Université de Msila
Faculté Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique

Cours de Théorie des graphes

2eme année Informatique

Dr Nasser Eddine MOUHOUB

2015 / 2016

Chapitre V

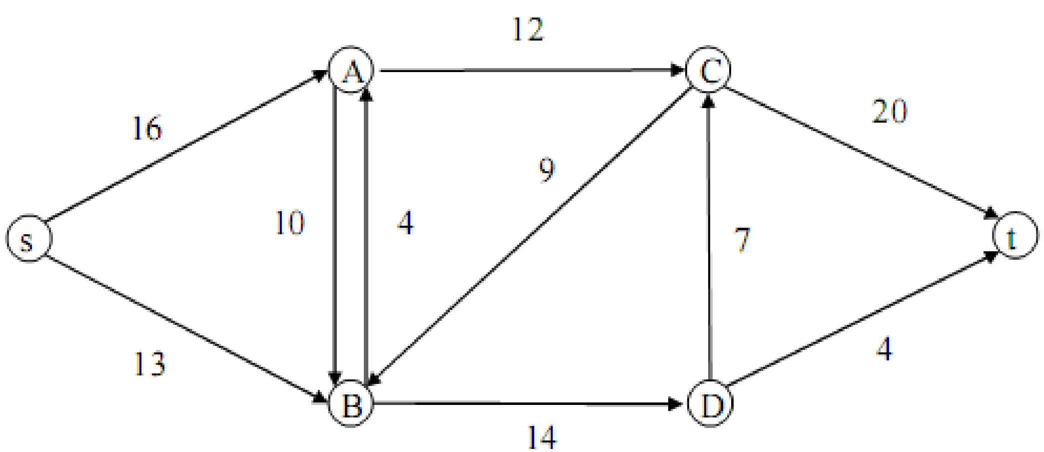
Réseaux de flots
Problème du flot maximum

PROBLEME DE FLOTS

1. Les réseaux de transport
2. Le flot maximum et la coupe minimum
3. L'algorithme de Ford et Fulkerson

Les réseaux de transports

- Réseau de transport : graphe orienté avec pour chaque arc une *capacité*.
- La capacité *c(a)* *est un entier positif ou nul.*
- Il y a aussi une source *s et un puits t*.
- *Aucun arc n'arrive à la source*
- *Et* aucun arc ne quitte le puits.

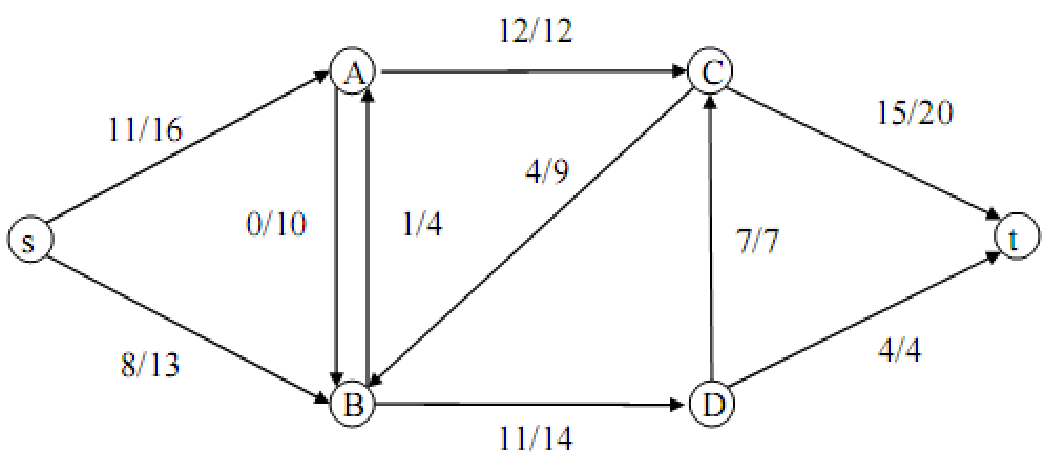


Réseau de transport avec les capacités

- Un flot est une fonction entière positive ou nulle f définie sur les arcs satisfaisant :

- Contrainte de capacité: $f(a) \leq c(a)$;

Pour le graphe si dessous: $11 \leq 16$, $8 \leq 13$, $0 \leq 10$, $12 \leq 12$, … , $4 \leq 4$



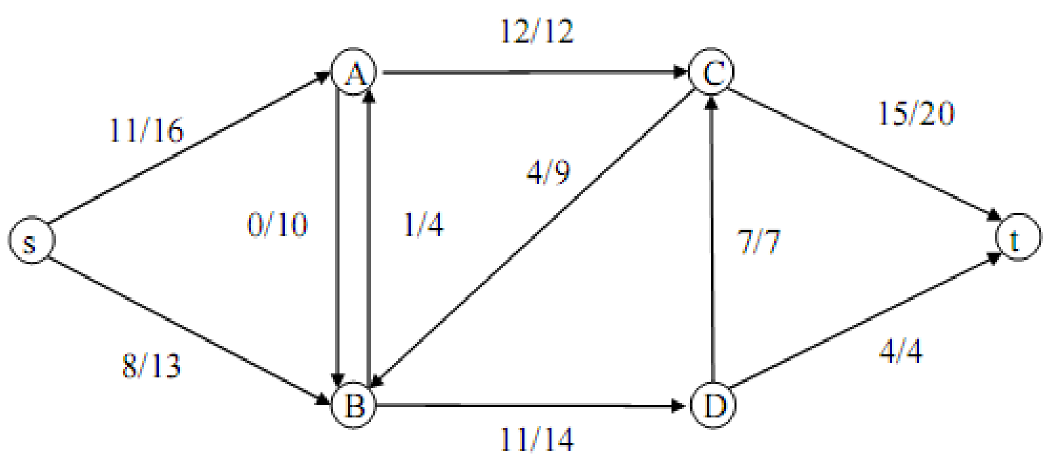
Un flot sur le réseau de transport

Conservation du flot:

pour tout sommet autre que *s* et *t*, la somme des flots sur les arcs entrants et la somme des flots sur les arcs sortants sont égales.

Exemples : circuits électriques ou hydrauliques, réseaux de communication, modélisation de transports

Sommet A : 11+1 = 12 + 0 , sommet C: 12+7=4+15

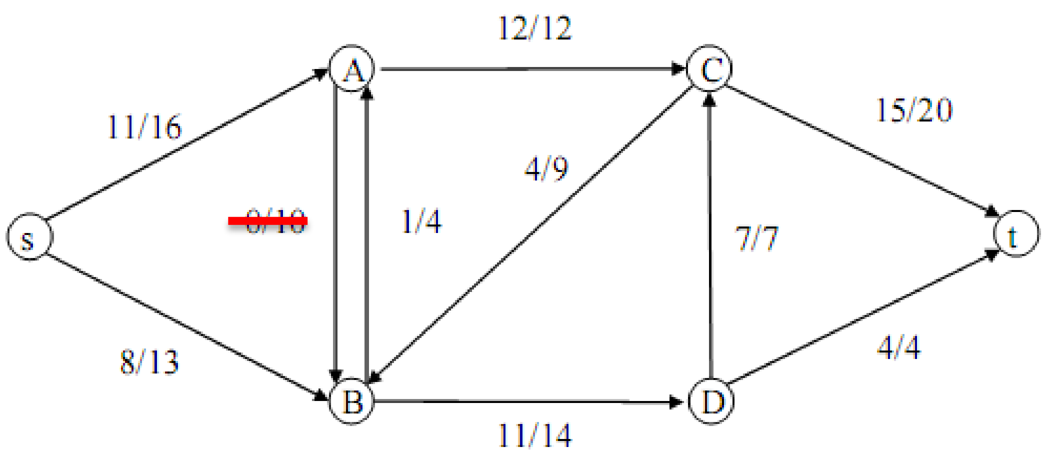


Un flot sur le réseau de transport

Quand deux arcs en sens inverse relient deux sommets, on peut toujours annuler la fonction flot sur l'un des deux.

<u>Propriété :</u>

la somme des flots sur les arcs sortant de source et la somme des flots sur les arcs arrivant au puits sont égales ; cette valeur est la valeur du flot $|f|$;

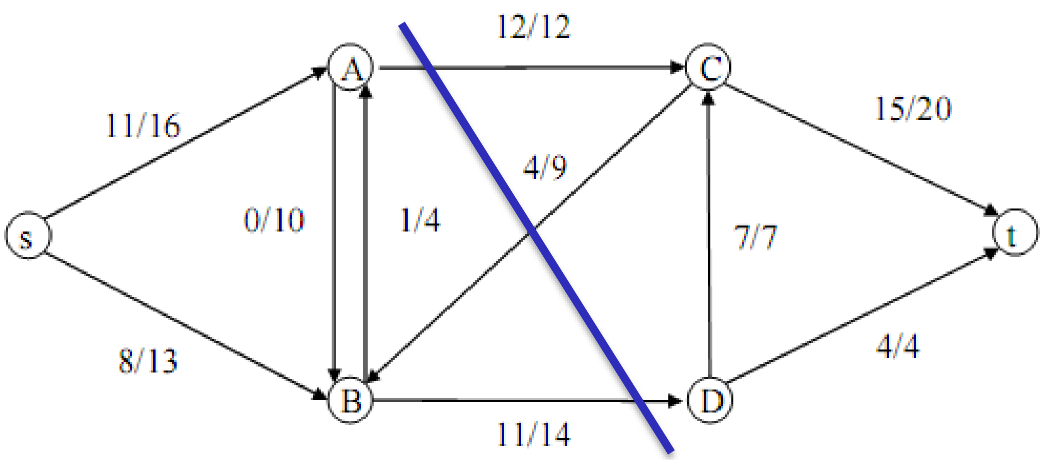


Un flot sur le réseau de transport

Une coupe est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la source et l'autre le puit:

$$E \cup F = A, \quad E \cap F = \varnothing \; ; \quad s \in E, \; t \in F$$

La capacité C(E, F) d'une coupe est la somme des capacités des arcs de E a F.



Un flot sur le réseau de transport

C(E, F) = 26

Propriété :

Le flux de E à F dans un flot *f* est :

$$f(E,F) = \sum_{u \in ExF} f(u)$$

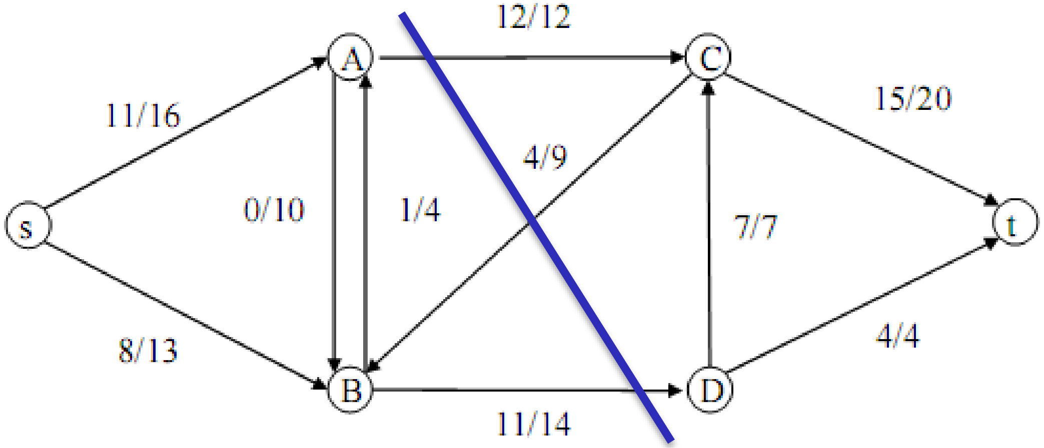
et le flux orienté de la coupe (E , F) ou (flot net traversant la coupe) est:

$$|f| = \Delta(E,F) = f(E,F) - f(F,E)$$

C(E, F) = 12+14 = 26

f(E, F) = 12+11 = 23

Δ(E, F) = | f | = (12+11) - 4 = 19



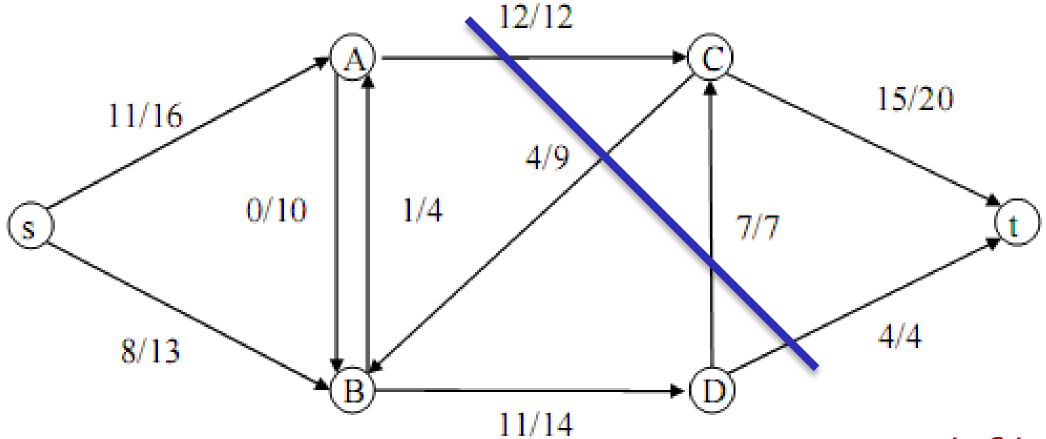
Un flot sur le réseau de transport

La deuxième propriété est donc que le flot net traversant une coupe ne dépend pas de la coupe.

Tout flot a pour valeur $V_f = f(\{s\}, X\backslash\{s\}) = \Delta(\{s\}, X\backslash\{s\})$.

Lemme: Plus généralement $V_f = \Delta(E, F)$ pour toute coupe.

$|f|$ est inférieur à la capacité de n'importe quelle coupe.



Un flot sur le réseau de transport

$|f| = (12+7+4) - 4 = 19$

Le flot maximum et la coupe minimum

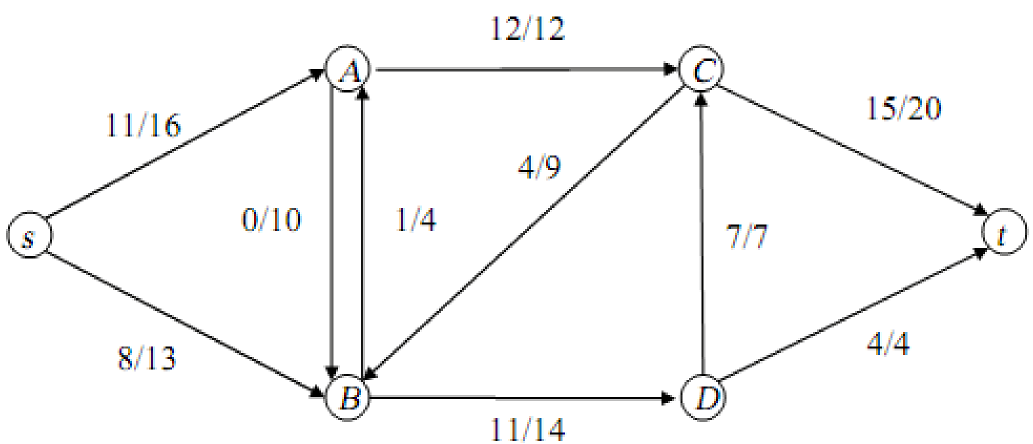
Il existe toujours un flot possible qui est le flot nul.

Problème : comment trouver un flot qui a la valeur maximum ?

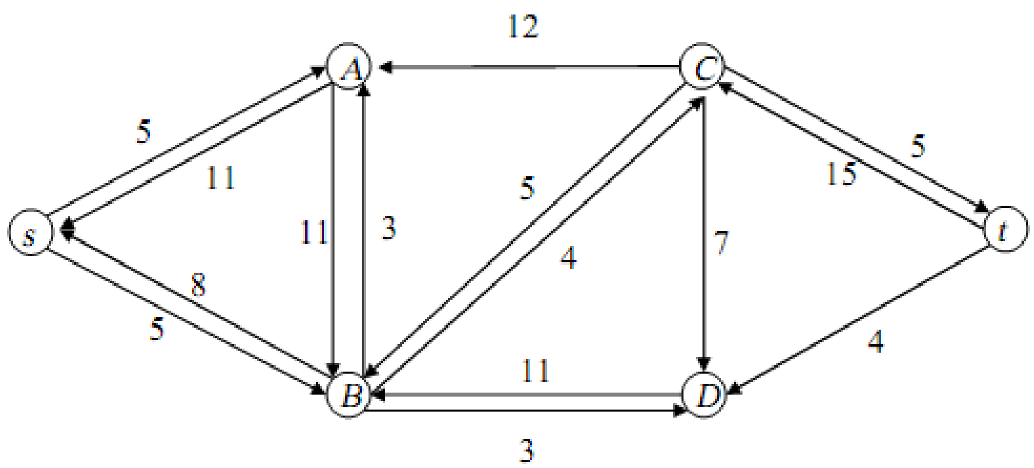
- ✓ Recherche d'un *chemin améliorant*.
- ✓ Déterminer le *réseau résiduel :*

Un flot est saturé si sur tout chemin de s a t il existe un arc a tel que $f(a) = c(a)$.

pour chaque arc *a = uv*, *f(a) ≤ c(a)*, *on peut augmenter le flot de c(a) - f(a), et on peut le diminuer de f(a), donc faire passer un flot f(a) sur un arc* ***-a = vu***. *Si cet arc existe déjà avec une capacité c(-a),* celle-ci s'ajoute à *f(a)*.



Le flot

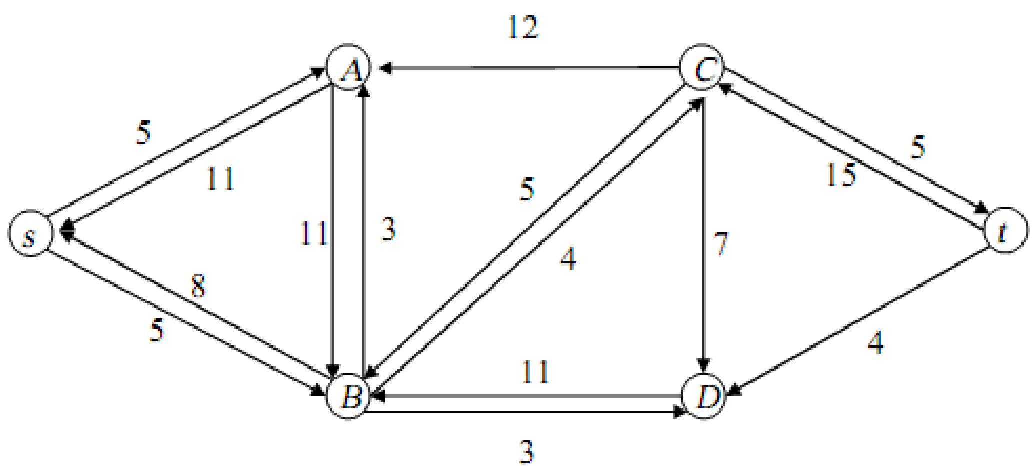


Le réseau résiduel correspondant

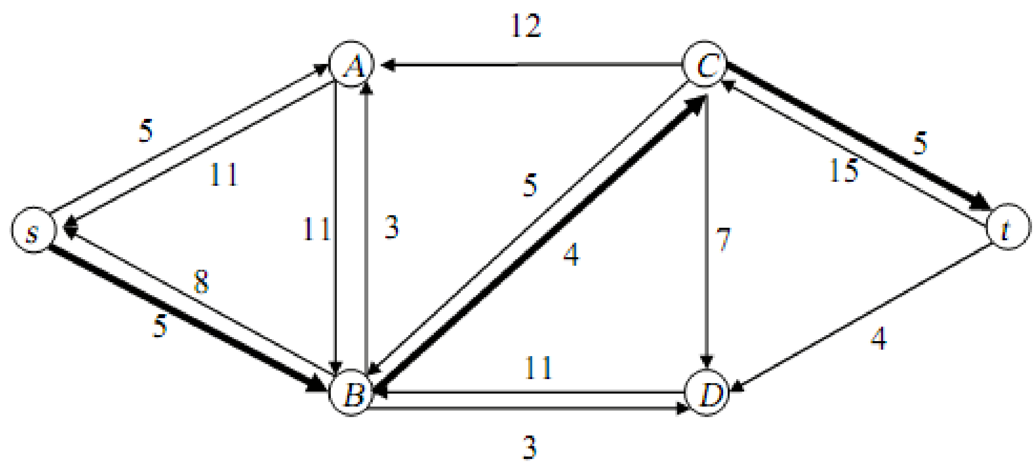
Le graphe orienté avec ces capacités est le *réseau résiduel*.

On cherche un chemin de s à t dans le réseau résiduel.

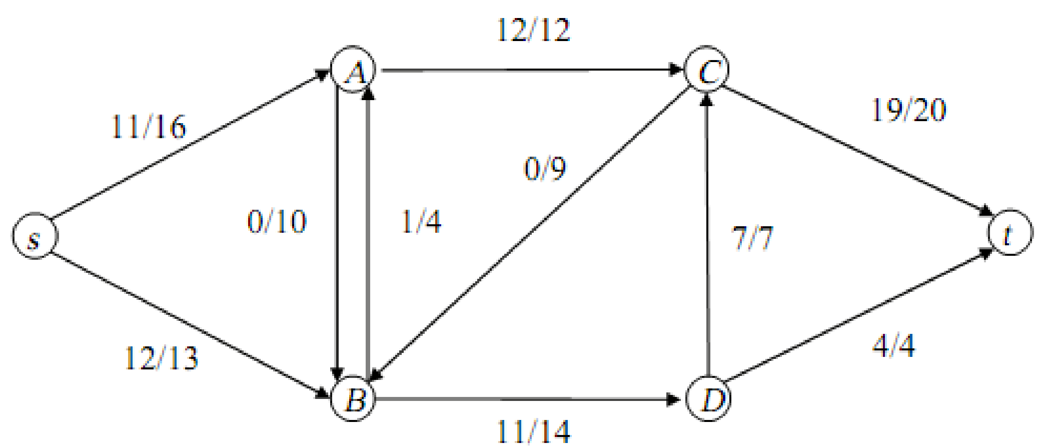
Il correspond à une possibilité d'amélioration du flot en modifiant de la valeur du minimum des capacités résiduelles sur le chemin.



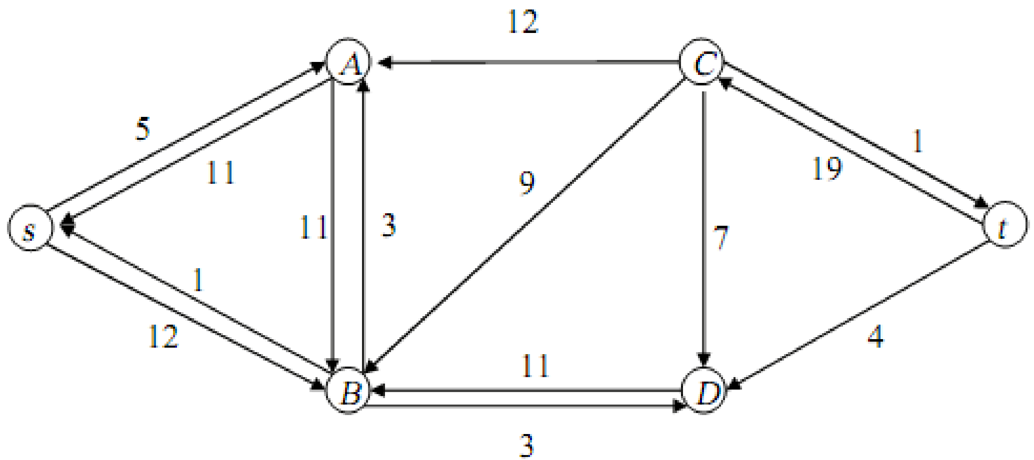
Le réseau résiduel



Un chemin améliorant



Le flot après amélioration



Le nouveau réseau résiduel

Dans ce réseau, il n'y a pas de chemin de *s* à *t*, *donc pas de chemin* améliorant.

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

Si f *est un flot dans un réseau de transport, les trois conditions* suivantes sont équivalentes :

1. f *est un flot maximum ;*

2. Le réseau résiduel de f ne contient aucun chemin améliorant ;

3. Il existe une coupe *E/F dont la capacité vaut* $|f|$.

<u>Remarque :</u>

La condition 3. implique que $|f|$ *est la valeur minimum des* capacités des coupes du réseau, puisqu'on sait déjà que $|f|$ *est* inférieur à la capacité de n'importe quelle coupe.

Valeur du flot maximal = Capacité de la coupe minimale.

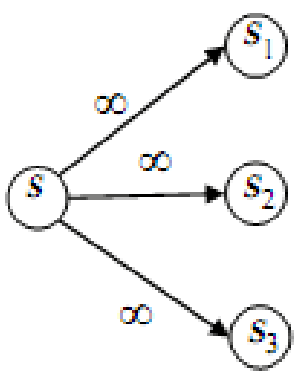
L'algorithme de Ford et Fulkerson

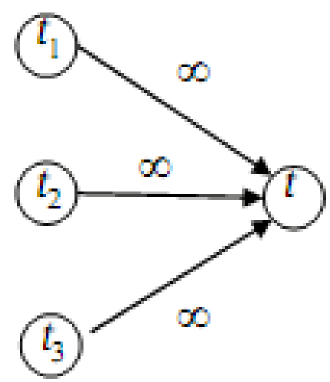
- On part d'un flot quelconque (éventuellement nul) ;
- On fabrique le réseau résiduel ;
- On cherche un chemin améliorant ;
- On itère jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de tel chemin.

Variantes et applications :

Parfois, il y a plusieurs sources et plusieurs puits.

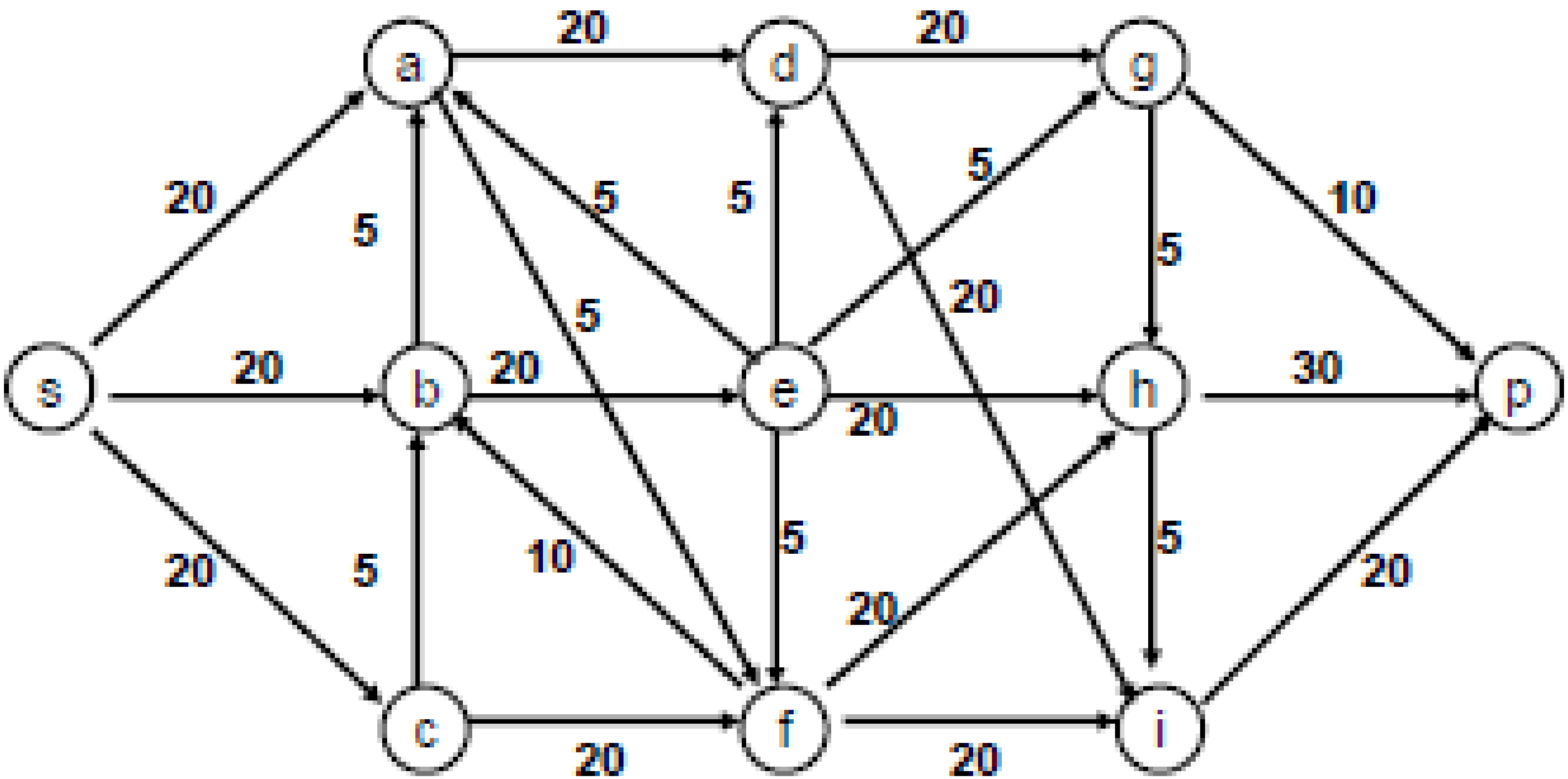
On peut dans ce cas rajouter une "super-source" et un "super-puits" reliés respectivement aux sources et aux puits par des arcs de capacité infinie.





Adjonction d'une super-source et d'un super-puits

Valeur de ce flot?



Flot maximum?