Université de M'sila
Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année
Module: Optimisation sans contraintes (2020/2021)

Minimisation d'une fonction d'une seule variable

Dans ce paragraphe on va étudier les fonctions d'une seule variable. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On veut résoudre le problème suivant

$$(P) : \min_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

La recherche de points extremaux de f est liée généralement au calcul différentiel, comme le montre le résultat suivant.

Théorème (*Condition nécessaire*).
Soit x^* un point extremum local de f alors

$$f'(x^*) = 0.$$

Preuve.
Sans perte de généralité, on supposue que x^* est un min local, c'est à dire il existe un voisinage V de x^* tel que

$$\forall x \in V : f(x^*) \leq f(x).$$

Il existe $r > 0$ tel que

$$x^* \in]x^* - r, x^* + r[\subset V.$$

Soit $x^* < x < x^* + r$; alors

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\geq 0 \\ \overset{x - x^* > 0}{\Rightarrow} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} &\geq 0 \end{aligned}$$

Par passage à la limite on trouve

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = f'(x^*) \geq 0.$$

D'autre part, soit $x^* - r < x < x^*$; alors

$$f(x^*) \leq f(x)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0 \, (\text{car } x - x^* < 0) \\ &\Rightarrow \lim_{x \overset{\leq}{\to} x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = f'(x^*) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc,

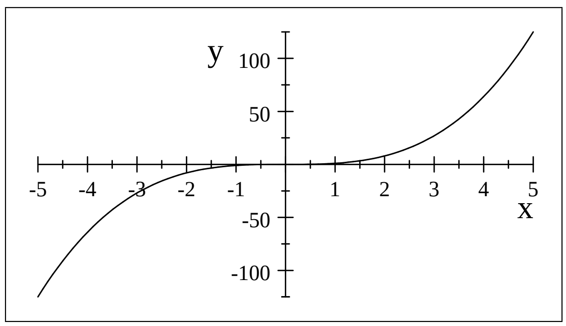
$$f'(x^*) = 0. \qquad \blacksquare$$

La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple suivant:

Exemple. $f(x) = x^3$, on a

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

mais $x = 0$ n'est pas un point extremum (ni min ni max), c'est un point d'inflexion



Théorème.

Supposons que f' s'annule en x^* et change son signe en ce point, c'est à dire il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \;\; (ou \;\; < 0) \;\; pour \; x \in \left]x^*, x^* + r\right[\\ f'(x) &< 0 \;\; (ou \;\; > 0) \;\; pour \; x \in \left]x^* - r, x^*\right[\end{aligned}$$

alors x^* est un extremum local de f.

Preuve.

Sans perte de généralité, il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ pour } x \in \left]x^*, x^* + r\right[\\ f'(x) &< 0 \text{ pour } x \in \left]x^* - r, x^*\right[\end{aligned}$$

Soit $x \in \left]x^* - r, x^* + r\right[$, on a

$$\begin{cases} f(x^*) \leq f(x) \text{ si } x \in \left]x^*, x^* + r\right[\\ f(x) \geq f(x^*) \text{ si } x \in \left]x^* - r, x^*\right[\end{cases} \Rightarrow f(x^*) \leq f(x),$$

ce qu'il montre que x^* est un minimum local. Dans l'autre cas on trouve un maximum local.

Remarque La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et présente un minimum globale en point $x = 0$, mais sa dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

ne change pas son signe en ce point.

Théorème (Cas général).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n. Soit x^* un point vérifie les deux conditions $f^{(k)}(x^*) = 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $f^{(n)}(x^*) \neq 0$. *Alors,*

1) *si n est paire* $\Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(x^*) > 0 \Rightarrow x^* \text{ est un minimum local} \\ f^{(n)}(x^*) < 0 \Rightarrow x^* \text{ est un maximum local} \end{cases}$

2) *si n est impaire* $\Rightarrow$ *x^* est un point d'inflexion*

Preuve.

1) *Si n est paire*: En utilisant le développement de Taylor à l'ordre n de f en point x^*

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x^*)(x - x^*)^n + (x - x^*)^n \epsilon(x).$$

ce qui implique (supposons que $x \neq x^*$)

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{(x - x^*)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x^*) + \epsilon(x)$$

donc

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{(x - x^*)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x^*) > 0$$

comme $(x - x^*)^n > 0$ (n est paire), il existe (voir le rappel ci-dessous) un voisinage V de x^* tel que

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &> 0 \text{ pour } x \in V \;\; (x \neq x^*) \\ &\Rightarrow f(x) \geq f(x^*) \text{ pour } x \in V \end{aligned}$$

c'est à dire x^* est un minimum local.

2) *Si n est impaire* ($\exists k \in \mathbb{N}^* : n = 2k+1$): Le développement de Taylor à l'ordre $2k-1$ de f'' en point x^* donne

$$f''(x) = \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k+1)}(x^*)(x - x^*)^{2k-1} + (x - x^*)^{2k-1} \epsilon(x).$$

On a

$$f''(x) = (x - x^*)^{2k-1} \left(\frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k+1)}(x^*) + \epsilon(x) \right)$$

Si on pose $\varepsilon = \frac{\left|f^{(2k+1)}(x^*)\right|}{(2k-1)!}$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\text{si } x &\in \left]x^* - \delta, x^* + \delta\right[\Rightarrow \epsilon(x) \in \left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[, \\
&\Rightarrow -\frac{\left|f^{(2k+1)}(x^*)\right|}{(2k-1)!} < \epsilon(x) < \frac{\left|f^{(2k+1)}(x^*)\right|}{(2k-1)!} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k+1)}(x^*) + \epsilon(x) < 0 \text{ si } f^{(2k+1)}(x^*) < 0 \\ \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k+1)}(x^*) + \epsilon(x) > 0 \text{ si } f^{(2k+1)}(x^*) > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

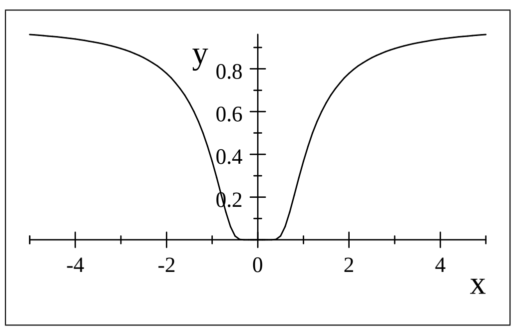
C'est à dire dans l'intervalle $\left]x^* - \delta, x^* + \delta\right[$, la quantité

$$\left(\frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k+1)}(x^*) + \epsilon(x)\right)$$

est de signe fixé. Comme le terme $(x - x^*)^{2k-1}$ change son signe en point x^* (car $2k-1$ est impaire), on conclut que $f''(x)$ change aussi son signe. Par conséquent le point x^* est un point d'inflexion. $\blacksquare$

Remarque. Les conditions du Théorème précédent sont des *conditions suffisantes* (ne sont pas nécessaires). En effet, le point $x^* = 0$ est un minimum global pour la fonction de Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$



mais, on a pour tout $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Rappel.

La limite $\lim_{x \to a} f(x) = l > 0$ est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \left]a - \delta, a + \delta\right[\Rightarrow f(x) \in \left]l - \varepsilon, l + \varepsilon\right[$$

Comme $l > 0$, on choisit par exemple $\varepsilon = \frac{l}{2}$, donc $l - \varepsilon > 0$, c'est à dire

$$0 < l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Conclusion: Points extremums d'une fonction d'une seule variable

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Etape 1: Trouver les points qui annules la première dérivée

$$x^* \in \mathbb{R} \text{ tel que } f^{'}(x^*) = 0.$$

Etape 2: On calcule les dérivées de f en chaque point x^* jusqu'on obtient $f^{(n)}(x^*) \neq 0$. Alors,

- si n est impaire$\Rightarrow$ x^* est un point d'inflexion.
- si n est paire$\Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(x^*) > 0 \Rightarrow x^* \text{ est un minimum local} \\ f^{(n)}(x^*) < 0 \Rightarrow x^* \text{ est un maximum local} \end{cases}$

Etape 3: Si on trouve que $\forall n \geq 1 : f^{(n)}(x^*) = 0$, on ne peut rien conclure sur la nature de x^*.