Université Mohamed Boudiaf de M'sila — *année universitaire 2020/2021*

Faculté de technologie — *domaine : ST*

Département de génie électrique — *module : Ondes et vibrations*

Série №05

Exercice №01 *: (*couplage par élasticité) fig. 1

Deux pendules de même longueur l mais de masses différentes $(m_1 > m_2)$ oscillent autour de leurs axes respectifs $O_1 et\ O_2$ (faibles amplitudes) en étant couplés par un ressort de raideur K disposé selon la figure ci-dessous.

1- Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
2- Faire le changement de variables suivant : $\theta_1 = \beta_1 + \beta_2\ et\ \theta_2 = \beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_2$
3- Donner alors les pulsations propres $\Omega_1 et\ \Omega_2$ du système ainsi que la solution générale du mouvement sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ on avait :

$$\theta_1(0) = \theta_0\ ;\ \dot{\theta}_1(0) = 0\ ; \theta_2(0) = 0\ ;\ \dot{\theta}_2(0) = 0$$

التمرين الأول: (الاقتران بالمرونة)fig. 1

نواسان بسيطان لهما نفس الطول l لكن ذو كتلتين مختلفتين $(m_2 < m_1)$ يهتزان حول محوريهما O_1 و O_2 (اهتزازات صغيرة السعة). النواسان مقترنان بواسطة نابض ثابت مرونته K كما يوضح الشكل في الأسفل.

1- جد المعادلات التفاضلية للحركة.

2- قم باستبدال المتغيرين حسب: $\theta_2 = \beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_2$ و $\theta_1 = \beta_1 + \beta_2$.

3- أعط إذن عبارة النبضين الذاتيين Ω_2 و Ω_1 و الحل العام لحركة النظام علما أن في اللحظة $t = 0$ لدينا:

$$\theta_1(0) = \theta_0\ ;\ \dot{\theta}_1(0) = 0\ ; \theta_2(0) = 0\ ;\ \dot{\theta}_2(0) = 0$$

Exercice №02 *: (couplage par inertie) fig. 2*

Le système représenté sur la figure ci-dessous consiste en deux pendules simples identiques de masse m et de longueur l mis bout à bout.

1- Calculer le Lagrangien exact du système.
2- Donner l'expression approchée du Lagrangien dans le cas des oscillations de petites amplitudes.
3- Etablir les équations différentielles du mouvement en $\theta_1(t)\ et\ \theta_2(t)$.
4- Calculer les pulsations propres $\Omega_1 et\ \Omega_2$ et donner les deux modes propres associés, ainsi que la solution générale du mouvement du système.
5- Trouver les conditions initiales les plus simples à réaliser pour que le système oscille selon le premier mode de vibration. Même question pour le deuxième mode.

التمرين الثاني: الاقتران بالعطالة fig. 2

يمثل الشكل في الأسفل نواسين بسيطين متماثلين ذو كتلة m و طول l مقترنين كما في الشكل.

1- جد دالة لاغرونج للنظام دون اجراء أي تقريب

2- أعط العبارة التقريبية لهذه الدالة في حالة الاهتزازات صغيرة السعة.

3- جد المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة $\theta_2(t)$ و $\theta_1(t)$.

4- أحسب النبضين الذاتيين Ω_2 و Ω_1 ثم أعط النمطين الأساسين المرافقين وكذا الحل العام.

5- جد الشروط الابتدائية البسيطة التي من أجلها يمكن أن نشاهد النمط الأول بمفرده. نفس السؤال بالنسبة للنمط الثاني.

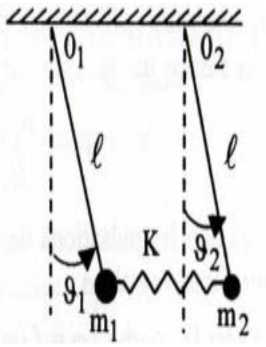


fig. 1

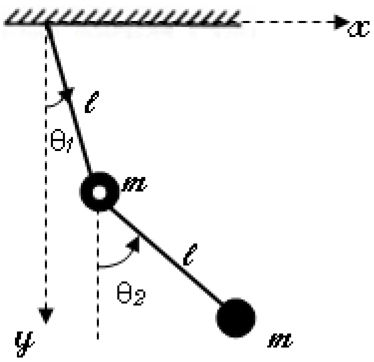
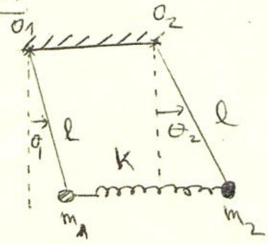


fig. 2

Solution de la serie N°5 (O.V. 2019/2020) (1)

Exo 1:



syst à 2 degrés de liberté : θ_1, θ_2 => 2 eq de Lagrange.

1- Equations diff du mvt du syst:

calculons le Lagrangien du syst:

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{m_2}^2$$

$$v_{m_1}^2 = l \dot\theta_1^2 \quad , \quad v_{m_2}^2 = l \dot\theta_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} l^2 (m_1 \dot\theta_1^2 + m_2 \dot\theta_2^2)}$$

$$U(\theta_1, \theta_2) = m_1 g l (1 - \cos\theta_1) + m_2 g l (1 - \cos\theta_2) + \frac{1}{2} K l^2 (\theta_1 - \theta_2)^2$$

pour les vib de faibles amplitudes:

$$U(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(m_1 g l + K l^2)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 g l + K l^2)\theta_2^2 - K l^2 \theta_1 \theta_2$$

Donc:

$$\mathcal{L}(\theta_1, \dot\theta_1, \theta_2, \dot\theta_2) = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot\theta_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 g l + K l^2)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(m_2 g l + K l^2)\theta_2^2 + K l^2 \theta_1 \theta_2 .$$

les équations de Lagrange du syst:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0$$

après dérivation on trouve:

(2)

$$\ddot\theta_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{m_1}\right)\theta_1 - \frac{K}{m_1}\theta_2 = 0$$

$$\ddot\theta_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{m_2}\right)\theta_2 - \frac{K}{m_2}\theta_1 = 0$$

En posant $\theta_1 = \beta_1 + \beta_2$

$\theta_2 = \beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_2$

on obtient 2 eq diff en fct de β_1, β_2

$$\ddot\beta_1 + \frac{g}{l}\beta_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{\mu}\right)\beta_2 + \ddot\beta_2 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\ddot\beta_1 + \frac{g}{l}\beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\left(\ddot\beta_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{\mu}\right)\beta_2\right) = 0 \quad \dots (2)$$

avec: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ (μ masse réduite)

(1) - (2) et (1) + (2) donnent:

$$\ddot\beta_1 + \frac{g}{l}\beta_1 = 0 \quad \dots (3)$$

$$\ddot\beta_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{\mu}\right)\beta_2 = 0 \quad \dots (4)$$

(3) et (4) découplées => β_1, β_2 coord normales.

Donc les pulsations propres sont:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{K}{\mu}}$$

(3) => $\beta_1(t) = \beta_{01}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$

(4) => $\beta_2(t) = \beta_{02}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$

alors:

$$\theta_1(t) = \beta_{01}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \beta_{02}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta_2(t) = \beta_{01}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{m_1}{m_2}\beta_{02}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

En appliquant les C.I sur θ_1 et θ_2 on aura:

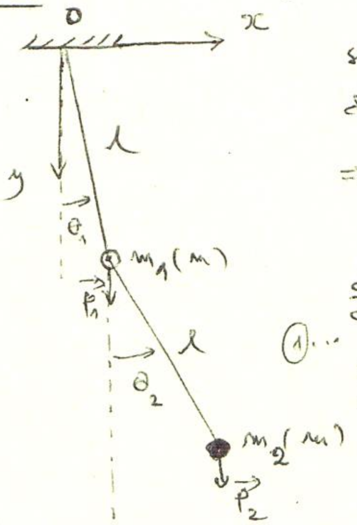
$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

et: $\beta_{01} = \frac{\mu}{m_2}\theta_0$ et $\beta_{02} = \frac{\mu}{m_1}\theta_0$ =>

$$\theta_1(t) = \frac{\mu}{m_2}\theta_0\cos(\Omega_1 t) + \frac{\mu}{m_1}\theta_0\cos(\Omega_2 t).$$

$$\theta_2(t) = \frac{\mu}{m_2}\theta_0\cos(\Omega_1 t) - \frac{\mu}{m_2}\theta_0\cos(\Omega_2 t).$$

Exo2: (3)



libre
système à 2 degrés de liberté $\Rightarrow \theta_1, \theta_2$

$\Rightarrow$ 2 équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_1}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0$$

$$(1) \ldots \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0$$

1- Lagrangien du système:

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} m v_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m v_{m_2}^2$$

$$\vec{v}_{m_1} = \frac{d\vec{Om_1}}{dt} \Rightarrow v_{m_1}^2 = l^2 \dot\theta_1^2$$

$$\vec{v}_{m_2} = \frac{d\vec{Om_2}}{dt} = \frac{d\vec{Om_1}}{dt} + \frac{d}{dt}\vec{m_1m_2}$$

$$= l\frac{d}{dt}\left[(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\vec{i} + (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow v_{m_2}^2 = l^2\left[\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 \left[2\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$U(\theta_1, \theta_2)$?

il faut d'abord calculer les forces généralisées f_{θ_1} et f_{θ_2}:

$$f_{\theta_1} = \frac{\delta W(P_1)}{\partial\theta_1} + \frac{\delta W(P_2)}{\partial\theta_1}$$

$$= mg\vec{j}\,\frac{\delta\vec{Om_1}}{\partial\theta_1} + mg\vec{j}\,\frac{\delta\vec{Om_2}}{\partial\theta_1}$$

$$= -2mgl\sin\theta_1 = -\frac{\partial U}{\partial\theta_1}$$

de m̂ on trouve:

$$f_{\theta_2} = -mgl\sin\theta_2 = -\frac{\partial U}{\partial\theta_2}$$

alors et après intégration on trouve:

(4)

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_2} = mgl\sin\theta_2$$

$$\int_{U(\theta_1,0)}^{U(\theta_1,\theta_2)} \partial U = \int_0^{\theta_2} mgl\sin\theta_2\,\partial\theta_2 \Rightarrow$$

$$U(\theta_1,\theta_2) = mgl(1 - \cos\theta_2) + U(\theta_1, 0)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_1} = \frac{dU(\theta_1,0)}{d\theta_1} = 2mgl\sin\theta_1 \Rightarrow$$

$$U(\theta_1,\theta_2) = 2mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(1-\cos\theta_2) + C$$

finalement:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2\left[2\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right] - 2mgl(1-\cos$$

$$- mgl(1 - \cos\theta_2)$$

2- Dans le cas des oscillations de f.A:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2\left[2\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_2\right] - mgl\theta_1^2 - \frac{1}{2}mgl\theta_2^2$$

3- par dérivation des éq de Lagrange (1) on trouve:

$$\begin{cases} \ddot\theta_1 + \frac{g}{l}\theta_1 + \frac{1}{2}\ddot\theta_2 = 0 \\ \ddot\theta_2 + \frac{g}{l}\theta_2 + \ddot\theta_1 = 0 \end{cases} \quad \ldots (2)$$

4- on pose: $\theta_1(t) = \bar{A}e^{j\omega t}$ $\quad \bar{A} = Ae^{j\varphi_1}$

$\theta_2(t) = \bar{B}e^{j\omega t}$ $\quad \bar{B} = Be^{j\varphi_2}$

En remplaçant ds (2) on tire l'équation aux pulsations propres suivante:

$$\begin{cases} (g/l - \omega^2)\bar{A} - \frac{1}{2}\omega^2\bar{B} = 0 \\ -\omega^2\bar{A} + (g/l - \omega^2)\bar{B} = 0 \end{cases} \quad \ldots (3)$$

$$-\omega^4 - 2(g/l - \omega^2)^2 = 0$$

d'où les 2 pulsations propres:

$$\Omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\, g/l$$

$$\Omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\, g/l$$

1er mode de vib :

③ $\Rightarrow \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

$\Rightarrow$ les 2 masses vibrent en phase.

alors : $\theta_1(t) = A\cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$

$\theta_2(t) = \sqrt{2}A\cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$

2ème mode de vibration :

③ $\Rightarrow \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 + \pi$

les 2 masses en opposition de phase

$\theta_1(t) = A\cos(\Omega_2 t + \varphi_1)$

$\theta_2(t) = \sqrt{2}A\cos(\Omega_2 t + \varphi_1 + \pi)$

5- C.I pour avoir le 1er mode seul :

$\theta_1(0) = \theta_0$ $\quad \theta_2(0) = \sqrt{2}\,\theta_0$

$\dot{\theta}_1(0) = 0$ $\quad \dot{\theta}_2(0) = 0$

2ème mode seul :

$\theta_1(0) = \theta_0$ $\quad \theta_2(0) = -\sqrt{2}\,\theta_0$

$\dot{\theta}_1(0) = 0$ $\quad \dot{\theta}_2(0) = 0$

fin