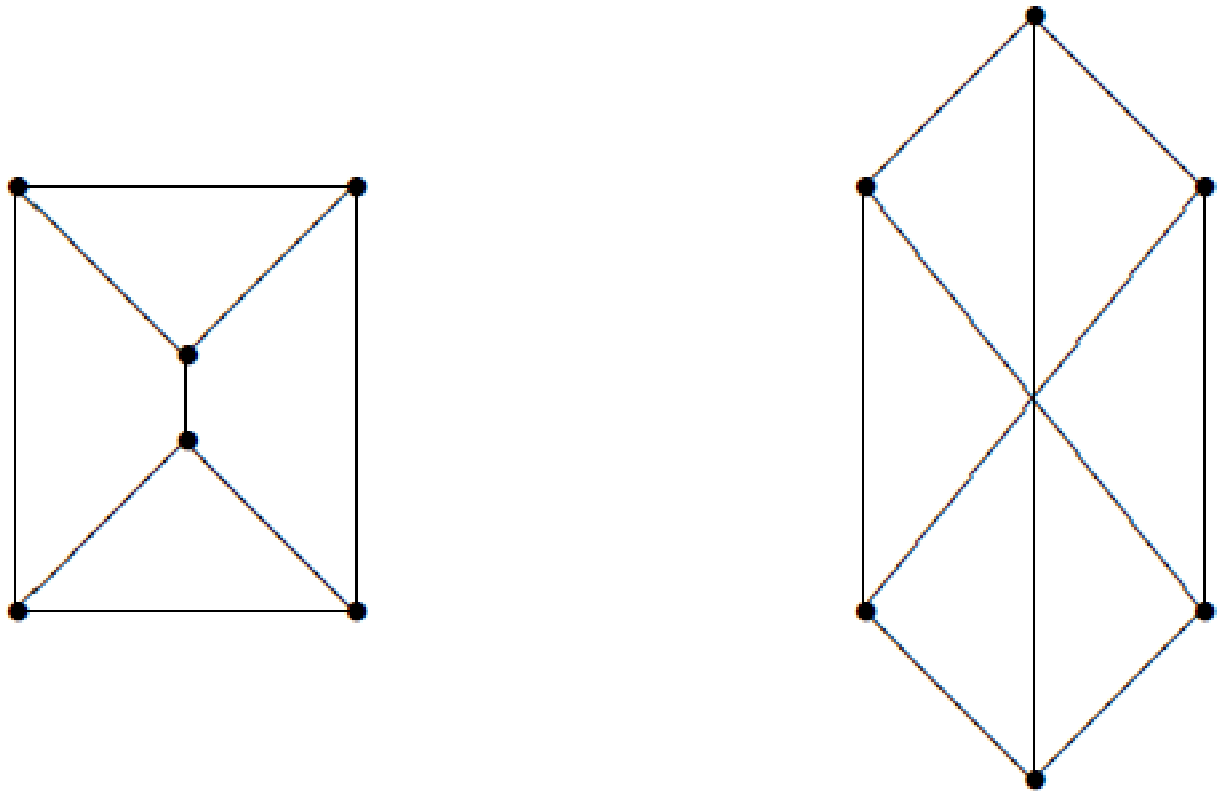
représentent le même graphe





représentent aussi
le même graphe

Est-ce que les deux dessins représentent le même graphe?

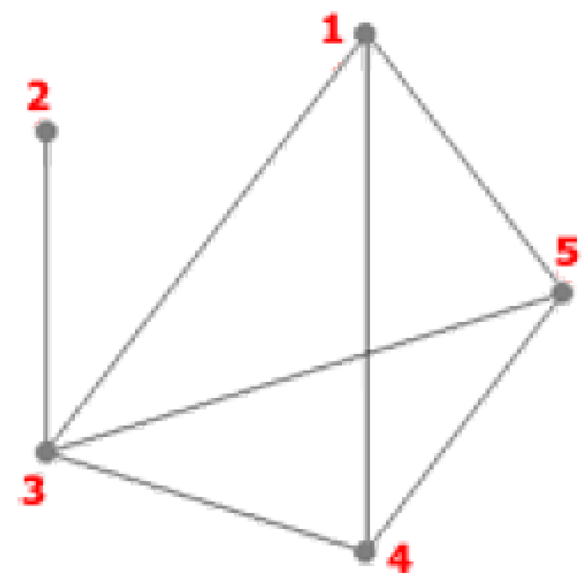


Définitions

- ✓ ***Si l'arête e*** relie les sommets *a et b, on dira que ces sommets sont* ***adjacents, ou incidents avec e,***

- ✓ On appelle **ordre d'un graphe le nombre de sommets (*n*)** ***de ce graphe.***

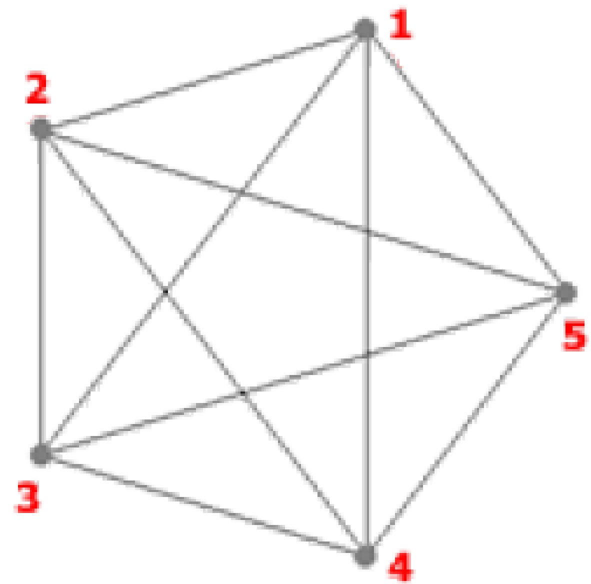
Ordre du graphe G = 5



Graphe *G*

- Un graphe simple est dit complet si tous ses sommets sont adjacents.
- On nomme un **graphe complet** à n sommets un K^n graphe.

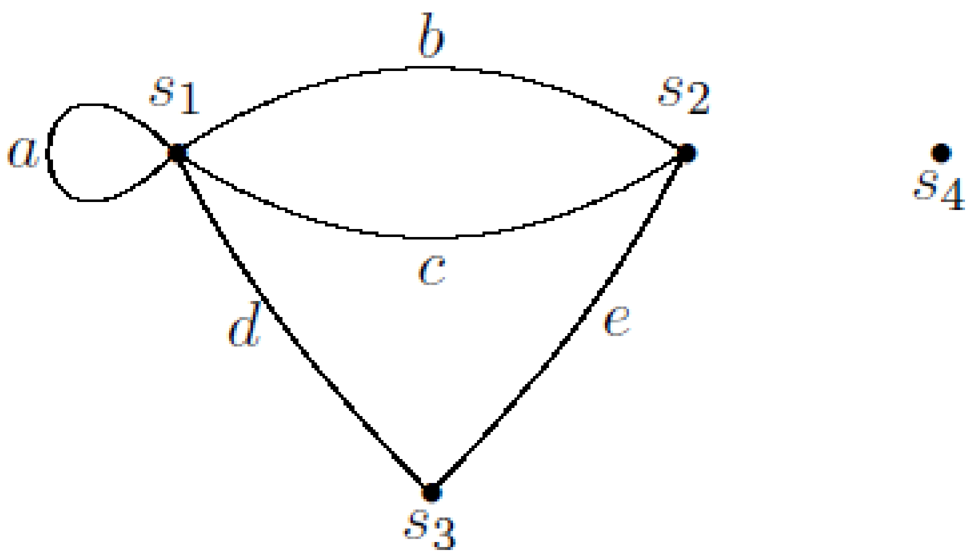
Un K^5 *Graphe*



- Graphe complet K^5
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{(1,2), (1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4), (2,5),(3,4),(3,5), (4,5)\}$

Degrés

- **Degré d'un sommet**
- Pour un graphe ou un multi graphe, on appelle **degré du sommet *v*, *et on note d(v), le nombre d'arêtes incidentes avec ce*** sommet.
- **Attention ! une boucle sur un sommet est comptée deux fois.**
- Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la taille de son voisinage).



s_1 est de degré 5,

s_2 de degré 3,

s_4 de degré 0.

Lemme des poignées de mains

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2 * |A|$$

C'est un nombre pair

Où **X** est l'ensemble des sommets du graphe et **A** l'ensemble des arêtes.

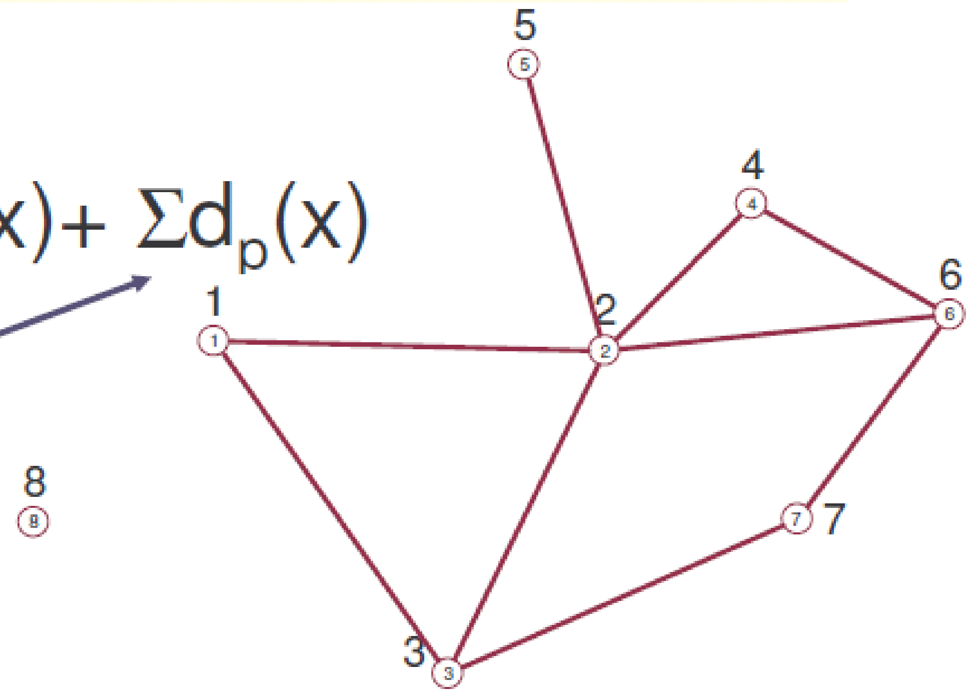
Chaque arête du graphe incrémente de deux la somme des degrés. D'où le résultat.

Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.

$$\Sigma d(x)=2A$$

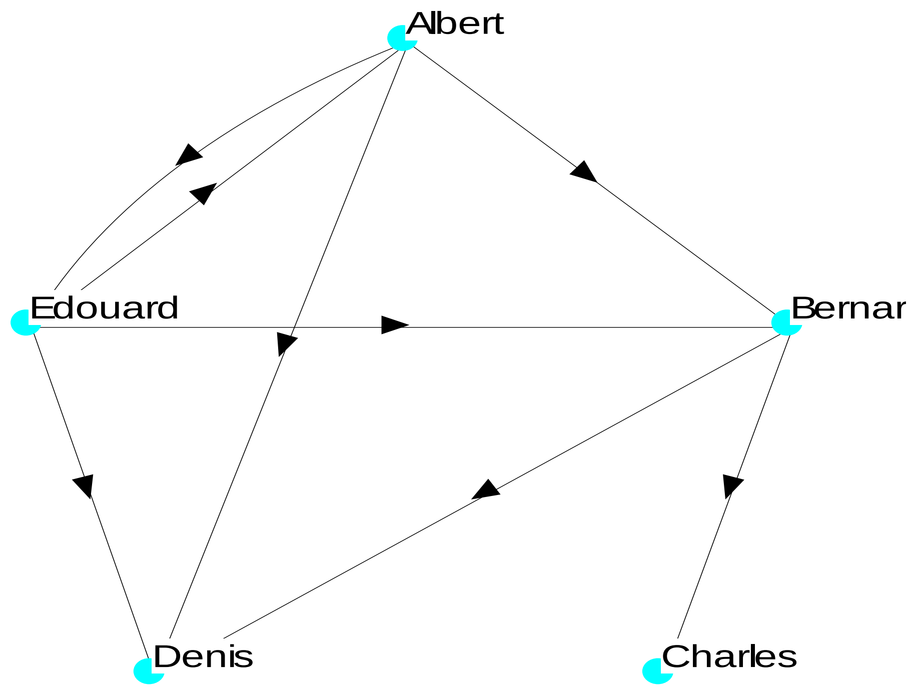
$$\Sigma d(x)= \Sigma d_i(x)+ \Sigma d_p(x)$$

pairs



Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit **régulier**. **Si le degré commun est *k*, *alors on dit que le*** graphe est ***k-régulier.***

Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes ont un sens.

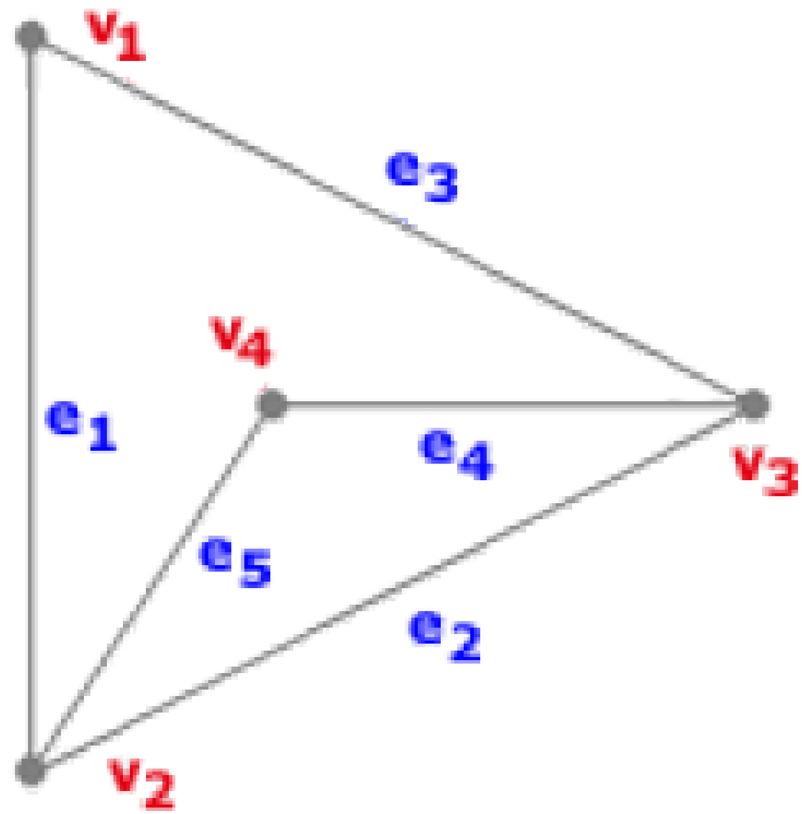


Chaînes et cycles

- Une chaîne est une suite alternée de sommets et d'arêtes.
- La longueur d’une chaîne est le nombre d’arêtes qui la composent.
- Un cycle est une chaîne dont les arêtes sont distinctes et dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Une chaîne est élémentaire si chaque sommet y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est simple si chaque arête apparaît au plus une fois.

Donner des exemples de:

- Chaîne
- Longueur
- Cycle
- Chaîne élémentaire
- Chaîne simple



Graphe Connexe:

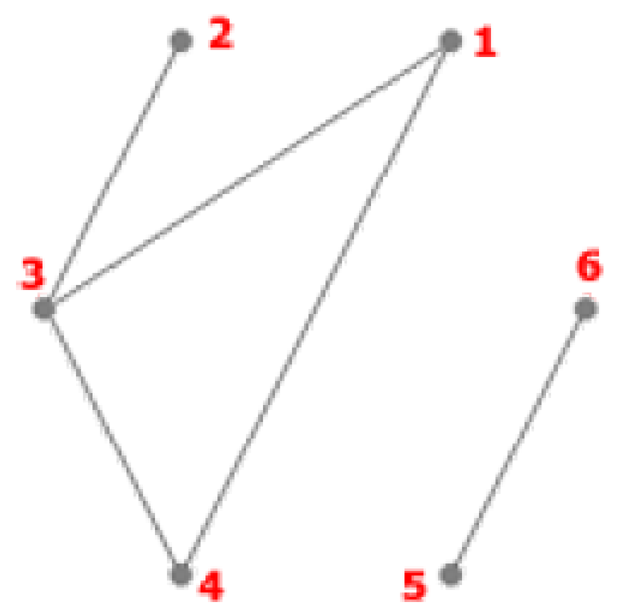
Un graphe est **connexe** s'il existe pour chaque paire de sommet une chaîne reliant chacun des deux sommets.

Graphe non connexe

$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$E = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (3,4), (5,6) \}$

C'est un graphe à 2 composantes connexes



- **Théorème**

- Pour tout graphe ayant *m arêtes*, *n sommets et p composantes connexes*, *on a :*

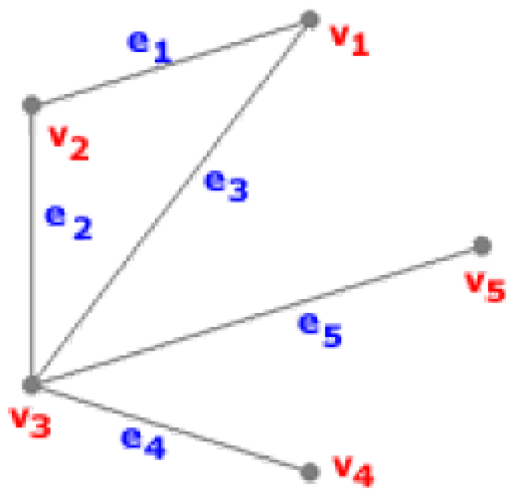
- $\mu(G) = m - n + p \geq 0$

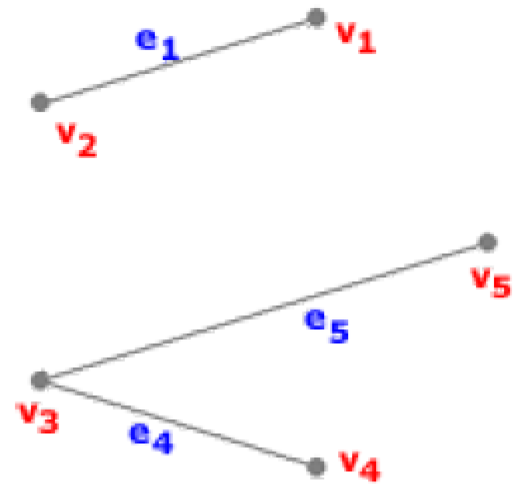
- De plus, $\mu(G) = 0$ *si et seulement si G est sans cycles*.

- $\mu(G)$ *est appelé le nombre cyclomatique.*

Prononcer « nu de G ».

Graphe partiel et sous-graphe





- Soit le graphe $G = (V, E)$
- $V = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$
- $E = \{e1=(v1,v2),$
  $e2=(v2,v3), e3=(v1,v3),$
  $e4=(v3,v4), e5=(v3,v5)\}$

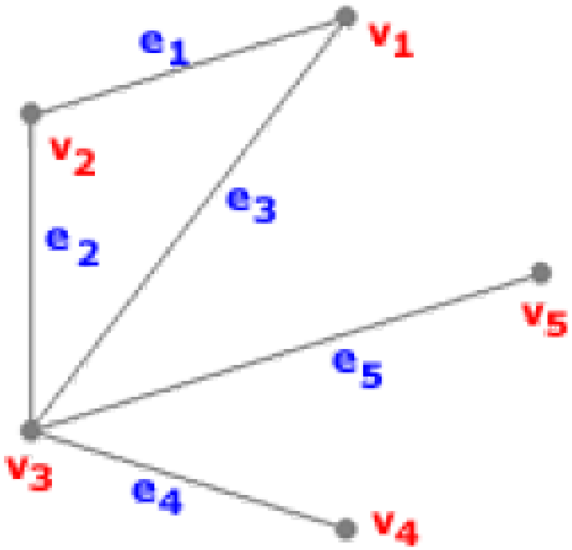
Graphe partiel de G

$V' = V$

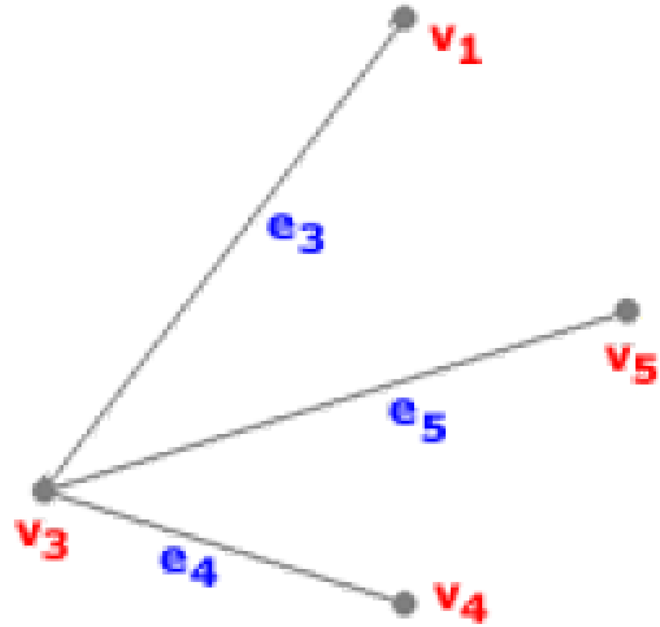
$E' = \{e1, e4, e5\}$

H=(Y, B) est un graphe partiel de G= (V, E) ssi Y = V et B $\subseteq$ E

Graphe partiel et sous-graphe



- Soit le graphe $G = (V, E)$
- $V = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$
- $E = \{e1=(v1,v2), e2=(v2,v3), e3=(v1,v3), e4=(v3,v4), e5=(v3,v5)\}$



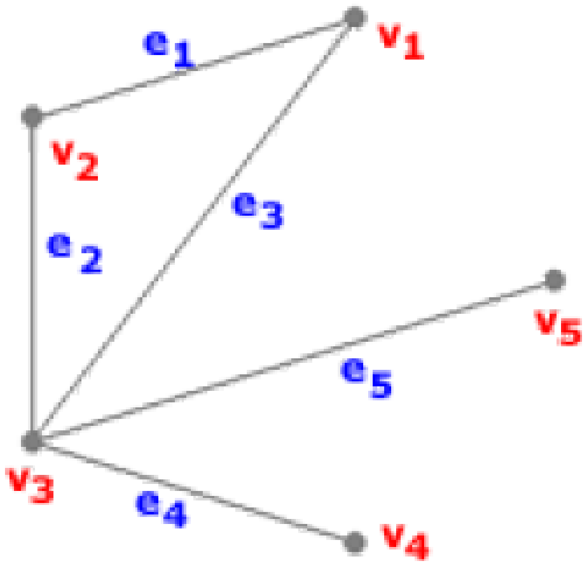
Sous-graphe de G

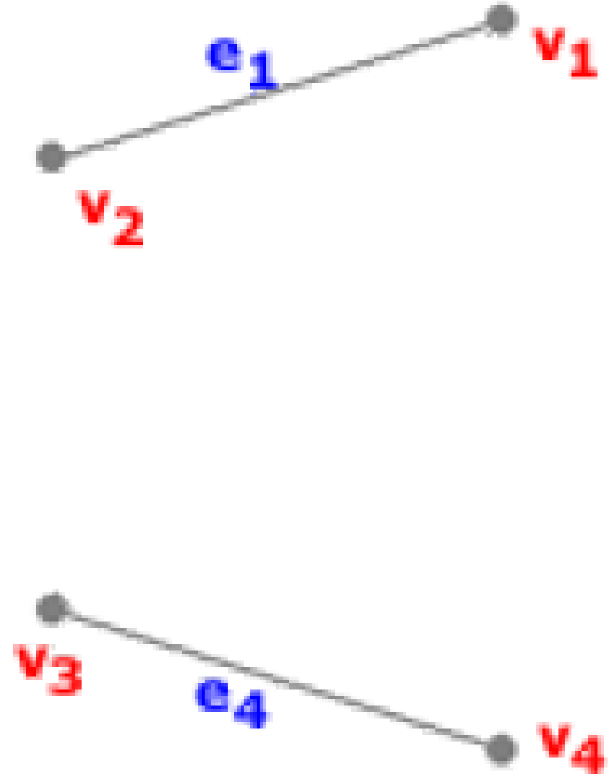
$V' = \{v1, v3, v4, v5\}$

$E' = \{e3, e4, e5\}$

H = (Y, B) est un Sous graphe de G= (V, E) si $Y \subseteq V$ et $B \subseteq E$

Graphe partiel et sous-graphe





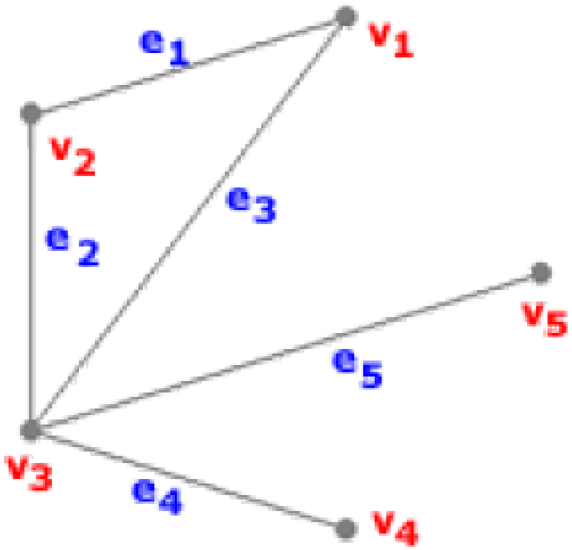
- Soit le graphe $G = (V, E)$
- $V = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$
- $E = \{e1=(v1,v2),$ $e2=(v2,v3),$ $e3=(v1,v3),$ $e4=(v3,v4),$ $e5=(v3,v5)\}$

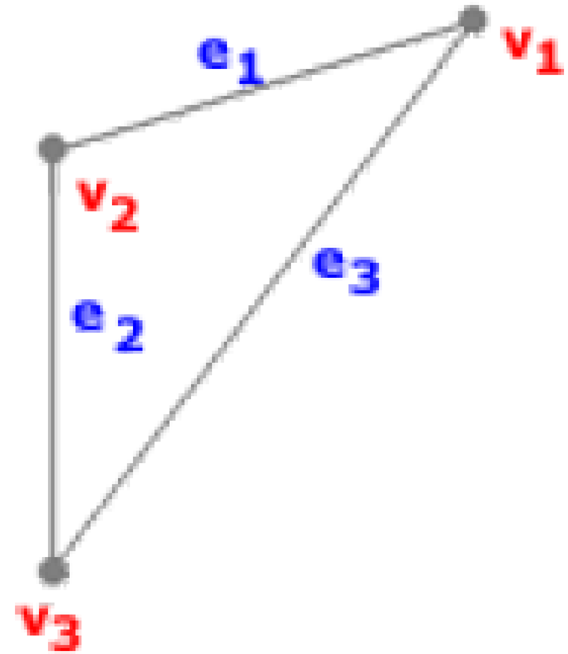
Sous-graphe partiel de G

$V' = \{v1, v2, v3, v4\}$

$E' = \{e1, e4\}$

Graphe partiel et sous-graphe





- Soit le graphe *G = (V, E)*
- *V = {v1, v2, v3, v4, v5}*
- *E = {e1=(v1,v2), e2=(v2,v3), e3=(v1,v3), e4=(v3,v4), e5=(v3,v5)}*

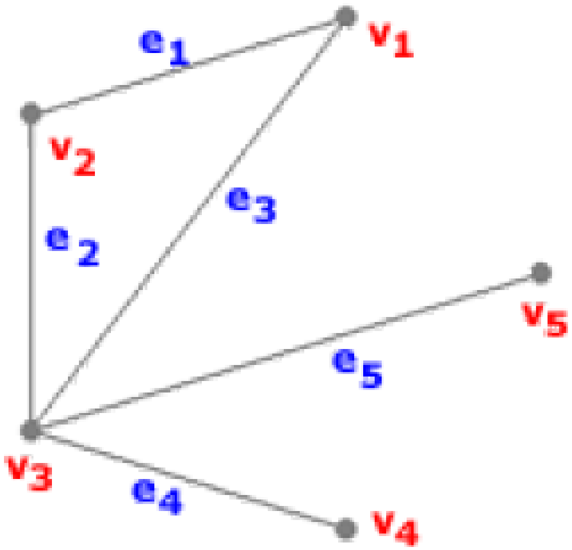
Une clique de *G*

V' = {v1, v2, v3}

E' = {e1, e2, e3}

clique un sous-graphe complet de G.

Graphe partiel et sous-graphe



- Soit le graphe $G = (V, E)$
- $V = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$
- $E = \{e1=(v1,v2), e2=(v2,v3), e3=(v1,v3), e4=(v3,v4), e5=(v3,v5)\}$

Un stable de *G*

$V' = \{v1, v4, v5\}$

$E' = \{\}$

Matrices d'incidence sommet-arc

- C'est une matrice A, de taille n × m.
- On associe les sommets aux lignes, et les arcs aux colonnes.
- L'écriture de cette matrice nécessite la numérotation des arcs;
- la matrice d'incidence d'un graphe orienté A est définie par:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ le\ sommet\ i\ est\ le\ sommet\ origine\ de\ l'arc\ \ j \\ -1 & si\ le\ sommet\ i\ est\ le\ sommet\ destination\ de\ l'arc\ \ j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

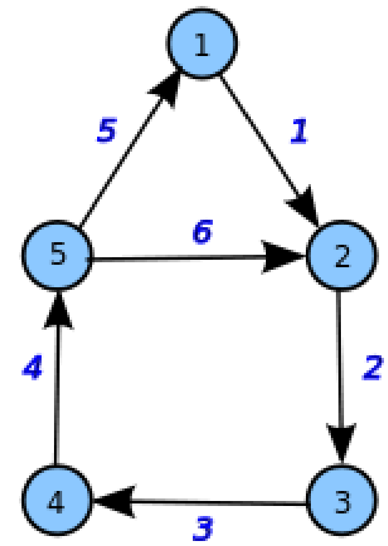
Matrices d'incidence sommet-arête

- la matrice d'incidence d'un graphe non orienté A est définie par:

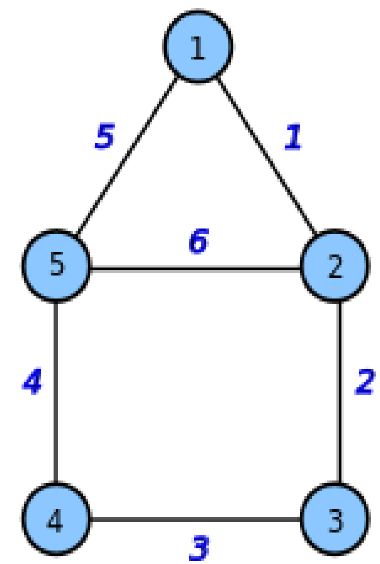
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ le\ sommet\ i\ est\ l'extrimité\ de\ l'arête\ \ j \\ 2 & si\ l'arête\ j\ \ est\ une\ boucle\ sur\ \ le\ sommet\ i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

on parle de matrice d'incidence orientée et
de matrice d'incidence non orientée.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

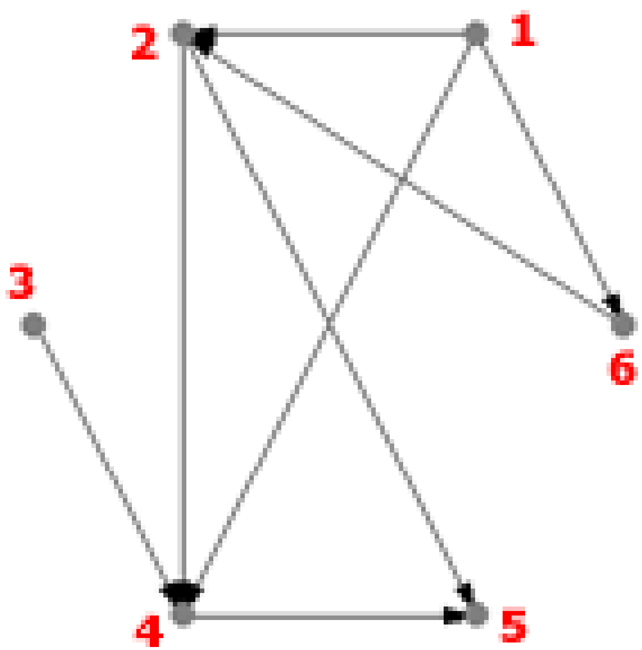


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Listes d'adjacences

On peut aussi représenter un graphe en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent.

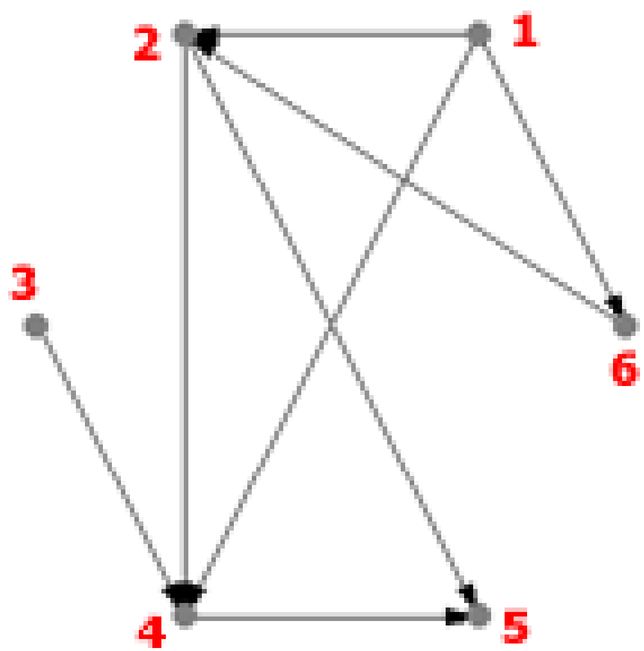


graphe G:

listes d'adjacences du graphe G:

1 : 2, 4, 6
2 : 4, 5
3 : 4
4 : 5
5 : -
6 : 2

Matrice d'adjacence



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

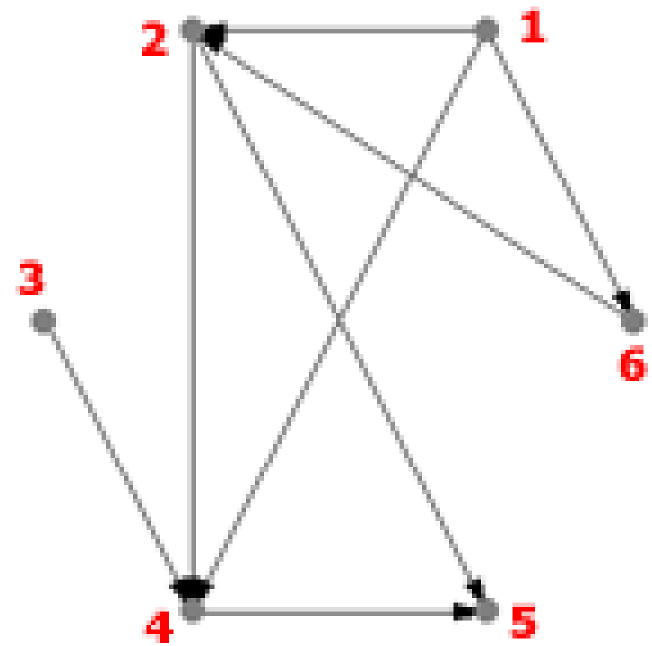
- caractéristiques:
  - ✓ Elle est carrée:
  - ✓ il y a autant de lignes que de colonnes.
  - ✓ Il n'y a que des zéros sur la diagonale.
  - ✓ Un 1 sur la diagonale indiquerait une boucle.
  - ✓ Elle est symétrique pour les graphes non orientés ($M_{ij} = M_{ji}$)

Matrice d'adjacence

- On peut représenter un graphe par une matrice d'adjacences.
- Une matrice (n x m) est un tableau de n lignes et m colonnes.
- (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j.
- Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe.
- Un 1 à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j.

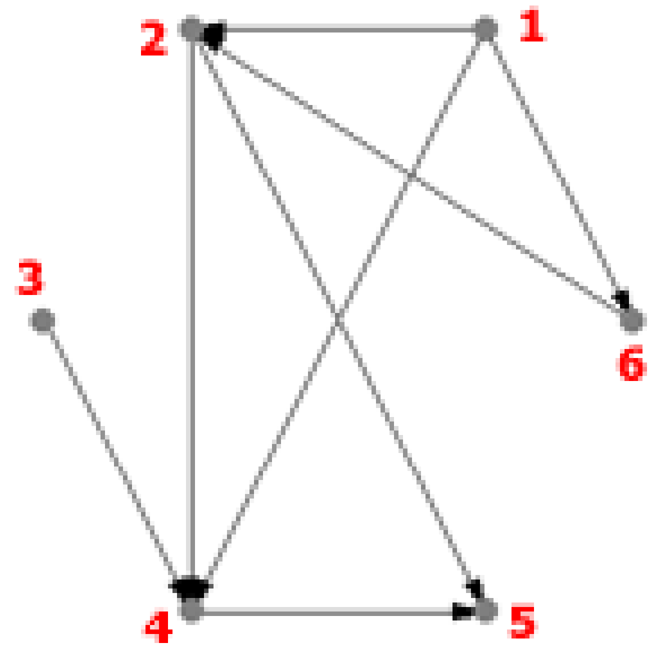
- On a calculé ci-dessous les matrices M^2 et M^3.
- Pour chacune de ces matrices, à quoi correspondent les nombres obtenus?

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- On a calculé ci-dessous les matrices M^2 et M^3.
- Pour chacune de ces matrices, à quoi correspondent les nombres obtenus?

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Théorème

Le coefficient général de M^k est le nombre de chemins (ou chaînes) de longueur k entre i et j.

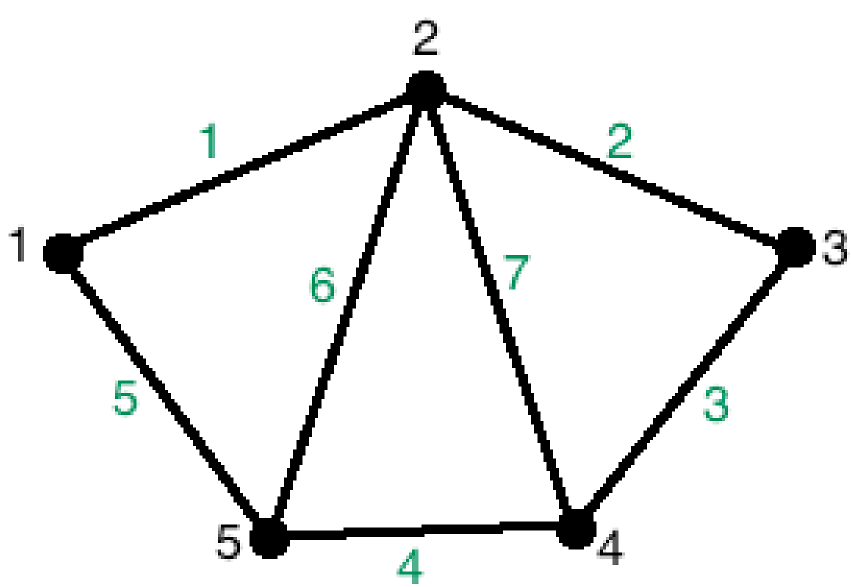
Exercice:

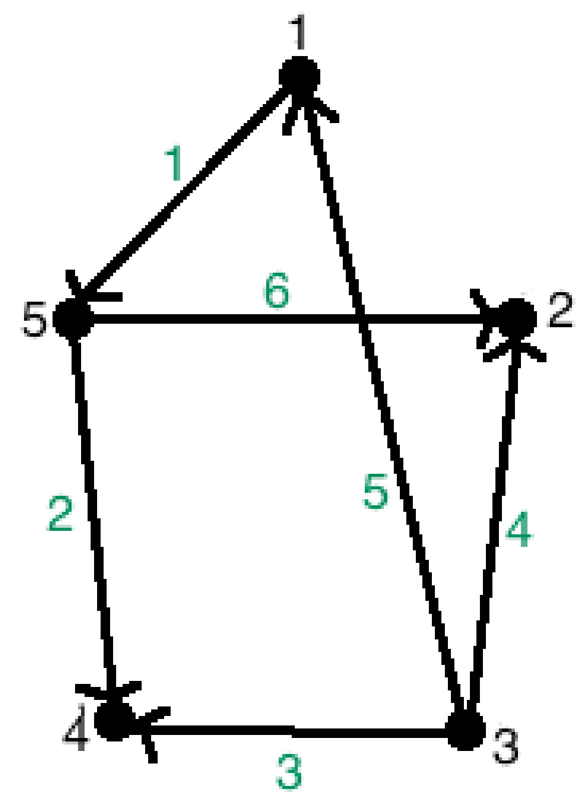
Décrivez les graphes ci-dessous par:

des matrices d'incidences,

des matrices d'adjacences

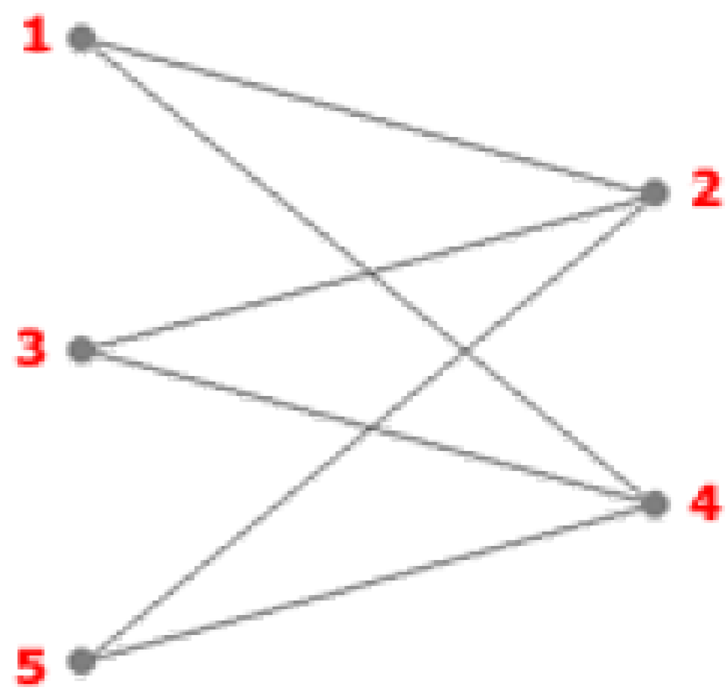
et des listes d'adjacences.





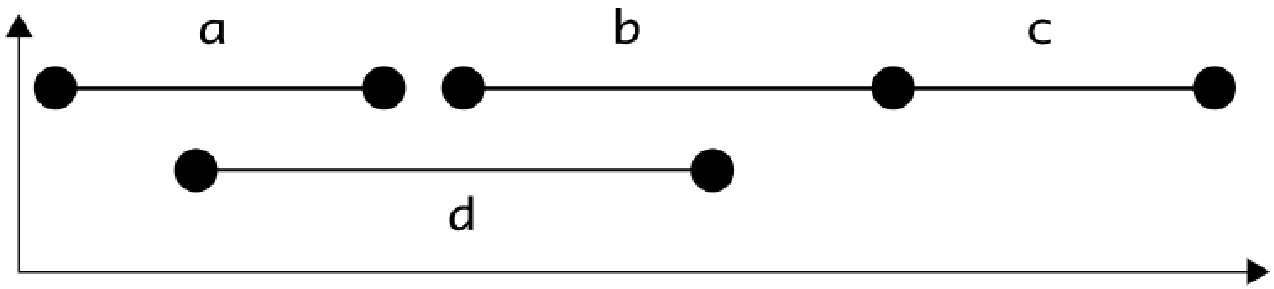
Quelques types de graphes

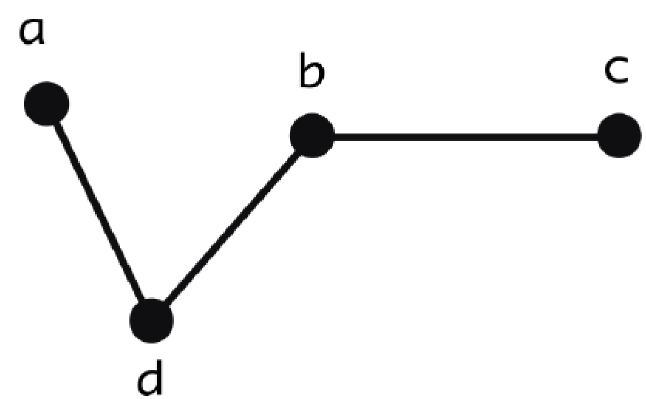
- Graphe biparti
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,5), (3,4), (4,5)\}$



Graphe d'intervalles et graphe triangulé

- Un graphe est un *graphe triangulé* si tout cycle de longueur > 3 admet une *corde*, c'est à dire une arête reliant deux sommets non consécutifs.
- Soit une famille de segments (d'intervalles) d'une même droite du plan euclidien.





Propriété :

un graphe représentatif d'intervalles est triangulé

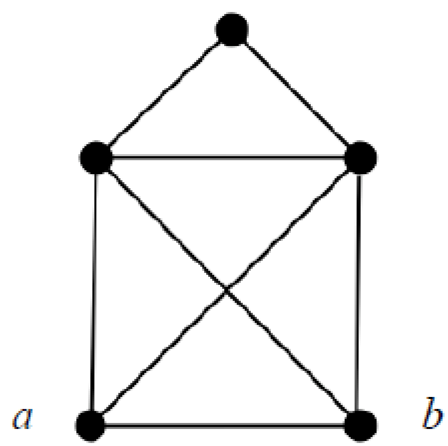
5. Graphes eulériens

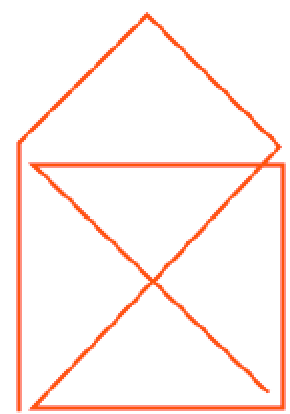
- On dit qu'un graphe est **eulérien s'il est possible de trouver un cycle passant une et une seule fois par toutes les arêtes.**
- On dit qu'un graphe est **semi-eulérien s'il est possible de trouver une chaîne passant une et une seule fois par toutes les** arêtes.
- Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait).

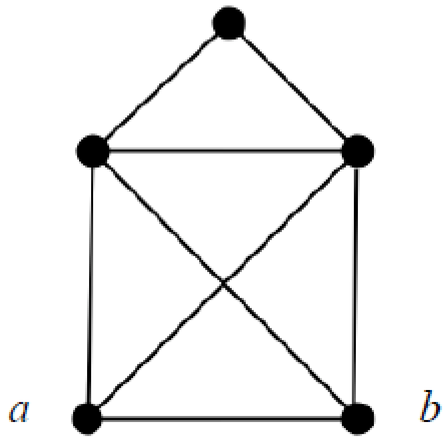
- **Théorème**

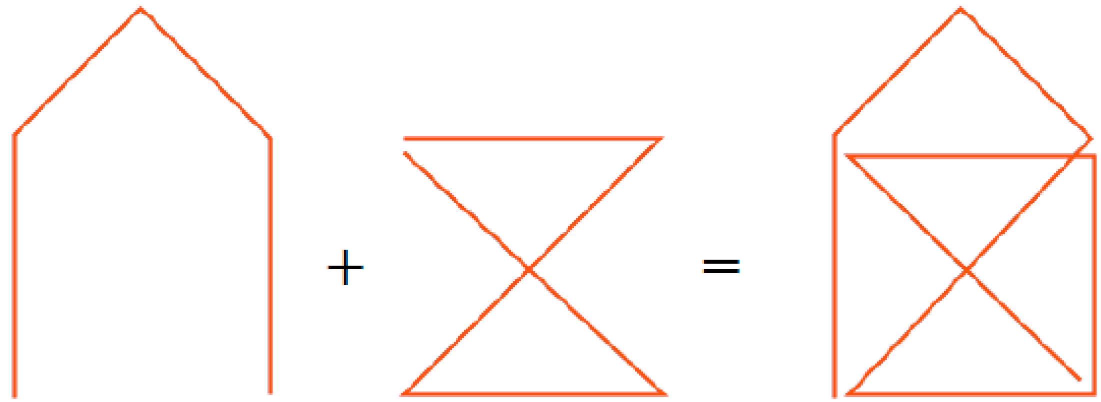
❖ Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

❖ Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

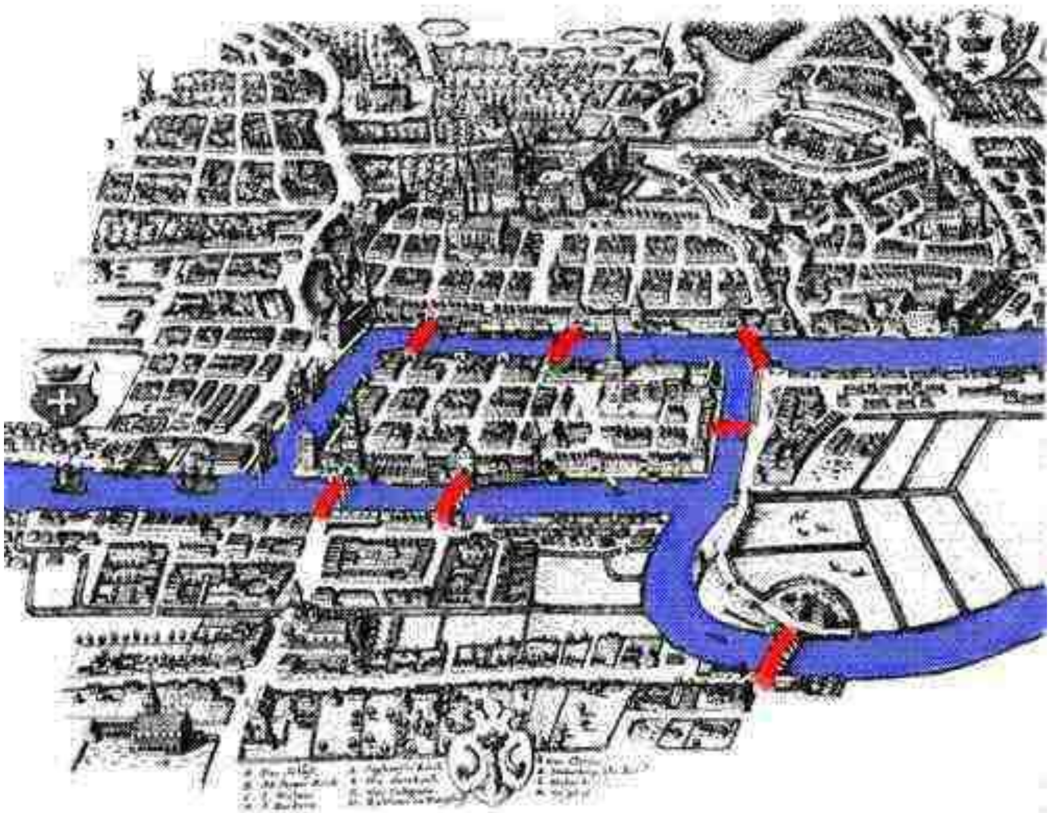





a
b


+
=

Donner le graphe du problème des ponts de Königsberg,



Graphes hamiltoniens

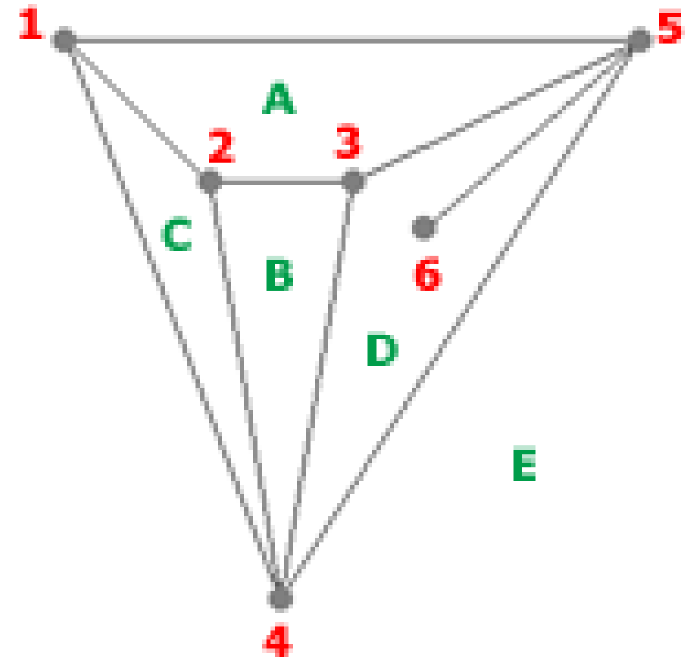
- On dit qu'un graphe est **hamiltonien s'il est possible de trouver un cycle passant une et une seule fois par tous les** sommets.
- On dit qu'un graphe est **semi-hamiltonien s'il est possible de trouver une chaîne passant une et une seule fois par tous** les sommets.
- Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut être hamiltonien.
- Si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien.
- Les graphes complets K^n *sont hamiltoniens.*

- **Théorème (Ore)**
- Soit *$G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$.*
- Si pour toute paire $\{x, y\}$ *de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.*
- **Corollaire (Dirac)**
- Soit *$G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.*
- En effet, un tel graphe vérifie les conditions du théorème précédent. Si *x et y ne sont pas adjacents, on a bien :*
- $$d(x) + d(y) \geq n/2 + n/2 = n$$
- **Problème du voyageur de commerce**
- Le problème du voyageur de commerce (Traveling Salesman Problem en anglais) consiste à trouver **le plus court cycle passant par tous les sommets dans un graphe où les arêtes sont pondérées.**
- **On travaille souvent sur un graphe complet.**

Graphes planaires

- On dit qu'un graphe est **planaire** si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.
- Une **carte**, ou **graphe planaire topologique**, est une représentation particulière d'un multi-graphe planaire fini.
- On dit qu'une carte est **connexe** si son graphe l'est.
- Une carte divise le plan en plusieurs **régions**.

Graphes planaires



- Exemple: la carte, avec six sommets et neuf arêtes, divise le plan en cinq régions (A, B, C, D, E).

- On remarque que quatre régions sont limitées alors que la cinquième (E), extérieure au diagramme, ne l'est pas.

- Le **degré d'une région** r, noté d(r), est la longueur du cycle qui limite r. Dans le graphe ci-contre,

  d(A) = 4, d(B) = 3, d(C) = 3, d(D) = 5, d(E) = 3.

- Remarque: toute arête limite deux régions, ou est contenue dans une région et est alors comptée deux fois dans la chaîne fermée.

- **Lemme**

- La somme des degrés des régions d'une carte connexe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

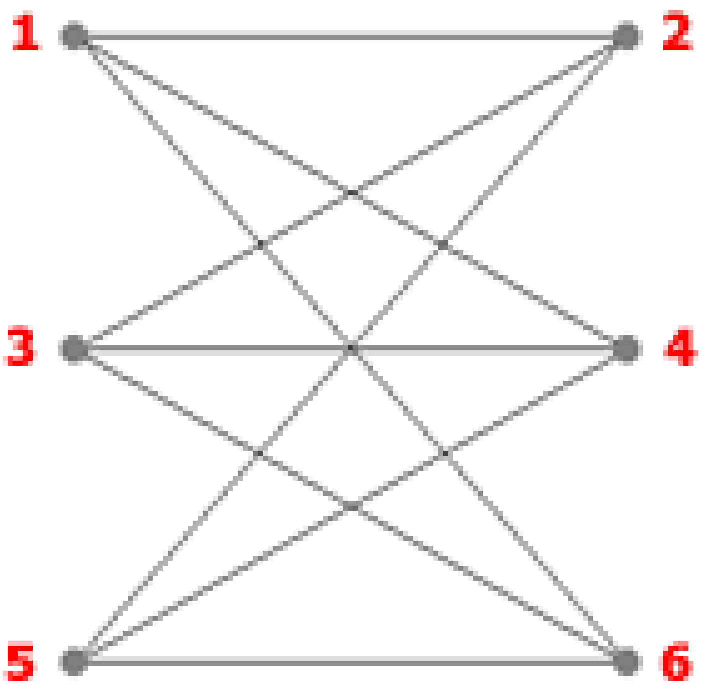
- **Théorème (Euler)**

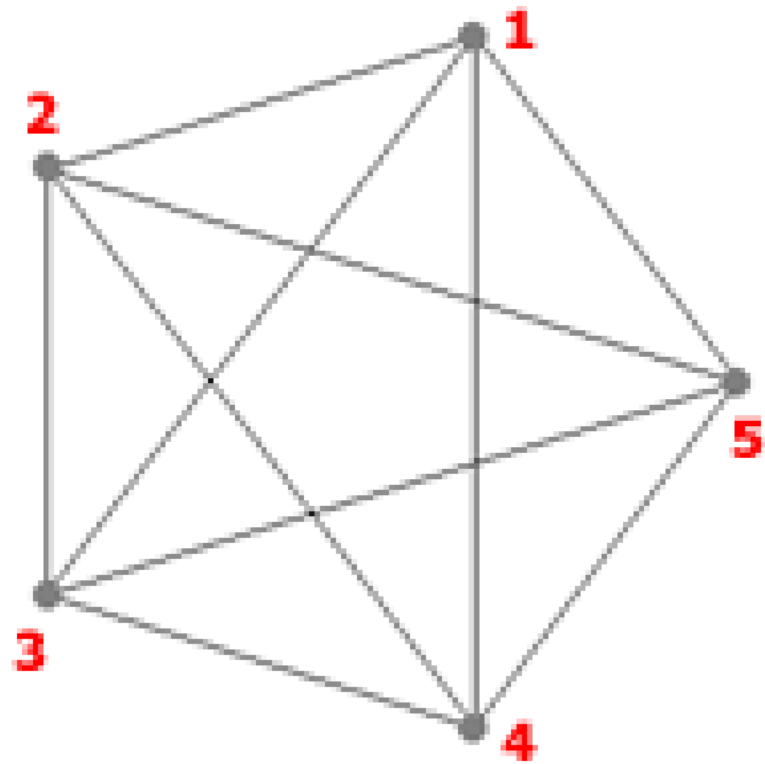
- Euler a établi une formule qui relie le nombre de sommets S, le nombre d'arêtes A et le nombre de régions R d'une carte connexe.

- $$S - A + R = 2$$

❖ Théorème (Kuratowski)

Un graphe est non planaire si et seulement si il contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5.





Graphes orientés (digraphes)

- Un digraphe est **fortement connexe**, **si toute paire ordonnée (*a*, *b*) *de sommets distincts du graphe est reliée par*** ***au*** moins un chemin. En d'autres termes, tout sommet est atteignable depuis tous les autres sommets par au moins un chemin.

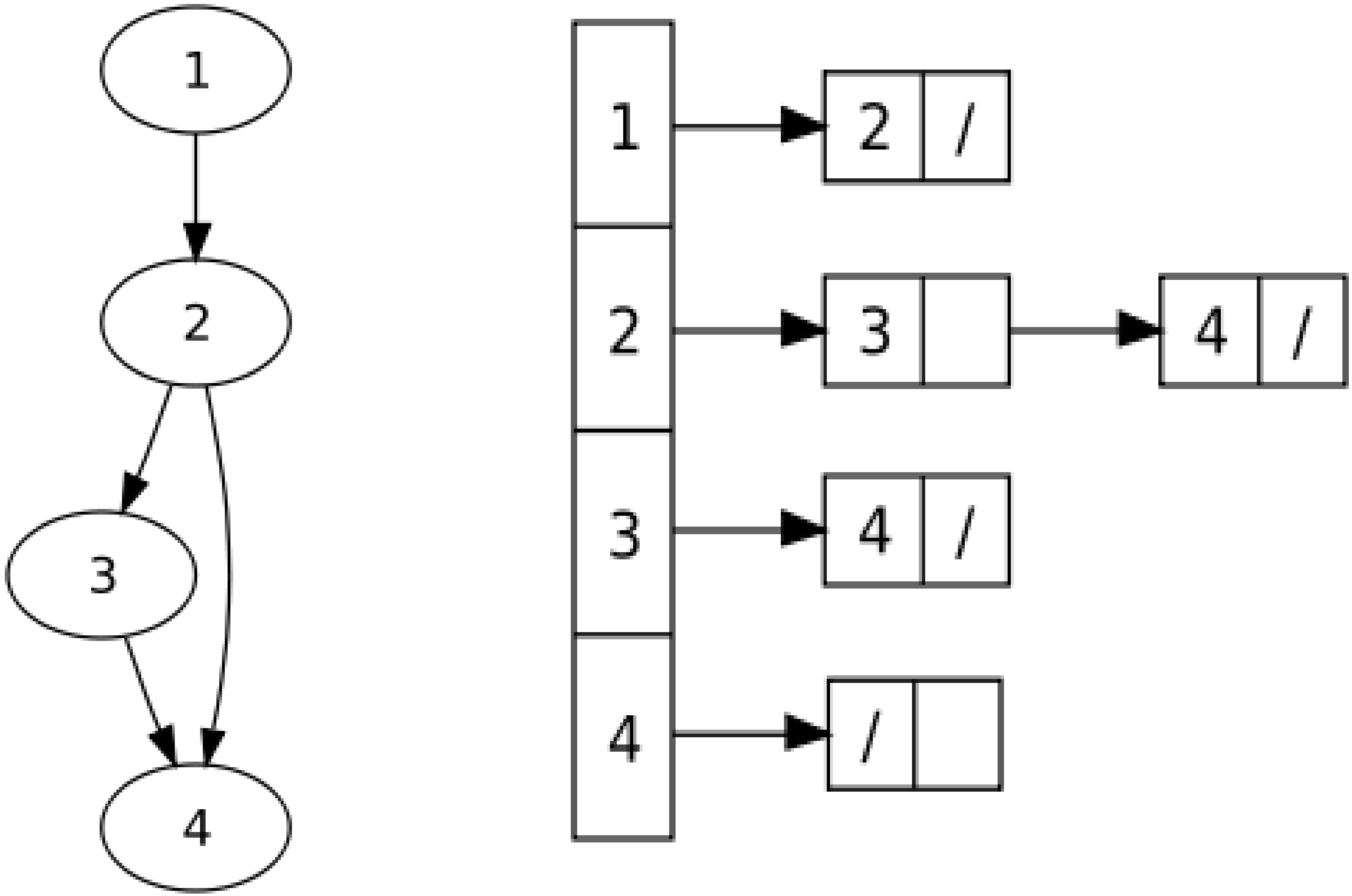
- On appelle **composante fortement connexe tout sous-graphe induit maximal fortement connexe (maximal signifie qu'il** n'y a pas de sous-graphe induit connexe plus grand contenant les sommets de la composante).

- Soit un graphe orienté G(X, E).
- On appelle *cocycle* d'un sommet l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents ou l'ensemble des arcs qui lui sont incidents. On note:

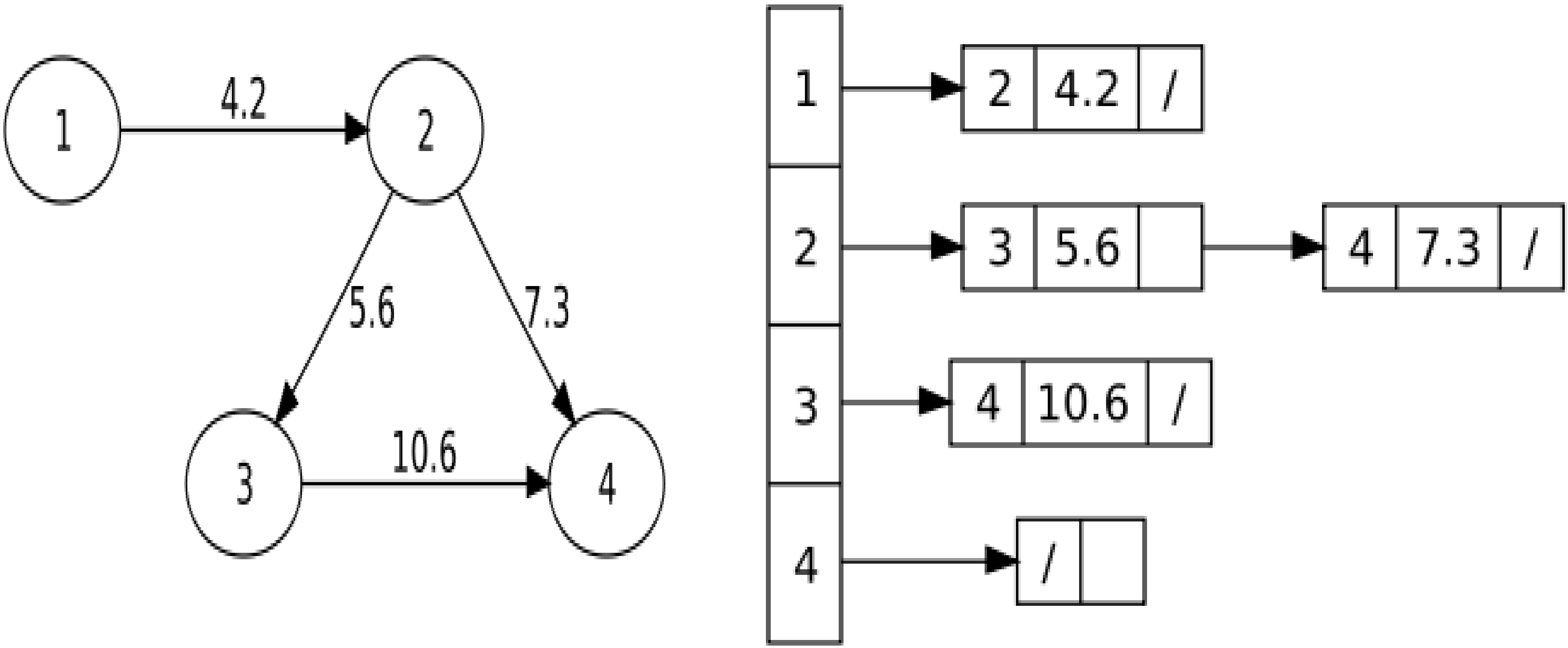
$$\begin{cases} \Gamma^+(i) & = & \{j \in X | (i, j) \in E\} & \text{Ensemble des successeurs de } i \\ \Gamma^-(i) & = & \{k \in X | (k, i) \in E\} & \text{Ensemble des prédécesseurs de } i \\ \omega^+(i) & = & \{(i, j) \in E\} & \text{Ensemble des successeurs de } i \\ \omega^-(i) & = & \{(k, i) \in E\} & \text{Ensemble des prédécesseurs de } i \end{cases}$$

- Les cocycles Γ sont des cocycles de sommets.
- Les cocycles ω sont des cocycles d'arcs.
  - Les deuxièmes se révèlent beaucoup plus utiles.
- Pour un 1-graphe, G peut être parfaitement déterminé par (X, Γ) , notation à la base d'une représentation informatique très utilisée, les listes d'adjacence

Listes d'adjacences

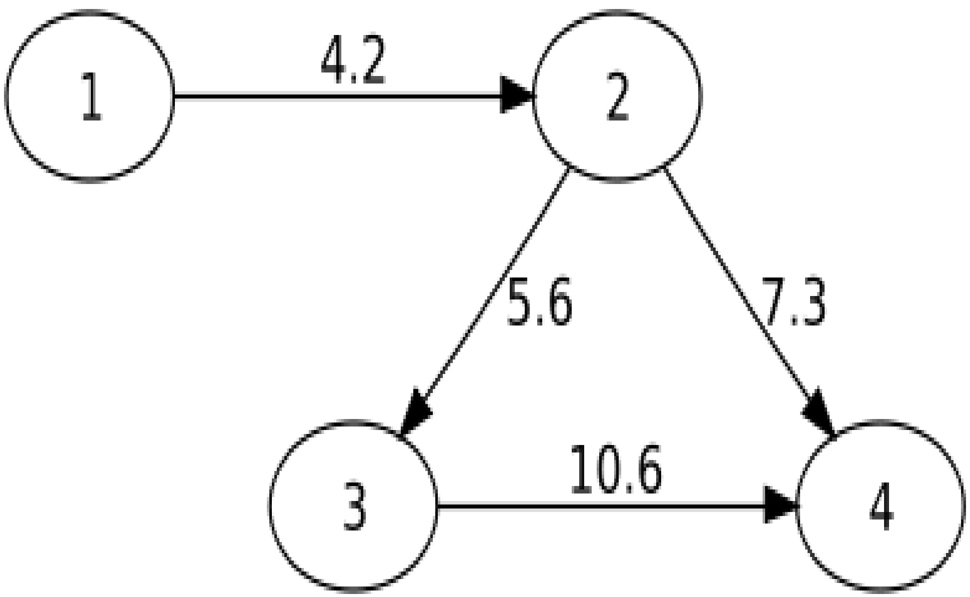


graphe valué



Graphes pondérés - graphes probabilistes

- **un graphe pondéré**, un graphe, orienté ou non, dont les arêtes (ou les arcs) possèdent un **poids**.
- "**graphes valués**",
- "**graphe probabiliste**".



$$\begin{bmatrix} 0 & 4.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6 & 7.3 \\ 0 & 0 & 0 & 10.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice:

- Algorithme qui renvoie la longueur minimal entre 2 sommets en utilisant la matrice des valeurs.

Parcours de graphes

- Les parcours peuvent se faire de deux sortes,
  - parcours en largeur
  - parcours en profondeur.
- Les graphes peuvent contenir des cycles.