Chapitre 1

Introduction aux calculs des probabilitées

1.1 Notion d'évènements aléatoires

1.1.1 Epreuve, ensemble fondamental et événements

Définition 1 *On appelle une épreuve ou une expérience aléatoire toute experience dont on ne peut pas prévoir à l'avance son résultat et si, répétée dans des même conditions, elle peut donner des résultats différents.*

Définition 2 *On appelle ensemble fondamental ou univers d'une expérience aléatoire l'ensemble* Ω *de tous les résultats possibles de cette expérience.*

Exemple 1 *Comme exemple d'une expérience aléatoire, on considère :*

- *La sélection de deux objets sans remise parmi une boîte de trois objets, l'ensemble fondamental de cette expérience est donné par :*
  $\Omega = \{(objet1, objet2), (objet1, objet3), (objet2, objet3)\}$.
- *Le nombre d'appels passant par un système de communication pendant un intervalle de temps fixe, l'ensemble fondamental de cette expérience est donné par :* $\Omega = \{0, 1, ..., n, ...\}$.
- *La durée de vie d'un ordinateur, l'ensemble fondamental de cette expérience est donné par :* $\Omega = [0, +\infty[$.

Définition 3 *On appelle événement aléatoire* A *toute partie de l'ensemble fondamental* Ω. *On dit que l'événement* A *est réalisé si le résultat* ω *de l'expérience appartient à* A

Exemple 2 *Dans l'exemple précédent*

1. *l'événement* $A_2 = \{11, 12, 13.14\}$ *correspond à l'événement que Le nombre d'appels soit entre* 10 *et* 15 *appeles .*
2. *l'événement* $A_1 = [0, 800]$ *correspond à l'événement que la duré de vie soit soit inférieure ou égale à* 800 *heures .*

Définition 4 *On appelle événement élémentaire tout singleton* $\{\omega\}$ *de l'ensemble fondamental* Ω *.*

Remarque 1 *(Quelques événements spéciaux)*

— *L'ensemble* $\emptyset$ *est appelé l'événement impossible.*

— *L'ensemble fondamental* Ω *est appelé l'événement certain.*

1.1.2 Opérations sur événements

Soientt A et B deux évenements d'un ensemble fondamental Ω, on note par :

1. $\overline{A}$, l'événement contraire de A, c'est le complémentaire de A dans Ω, $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin \text{A}\}$
2. $A \cup B$, l'événement qui se produit si A ou B est réalisé, c'est la reunion de A et B.
3. $A \cap B$, l'événement qui se produit si A et B sont tous deux réalisés,c'est l'intersection de A et B.
4. A et B sont incompatibles si est seulement si $A \cap B = \emptyset$
5. Si $A \subset B$, on dit que A implique B.

1.1.3 Espace probabilisé

Définition 5 *Soit* Ω *un univers associé à une épreuve et soit* $\mathscr{P}(\Omega)$*.l'ensemble des parties de* Ω*. On appelle une probabilité* P *sur l'espace* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$*, toute application de* $\mathscr{P}(\Omega)$ *dans* $[0,1]$ *telle que :*

1. $P(\Omega) = 1$
2. *Pour toute famille d'événements* $(A_k)_{k\geq 1}$ *de* $\mathscr{P}(\Omega)$ *deux à deux incompatibles,*
   $P(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ *est appelé espace de probabilité.*

Proposition 1 *Soient* A *et* B *deux événements aléatoires*

— $P(\emptyset) = 0$

— $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

— $P(A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

— *Si* $A \subset B$*, alors* $P(A) \leq P(B)$

1.1.4 Espaces équiprobables

Définition 6 *On appel l'espace probabilisé fini* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$ *un espace équiprobable ou uniforme, si chaque élément de* Ω *a la même probabilité, c'est à dire si* Ω *contient* n *éléments, la probabilité de chaque élément est* $\frac{1}{n}$*. D'autre part, si un événement* A *est formé de* k *éléments, sa probabilité est alors* $k.\frac{1}{n} = \frac{k}{n}$*. En d'autres termes,*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Nombre de cas favorables à la réalisation}}{\textit{Nombre de cas possibles de l'ensemble fondamental } \Omega} \tag{1.1}$$

Exemple 3 *On considère l'épreuve qui consite à choisir au hasard deux composantes éléctroniques d'un lot de* 12 *composantes dont* 4 *sont défectueux. Soient :*

1. *l'événement A "les deux composantes sont défectueuses".*
2. *l'événement B "aucun des deux composantes n'est défectueuses".*
3. *l'événement C "une composantes au moins est défectueuse"*

Trouver $P(A)$ et $P(B)$.

— *le nombre de cas possibles pour choisir 2 composantes parmi les 12 composantes est égal à* $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$ *possibilités.*

— *le nombre de cas possibles pour prélever 2 composantes défectueuses parmi 4 composantes défectueuses est égal à* $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

— *le nombre de possibilités pour choisir 2 composantes non dêfectueuses parmi 8 composantes non défectueuses est égal à* $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$.

Par conséquent, $P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11} = 0.09$ *et* $P(B) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33} = 0.42$ *C est le complémentaire de B, c'est-à-dire* $C = \overline{B}$. *Ainsi, d'après la proposition 1,* $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0.58$

1.1.5 Probabilités conditionnelles et indépendance

Définition 7 *Soient A et B deux événements d'un espace de probabilité* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, *tel que* $P(B) > 0$. *la probabilités de l'événement A se realise sachant que l'événement B est realisé est appelée la probabilité conditionnelle de A sachant B et elle est notée par* $P(A/B)$ *et donnée par :*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.2}$$

Exemple 4 *On considère l'épreuve qui consiste à jeter un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6 tel que les faces portant un numéro pair sont colorées en vert, on jette ce dé et on observe de loin que la face supérieure du dé est de couleur verte. Quelle est la probabilité qu'on a obtenu un quatre ? On a l'ensemble fondamental de cette épreuve est donnée par*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \tag{1.3}$$

soit B l'événement "on obtient une face de couleur verte" et A l'événement "on obtient un quatre", on a donc :

$$B = \{2, 4, 6\}, \qquad A = \{4\} \qquad et \qquad A \cap B = \{4\}, \tag{1.4}$$

alors,

$$P(B) = \frac{1}{2} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6} \qquad et \qquad P(A/B) = \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.5}$$

On remarque ici que l'ensemble fondamental n'est plus Ω tout entier, mais est restreint à B

Exemple 5 *Parmi les étudiants du 3^{eme} licence SI, 25% des étudiants n'ont pas réussi à l'examen de Probabilités et statistiques, 15% celle de IHM, et 10% des étudiants n'ont pas réussi en IHM ni en Probabilités et statistiques. Un étudiant est choisi au hasard.*

— *S'il n'a pas réussi en IHM, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas réussi en statistiques ?*

— *S'il n'a pas réussi en statistiques, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas aussi réussi en IHM ?*

— *Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un échec dans les deux examens ?*

— *Soit A "l'étudiant a un échec en statistiques" et B " l'étudiant a un échec en IHM". Donc* $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,15$ *et* $P(A \cap B) = 0,10$. *On cherche* $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,10}{0,15} = 0,66$

— *On cherche* $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,4$

— $P(A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,25 + 0,15 - 0,10 = 0,30$

Définition 8 *Soient A et B deux événements d'un espace de probabilité*$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, *on dit que les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a :*

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \tag{1.6}$$

Exemple 6 *Dans l'exemple précédent (jet d'un dé)*

— *l'événement* $A = \{1, 2, 3\}$ *correspond à l'événement que le numéro obtenu est inférieure ou égale à 3 heures.*

— *l'événement* $B = \{1, 3.5\}$ *correspond à l'événement que Le nombre obtenu soit impair.*

On a, $A \cap B = \{1, 3\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B)\frac{1}{2}$ *et* $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq P(A).P(B)$.

Dans ce cas les événements A et B ne sont pas indépendants.

Propriété 1 *Les événement A et B sont indépendant si* $P(A/B) = P(A)$. *Autrement dit que la réalisation de B n'a aucune influence sur la réalisation de A.*

Théorème 1 *(Formule des probabilités totales) Soit* $(A_k)_{k \in K}$ *un système complet d'événements aléatoires dans* Ω, *c'est-à-dire une partition de l'univers* Ω, *si on a pour tout* $k \in K$, A_k *à de probabilités strictement positives,* $P(A_k) > 0$ *alors on peut ecrire tout événement A :*

$$P(A) = \sum_{k \in K} P(A/A_k)P(A_k). \tag{1.7}$$

Cette formule est dite formule des probabilités totales

Théorème 2 *(formule de Bayes) Soit* $(A_k)_{k \in K}$ *un système complet d'événements aléatoires dans* Ω, *si on a pour tout* $k \in K$, A_k *à de probabilités strictement positives,* $P(A_k) > 0$ *alors on peut ecrire tout événement A de probabilité* $P(A) > 0$ *:*

$$P(A_k/A) = \frac{P(A/A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i \in K} P(A/A_i)P(A_i)} \tag{1.8}$$

Cette formule est apellée formule de Bayes, Cette formule a un rôle très important dans la statistique bayésienne.

Exemple 7 *Dans une usine on dispose de 3 machines A, B et C fabriquant des pièces mécaniques d'un type déterminé. La machine A assure 25% de la production, la machine B en assure 35% et la machine C en assure 40%. 5%des pièces fabriqués à l'aide de la machine A sont défectueuses. Les pourcentages sont égaux à 4% et 2% pour les machines B et C. On tire une pièce* *d'un lot constitué de pièces fabriquées, dans les proportions indiqués, par les machines A, B et C. On constate que cette pièce est défectueuse Calculer la probabilité qu'elle ait été fabriquée :*

- *Par la machine A*
- *Par la machine B*
- *Par la machine C*

On désigne par A "la pièce est fabriquée par la machine A", par B "la pièce est fabriquée par la machine C", par C "la pièce est fabriquée par la machine C" et par D "la pièce est défectueuse". Donc on a $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,35$, $P(C) = 0,40$, et $P(D/A) = 0,04$, $P(D/B) = 0,02$ et $P(D/C) = 0,02$.

Alors d'après la formule des probabilitées totales

$$P(D)=P(D/A)P(A)+P(D/B)P(B)+P(D/C)P(C)$$

$$=(0,04)(0,25)+(0,02)(0,35)+(0,02)(0,4)$$

$=0,025$ *En appliquant la formule de Bayes on trouve :*

- $P(A/D) = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} = \frac{(0,04)(0,25)}{0,025} = 0,4$
- $P(B/D) = \frac{P(D/B)P(B)}{P(D)} = \frac{(0,02)(0,35)}{0,025} = 0,28$
- $P(C/D) = \frac{P(D/C)P(C)}{P(D)} = \frac{(0,02)(0,4)}{0,025} = 0,32$