1 Latransforméé de Laplace

Definition 1 *1) Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que:*

$$|f(t)| < Me^{-\sigma t},$$

alors la transformée de Laplace associée à la fonction f est donnée par

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \text{ où } s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re} s > \sigma.$$

On écrit

$$F(s) \longleftrightarrow f(t)$$

2) La fonction F est dite l'origine de la fonction f.
3) la fonction f est dite l'origine de la fonction F.
4) La constante σ est appelé l'abssice de convergence.
D'aprés les proprietées de l'integrale on déduit que

Theorem 2 *(important)*
Si $F(s) \longleftrightarrow f(t)$ et $G(s) \longleftrightarrow g(t)$ alors
1) $\alpha F(s) \longleftrightarrow \alpha f(t)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.
2) $\alpha F(s) + \beta G(s) \longleftrightarrow \alpha f(t) + \beta g(t)$.

Theorem 3 *(Unicité)*
1) Si $F(s) \longleftrightarrow f(t)$ et $G(s) \longleftrightarrow f(t)$ alors $F(s) = G(s)$.càd l'image par la transformée de Laplace d'une fonction f est unique.
2) Si $F(s) \longleftrightarrow f(t)$ et $F(s) \longleftrightarrow g(t)$ alors $f(t) = g(t)$.càd l'iorigine de la transformée de Laplace d'une fonction $F(s)$ est unique.

Example 4 *On prend $f(t) = 1$ alors $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \dfrac{1}{s}$ si $\operatorname{Re} s > 0$ donc*

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

Example 5 *$f(t) = e^{\alpha t}$, on $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt = \dfrac{1}{s-\alpha}$ si $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$ donc*

$$e^{\alpha t} \longleftrightarrow \frac{1}{s-\alpha},$$

Example 6 *$f(t) = \cos t$, on sait que $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ alors on utilisant l'exemple 2 on déduit que*

$$\frac{e^{it}}{2} \overset{\alpha=i}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{s-i} \quad \textit{et} \quad \frac{e^{-it}}{2} \overset{\alpha=-i}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{s+i}$$

on utilisant le théoreme 2 on tire que

$$\cos t \longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{s-i} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+i} = \frac{s}{s^2+1}.$$

Example 7 *$f(t) = \sin t$, on sait que $\cos t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2}$ alors on utilisant l'exemple 2 on déduit que*

$$\frac{e^{it}}{2} \stackrel{\alpha=i}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{s-i} \;\; et \;\; \frac{e^{-it}}{2} \stackrel{\alpha=-i}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{s+i}$$

on utilisant le théoreme 2 on tire que

$$\cos t \longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{s-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+i} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Example 8 *1) Trouver l'mage pa Laplace de la fonction $f(t) = 3 + \cos t + \sin t + e^{3t}$*

comme $3 \longleftrightarrow \dfrac{3}{s}$ et $\cos t \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+1}$ et $\sin t \longleftrightarrow \dfrac{1}{s^2+1}$ et $e^{3t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{s-3}$
alors $f(t) \longleftrightarrow \dfrac{3}{s} + \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s-3}$.

2) Trouver l'mage pa Laplace de la fonction $f(t) = cht = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

comme $\dfrac{e^t}{2} \stackrel{\alpha=1}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$ et $\dfrac{e^{-t}}{2} \stackrel{\alpha=1}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$ alors $cht \longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} = \frac{s}{s^2-1}$.

Theorem 9 *Si $F(s) \longleftrightarrow f(t)$ alors*
1) $F(s+a) \longleftrightarrow e^{-at} f(t)$
2) $aF(as) \stackrel{a>0}{\longleftrightarrow} f(\dfrac{t}{a})$
3) $e^{-at} f(t - t_0) \stackrel{t \geq t_0}{\longleftrightarrow} e^{-st_0} F(s)$.

Example 10 *trouver l'image de 1) $\cos \alpha t$, 2) $\sin at$ 3) $e^{-t} \cos 3t$, 4) $f(t) = 2$, $t \geq 1$*

1) On sait que $\cos t \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+1} = F(s)$ alors $\cos \alpha t \longleftrightarrow \alpha F(\alpha s) = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$

2) de la mème manière on $\sin \alpha t \longleftrightarrow \alpha F(\alpha s) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$.

3) comme $\cos 3t \longleftrightarrow 3F(3s) = G(s) = \dfrac{s}{s^2+9}$ alors $\mathrm{e}^{-t} \cos 3t \longleftrightarrow G(s+1) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+9}$

4) on pose $g(t) = f(t+1) = 2$ *où* $t \geq 0$
comme $2 \longleftrightarrow \frac{2}{s}$ alors $f(t) = 2$, $t \geq 1 \longleftrightarrow \frac{2}{s} e^s$