Université de M'sila
Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année
Module: Optimisation sans contraintes (2020/2021)

Problème de Minimisation Sans Contraintes

Dans ce cours, on supposera que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et ne soumise pas à des contraintes supplémentaires.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. Considérons le problème d'optimisation sans contraintes sous sa forme générale:

$$\boxed{(P) : \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}$$

C'est un problème de *Minimisation sans contraintes*, qui peut s'écrire encore de la fonçons suivante:

$$\text{Trouver } x^* \in \mathbb{R}^n : f(x^*) \leq f(x) \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Par fois, on satisfait de trouver un point x^* qui vérifie

$$f(x^*) \leq f(x) \ \text{ pour tout } x \in V, \ \text{ avec } V \text{ est un voisinage de } x^*.$$

Définition (*Extremum global*). Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$.
(1) f admet un *minimum glabal* en x^* si

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(2) f admet un *minimum glabal stricte* en x^* si

$$f(x^*) < f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x \neq x^*$$

(3) f admet un *maximum glabal* en x^* si

$$f(x^*) \geq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(4) f admet un *maximum glabal stricte* en x^* si

$$f(x^*) > f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x \neq x^*$$

La valeur $f^* = f(x^*)$ s'appelle *valeur minimale (maximale) globale.*

Définition (*Extremum local*). Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$.

(1) f admet un *minimum local (relatif)* en x^* s'il existe un voisinage V de x^* tel que

$$\forall x \in V : f(x^*) \leq f(x),$$

(2) f admet un *minimum local stricte* en x^* s'il existe un voisinage V de x^* tel que

$$\forall x \in V \, (x \neq x^*) : f(x^*) < f(x),$$

(3) f admet un *maximum local* en x^* s'il existe un voisinage V de x^* tel que

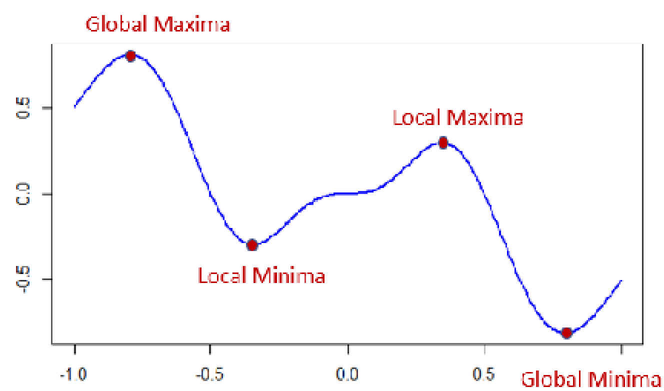
$$\forall x \in V : f(x^*) \geq f(x),$$

(4) f admet un *maximum local stricte* en x^* s'il existe un voisinage V de x^* tel que

$$\forall x \in V \, (x \neq x^*) : f(x^*) > f(x),$$

La valeur $f^* = f(x^*)$ s'appelle *valeur minimale (maximale) locale.*

Définition (*Point Extremal*). Un extremum (*point extremal*) est un point minimum ou maximum.



Définition. On note

$$\arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

l'ensemble de points minimums globaux, c'est à dire

$$x^* \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \Leftrightarrow x^* \text{ est un minimum global de } f.$$

Une notation similaire pour les minima locaux

$$x^* \in \arg\min_{x \in V} f(x) \Leftrightarrow x^* \text{ est un minimum local (sur } V) \text{ de } f.$$

Existence et unicité d'un point de minimum

Commençons par la définition d'une fonction coercive.

Définition.

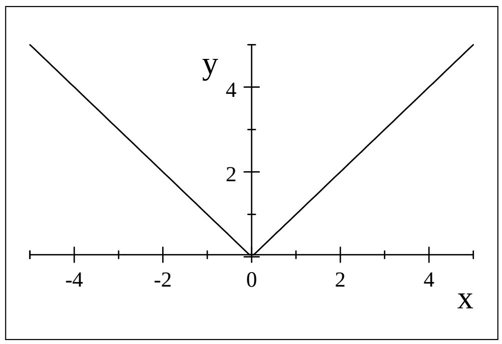
On dit que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Autrement dit, dans toutes les directions de $\mathbb{R}^n$ où x peut tendre vers l'infini, f tend vers $+\infty$.

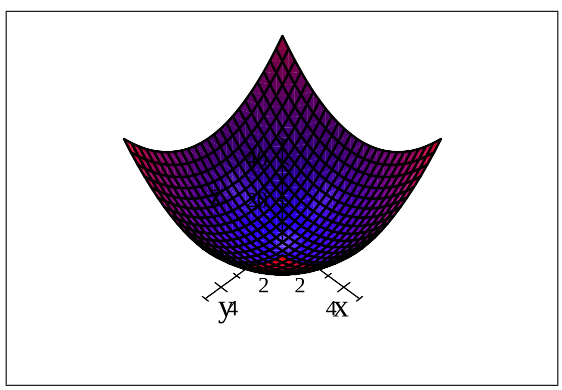
Exemple.
1) La fonction $f(x) = |x|$ est coercive; en effet

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} |x| = +\infty.$$



2) La fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est coercive; en effet

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} \left(x^2 + y^2\right) = +\infty.$$



Définition (*Coercive sur un intervalle*). On dit que la fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est coercive si

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \overset{<}{\to} b} f(x) = +\infty.$$

Théorème (Existence).

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction vérifie les deux conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} f \textit{ est continue} \\ f \textit{ est coercive} \end{array} \right. \Rightarrow f \textit{ admet au moins un minimum global.}$$

Proposition.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et fortement convexe, alors f admet au moins un minimum global.

Preuve.
Il existe $\alpha > 0$ tel que,

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), (x-y) \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x-y\|, \qquad \forall x, y \in C,$$

on pose $y = 0$, on trouve

$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x\| \overset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ce qui implique que f est coercive. $\blacksquare$

Théorème (Unicité).
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe.
- Si f admet un point de minimum, alors ce point est unique.
- Si f admet un point de maximum, alors ce point est unique.

Preuve.
Supposons qu'il existe deux minimums x_1^* et x_2^* tel que $x_1^* \neq x_2^*$ ($f(x_1^*) = f(x_2^*)$), alors pour $\lambda \in]0,1[$

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*) &< \lambda f(x_1^*) + (1-\lambda) f(x_2^*) \\ &< \lambda f(x_1^*) + (1-\lambda) f(x_1^*) = f(x_1^*), \end{aligned}$$

ce qui est impossible car x_1^* est un minimum. Alors; on a forcément

$$x_1^* = x_2^*. \qquad \blacksquare$$