Université de M'sila
Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année
Module: Optimisation sans contraintes (2020/2021)

Introduction Générale

L'optimisation consiste à rechercher les points extremums (minima et maxima) d'une fonction f, appelée *fonction objective* ou *fonction de côut.* La formulation mathématique d'un problème d'optimisation est donné par:

$$(P):\begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

où D est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, qui s'appelle *ensemble de contraintes* ou *ensemble de solutions admissibles.* Si $D=\mathbb{R}^n$, on dit que le problème (P) est sans contraintes. Généralement, D s'écrit sous forme des inégalités et équations

$$D = U \cap K,$$

avec

$$U=\{x\in\mathbb{R}^n : f_i(x)\leq 0,\ 1\leq i\leq r\} \text{ et } K=\{x\in\mathbb{R}^n : g_i(x)=0,\ r+1\leq i\leq m\}.$$

Remarque.
(1) : Sans perte de généralité, on considérera toujours le problème de minimisation $\min f(x)$, car nous avons

$$\max f(x) = -\min(-f(x)),$$

C'est à dire tout problème de maximisation peut aisément être transformé en problème de minimisation en remplaçant la fonction objectif f par son opposée $-f$. C'est la raison pour laquelle notre étude dans ce cours va se concentrer sur le problème de minimisation (P).

(2) : Le problème (P) s'appelle par fois, *Programme Mathématique.*

Classification du problème (P)

La classification aide et facilite l'étude du problème

$$(P):\begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

Cela dépend de propriétés des fonctions f, f_i et g_i. Les deux propriétés importantes sont la convexité et la différentiabilité. Elles sont utiles pour l'étude théorique du problème (P), par exmple la différentiabilté permet de trouver des conditions locales sur l'optimums et la convexité accomplir ce rôle où les conditions locales deviennent globales et les conditions nécessaires deviennent nécessaires et suffisantes au même temps.

- *Problème différentiable*: Si les fonctions f, f_i et g_i sont différentiables on dit que (P) est un *problème différentiable.*

- *Problème convexe:* Si f, f_i sont convexes et g_i sont linéaires, on dit que (P) est un *problème convexe.*

Résolution du problème (P)

Résoude le problème (P) c'est à dire:
(1) Trouver $x^* \in D$ (*appelée solution optimale globale*) qui vérifie

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in D.$$

(2) Si x^* n'existe pas, on satisfait de trouver la borne inférieure de f (s'elle existe):

$$\overline{f} = \inf \{f(x) : x \in D\},$$

par exemple

$$\overline{f} = \inf \left\{ \frac{1}{x} : x > 0 \right\} = 0$$

(3) Ou bien on montre que f n'est pas bornée inférieurement sur D, on écrit dans ce cas

$$\inf \{f(x) : x \in D\} = -\infty$$

(4) Si $D = \varnothing$, on pose

$$\inf \{f(x) : x \in D\} = +\infty$$

Traitement numérique

Dans l'optimisation on cherche toujours à résoudre analytiquement ou numériquement le problème (P). Le traitement numérique prend une grande place en analyse numérique où le principe générale des algorithmes qui résout le problème (P) consiste à générer une suite minimisante qui converge éventualement vers une solution optimale.

Notons ici qu'on doit distinguer entre deux type de problèmes *linéaires* et *non linéaires.*

Problème d'optimisation linéaire

Dans ce problème, on supposera que les fonctions f, f_i et g_i sont tous affines. Et sans doute, ils considèrent comme une tradictions naturelles de plusieurs problèmes concrets.

Problème d'optimisation non-linéaire

Si l'un des fonction f, f_i et g_i n'est pas linéaire (n'est pas affine), on parle donc d'un problème d'optimisation non linéaire.

Existence de solutions

Nous allons rappeler de deux théorèmes essentiels.

Théorème de Weierstrass.

$\left\{\begin{array}{l} D \text{ est compact} \\ f \text{ est continue sur } D \end{array}\right. \Rightarrow (P)$ *admet au moins une solution globale.*

Remarquons que la compacité est indiponsable pour l'existence de solution. Si D n'est pas compact (par exemple $D = \mathbb{R}^n$ ou D n'est pas borné), il y en a une version que nous allons utiliser dans la suite.

Corollaire

$\left\{\begin{array}{l} D \neq \varnothing, \text{ et fermé} \\ f \text{ est continue et vérifie } \lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow (P)$ *admet au moins une solution globale.*