COMBINATOIRE I CHAPITRE II

January 13, 2021

Chapitre II Principes de dénombrements

II.1/ **Basics of counting**

If X is a set, then $|X|$ denote the number of elements in the set X.

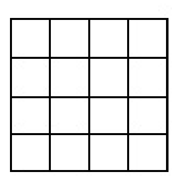
Two basic counting principles:

II.1.1/**The sum rule** (the principle of disjunctive counting) =(the whole is the sum of its parts).
If a set X is the union of disjoint non empty subsets $S_1, S_2, ..., S_n$, then:

$$|X| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_n|$$

(the sets $S_1, S_2, ..., S_n$, must have no elements in common).
Si les ensembles $S_1, S_2, ..., S_n$ constituent une partition d'un ensemble X, alors $|S_1| + |S_2| + ... + |S_n| = |X|$.

Exemple 1:
Combien y'a-t-il de carrés dont les cotés sont matérialisés sur la figure ci-dessous?



Soit S l'ensemble de tous les carrés. Notons S_1, S_2, S_3 et S_4 l'ensemble de ces carrés ayant pour cotés respectifs $1, 2, 3$ et 4 carreaux. Les sous-ensembles S_1, S_2, S_3 et S_4 constituent une partition de S (parce que ils n'ont aucun élément en commun et que leur réunion est égale à S, un carré ne peut avoir en même temps un coté de longueur 1 et un coté de longueur 2 par exemple).
D'après le principe de la somme, on a:

$|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| = 16 + 9 + 4 + 1 = 30.$

Frequently, instead of asking for the number of elements in a set, some problems ask for how many ways a certain event can happen. The difference is largely in semantics. For if A is an event, let X be the set of ways that A can be happen, and count the number of elements in X.

If $E_1, ..., E_n$ are mutually exclusive events,
and E_1 can happen in e_1 ways, and
E_2 can happen in e_2 ways, and,
....,
E_n can happen in e_n ways,
Then E_1 or E_2 or ....or E_n can happen in $e_1 + e_2 + ... + e_n$ ways.
Again we emphasize that mutually exclusive events E_1 and E_2 mean that E_1 or E_2 can happen but both cannot happen simultanousely.

The sum rule can also be formulated in terms of choices. If an object can be selected from a reservoir in e_1 ways and another object can be selected from a separate resevoir in e_2 ways, then the selection of one object from either one resevoir or the other can be made in $e_1 + e_2$ ways.

Example 2:

How many ways can we get a sum of 4 or 8 when two distinguishable dice (say one die is red and the other is white) are rolled?. How many ways can we get an even sum. The space of events E is $E = \{(r, w) / r \in \{1, ..., 6\}$ and $w \in \{1, ..., 6\}\}$ with $|E| = 36$ possible results (the integer r is for the red dice and the integer w is for the white dice).
Il est évident que seules les résultats $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ satisfont à l'evenement : $E_1 = \{(r, w) / r, w \in \{1, ..., 6\} : r + w = 4\}$, on a 3 couples qui satisfont à la condition, donc $|E_1| = 3$.

De la même façon, les seuls couples qui satisfont l'évenement:

$E_2 = \{(r,w)\,/r,w \in \{1,...,6\} : r+w=8\}$ sont: $(2,6)\,,\ (3,5)\,,\ (4,4),\ (5,3)$ et $(6,2)$. Donc, $|E_2| = 5$. Et par suite, il ya $|E_1| + |E_2| = 3+5 = 8$ possibilités d'avoir la somme $S=4$ ou bien $S=8$.

The number of ways to obtain an even sum is the same as the number of ways to obtain either the sum $2,4,6,8,10$, or 12.
We have one way $(1,1)$ to obtain the $sum = 2$,
We have 3 ways to obtain the $sum = 4$,
We have 5 ways to obtain the $sum = 6$,
We have 5 ways to obtain the $sum = 8$,
We have 3 ways to obtain the $sum = 10$,
and finaly 1 way to obtain the $sum = 12$. Consequently, the are $1+3+5+5+3+1 = 18$ ways to obtain an even sum.

In the above example we have two distinct dice. The two dice were distinguishable by color so that their outcome $(1,5)$ could be differentiated from the outcome $(5,1)$. For example, how many ways can we get a sum of 8 when two indistinguishable dice are rolled? an even sum?.
Had the dice been distinguishable, we would obtain a sum of 8 by the outcomes $(2,6)\,,\ (3,5)\,,\ (4,4)\,,\ (5,3)$ and $(6,2)$. But, since the dice are similar the outcomes $(2,6)$ and $(6,2)$ as well, $(3,5)$ and $(5,3)$ cannot be differentiated. And thus we obtain the sum of 8 with the roll of two similar dice in only 3 ways. Likewise, we can get an even sum in $1+2+3+3+2+1 = 12$ ways.

Remarque 1 Le calcul des probabilités consiste d'abord à modèliser une situation sous la forme d'un ensemble fini : l'espace des épreuves, puis à calculer les probabilités des événements. Calculer la probabilité d'un événement A revient, à calculer le nombre d'éléments (épreuves) que contient l'ensemble A (surtout lorsque les ensembles sont gros) et tous ceci nous oblige à connaitre les techniques élémentaires de dénombrement.

Exercice 1
1/ Combien de mots binairs peut-on former sur 8 bits sachant que le premier bit est consacré au signe $(+,-)$ du nombre.
2/ Soit $X = \{1,2,3,...,2n\}$. Combien y'a t il d'applications de X vers X qui appliquent les nombres pairs sur les nombres pairs et les nombres impairs sur les nombres impairs.
Preuve voir td

II.1.2/ **Principe multiplicatif (principe des choix successifs) (Product rule).**

Ce principe est appelé aussi en anglais : the principle of sequentiel counting:

If S_1, $S_2, ..., S_n$ are nonempty sets then the number of elements in the cartesian product $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ is the product $\prod_{i=1}^{n} |S_i|$.

En langage des choix successifs: quand on fait n choix successifs, s'il y a p_1 possibilités pour le premier choix, p_2 choix pour le second,..., p_n choix pour le dernier, alors il y'a en tout $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$ façons d'enchainer tous ces choix.

Ce principe peut etre formulé en termes de tâches: si deux tâches indépendantes T_1 et T_2 doivent etre exécutées l'une à la suite de l'autre, si la tâche T_1 peut être éxecutée de n_1 façons différentes et si la tâche T_2 peut etre executée de n_2 façons différentes, alors la séquence T_1T_2 peut etre executée de $n_1 \times n_2$ façons différentes. Nous obtenons donc: $n_2 + n_2 + ... + n_2$ (n_1 fois) c.à.d, $n_1 \times n_2$ manières d'éxécuter la suite de tâches T_1T_2

Example 3

Dans un restaurant, il y'a 4 façons de choisir une entrée, 3 façons de choisir un plat principal, 2 façons de choisir un légume, et 4 façons de choisir un dessert. Alors le nombre total de menus que l'on peut choisir est donc: $4 \times 3 \times 2 \times 4 = 96$.

Exercice 2

a/ Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts.

b/ Le nombre d'itineraires distincts menant d'une ville A vers une ville B est 4 et le nombre d'itineraires distincts menant de la ville B vers la ville C est 3. Combien y'a t il d'aller simple entre A et C. Combien y' a t il d'aller retour $A - C - A$ n'empruntant que des chemins distincts (l'allée est différent du retour).

Exemple 4

Si l'ensemble $S_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ contient n éléments et l'ensemble $S_2 = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ contient m éléments, alors l'ensemble $S_1 \times S_2$ contient $n \times m$ couples. En effet, on a $S_1 \times S_2 = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i \times S_2)$, et comme $|a_i \times S_2| = |S_2|$ donc $|S_1 \times S_2| = \bigcup_{i=1}^{n} |(a_i \times S_2)| = \bigcup_{i=1}^{n} |S_2| = n\,|S_2| = n \times m$.

Exercice 3 Suppose that the license plates (plaques d'immatriculations) of certain state require 3 english letters followed by 4 digits.

a/ How many different plates can be manufactured if repetition of letters and digits are allowed?

b/ How many plates are possible if only the letters can be repeated?

c/ How many are possible if only the digits can be repeated?

d/ How many are possible if no repetitions are allowed at all?

Proof

Voir td.

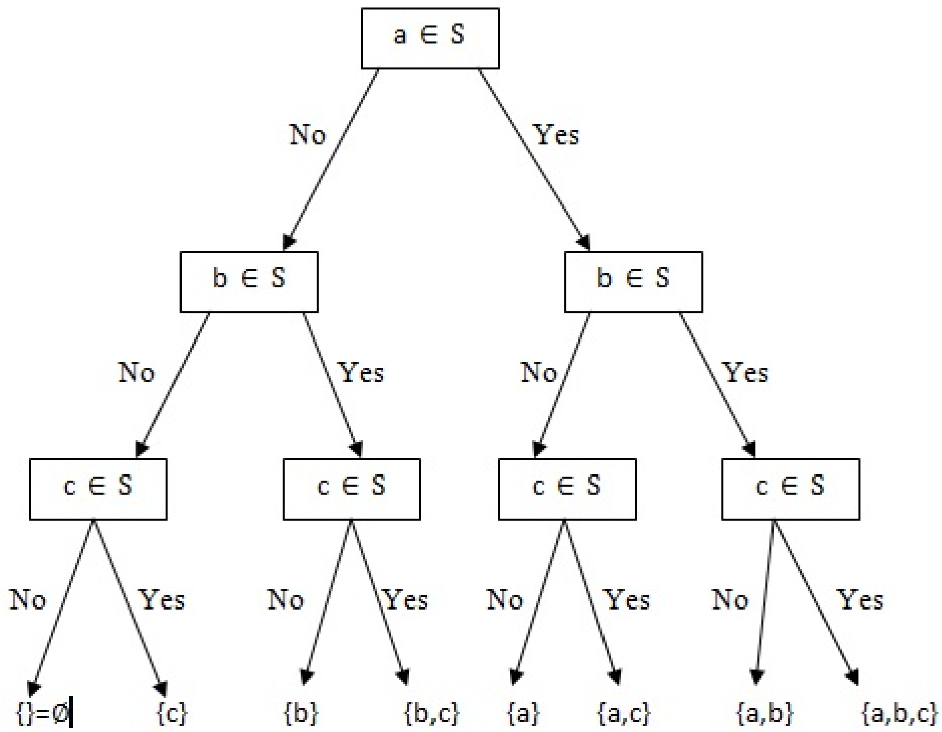
Using the product rule, we can show that the number of subsets of set with n elements is 2^n.

Let $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ denote the entire set. Then if T is any subset of V, assign to it the $n-$binary digit sequence $(y_1, y_2, ..., y_n)$ where $y_i = 1$ if $x_i \in T$ and $y_i = 0$ if $x_i \notin T$.

In this manner, we associate a unique binary sequence to each subset T of the set V. For instance, if $T = \{x_1, x_3, x_5\}$ then the associated n-digit binary sequencies is $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, ..., 0)_n$ indicating $x_1 \in T$, $x_3 \in T$, $x_5 \in T$ but the other $n-3$ elements are not in T. We have established a one -to-one correspondance between the collection of subsets of V and the collection of all n-digit binary sequences. There are 2^n n-digit binary sequence, so there are 2^n subsets of V. We have the biunivoque correspondance between the n-binary digits and the subsets of the set $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,

$(0, 0, 0, ..., 0, ..., 0)_n \longleftrightarrow \emptyset$,
$(1, 0, 0, ..., 0, ..., 0)_n \longleftrightarrow \{x_1\}$,
$(0, 1, 0, ..., 0, ..., 0)_n \longleftrightarrow \{x_2\}$,
..............................,
$(0, 0, 0, ..., 0, ..., 1)_n \longleftrightarrow \{x_n\}$,
...............................,
$(1, 1, 1, ..., 1, ..., 1)_n \longleftrightarrow V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

In the language of choice, we have also for each x_i, for $i \in \{1, 2, ..., n\}$, two possibilities: the element x_i is in the subset T or not. Using the principal of successifs choices, we have $2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^n$ different choices which correspond to the 2^n different subsets.



subsets of $\{a, b, c\}$

Exemple 5 A 2-valued boolean function of n variables is defined by the assignement of a value of either 0 or 1 to each of the 2^n n-digit binary numbers. How many Boolean functions of n variables are there?

Reponse:

Since there are 2 ways to assign a value to each of the 2^n binary n-tuples, by the rule of product there are $2 \times 2 \times ... \times 2$ (2^n times) $= 2^{2^n}$ ways to assign all the values, and therfore 2^{2^n} different Boolean functions of n variables which is the number of functions from the set $E = B \times B \times ... \times B$ (n times, with $B = \{0, 1\}$) to the set $B = \{0, 1\}$ and this number is $|B|^{|E|} = 2^{2^n}$.

Rappelons que le choix des éléments d'un ensemble peut se faire de plusieurs manières: l'ordre de choix à une importance ou non; on autorise ou non de choisir plusieurs fois le même objet. Prenons l'exemple suivant qui illustre cette situation. On considère un ensemble E ayant 3 éléments $E = \{a, b, c\}$, choisir 2 éléments de cet ensemble peut se faire de plusieurs manières: selon que l'ordre

de choix à une importance ou non et que l'on autorise ou non de choisir le même élément plusieurs fois.
Le tableau ci-dessous visualise tous les cas possibles.

	répétition	sans répétition
avec ordre	aa, ab, ac ba, bb, bc ca, cb, cc	ab, ac ba, bc ca, cb
sans ordre	aa, ab, ac bb, bc, cc	ab, ac, bc

Lists

A list is an ordered sequence of objects. The order in which elements appear in a list is significant, for example $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$. The number of elements in a list is called its length.
Then () is the empty list,
(1) is of length 1,
$(1, 2)$ is a pair,....etc.
The numbers of pairs of the set $\{1, 2, ..., n\}$ is $n \times n = n^2$ which are:
$(1, 1)$, $(1, 2)$,..., $(1, n)$
$(2, 1)$, $(2, 2)$,...,$(2, n)$
....
....
....
$(n, 1)$, $(n, 2)$,...., (n, n).

If we have n choices for the first place and m choices for the second place, then we have $n \times m$ possible lists of length 2.

Two important list of length p in which each élément of the list is selected from among n possibilities.

II.2/ **Arrangement avec répétition**
Définition 1
Etant donné un ensemble fini de n objets, on appelle arrangement avec répétition de ces n objets p à p, tout groupement ordonné de p objets choisis parmi les n objets avec répétition. Le nombre d'arrangements de n objets p à p est égal à n^p

- Pour construire un tel arrangement, on choisit un élément de l'ensemble que l'on place en première position, il y'a n choix possibles. Puis on choisit un élément de l'ensemble que l'on place en deuxième position, il y'a n choix possibles, et ainsi de suite jusqu'au p ième élément et il y'a n choix possibles. Ainsi il y' a n^p choix possibles qui représente le nombre d'arrangements de n objets p à p avec répétition.

Ce nombre représente aussi le nombre des applications d'un ensemble E vers un ensemble F avec $|E| = p$ et $|F| = n$. Rappelons qu'une application f de l'ensemble $E = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ vers l'ensemble $F = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ peut être représenté par $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_p \\ f(a_1) & f(a_2) & . & . & . & f(a_p) \end{pmatrix}$ avec la séquence $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)) \in F^p$ c.à.d, un p-uplet de F^p.

Exemples 6
a/ Si E et F sont des ensembles finis et si F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F, si $|E| = p$ et $|F| = n$ alors $\left|F^E\right| = n^p$.
b/ Le nombre de tirages différents de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n est égal à n^p lorsque les tirages sont avec remise (on dit aussi que les tirages sont non exhaustifs).
c/ Le nombre de façons de placer p objets distincts dans n cases où chaque case pouvant éventuellement contenir plusieurs objets est n^p.

Théorème 1
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le cardinal de l'ensemble E^p des p-listes de E est n^p.
Exemple 7

I.4/ **Arrangement sans répétition**

Exercice Démontrer par récurrence sur l'ensemble X que le nombre de fonctions de X vers l'ensemble Y est $|Y|^{|X|}$.
Preuve: Voir td.

Exercice 4 Soit A et B deux ensembles et f une application de A vers B. On suppose que B est fini de cardinal n et que pour tout y dans B, le cardinal de l'image réciproque de y par f, $f^{-1}(\{y\})$, est égal à un entier non nul p.
1/ Montrer que f est surjective.
2/ Soit R la relation d'équivalence associée à f. Montrer que A/R et B sont équipotents.
3/ En déduire le cardinal de A.

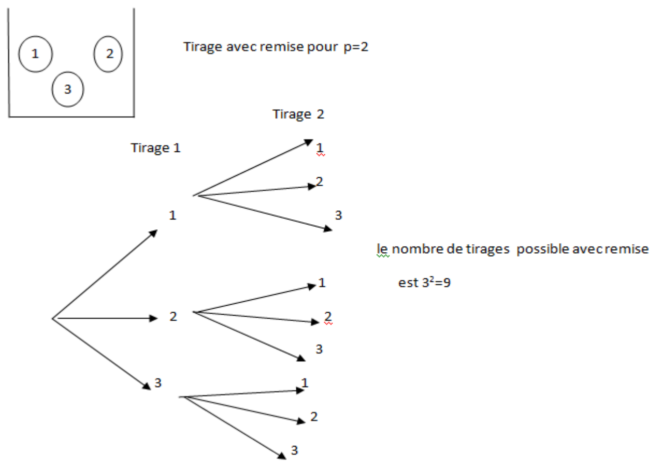


Figure 1: deux tirages possibles avec remise de 3 boules

Exercice 5 Soit A et B deux ensembles de cardinaux respectifs n et p et désignons par $\mathcal{F}(A, B)$ l'ensemble des applications de A vers B.

1/ Déterminer le nombre d'applications de A vers B pour $n = 1$ et $n = 2$.

2/ Soit $a \in A$ et $A_1 = A - \{a\}$. Montrer que $\mathcal{F}(A, B)$ et $\mathcal{F}(A_1, B) \times \mathcal{F}(\{a\}, B)$ sont équipotents.

3/ En déduire, par un raisonnement par récurrence, le nombre d'applications de A dans B.

II.3 Arrangement sans répétition

Définition 2 Etant donné un ensemble fini de n objets, on appelle arrangement sans répétition de ces n objets p à p tout groupement ordonné de p objets choisis parmi n objets sans répétition. Le nombre d'arrangements de n objets p à p est égal à $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ si $n \geq p$ et nul sinon et sera noté A_n^p.

En général on dit arrangement pour un arrangement sans répétition. Pour construire un arrangement sans répétition, on choisit un élément de l'ensemble que l'on place en première position, il y'a n choix possibles. Puis on choisit un élément de l'ensemble différent du premier choix que l'on place en deuxième position, il y'a $n-1$ choix possibles, ce nombre de choix se multiplient au nombre de choix précédents, puis on choisit un élément de l'ensemble différent des deux premiers que l'on place en troisième position et ainsi de suite jusqu'au p élément, qui lui reste $n-(p-1) = n-p+1$ éléments à choisir (on a déja choisi les $p-1$ éléments donc, le p-ième élément lui reste $n-(p-1)$ éléments pour son choix, et par suite, le nombre d'arrangements possible est $n(n-1)\ldots(n-p+1)$.

Exemples 8
a/ Si E et F sont des ensembles finis et si $I(E,F)$ désigne l'ensemble des applications injectives de E dans F avec $|E|=p$, $|F|=n$ et $p\leq n$ alors $|I(E,F)|=n(n-1)\ldots(n-p+1)$.
b/ Si $|E|=|F|=n$ alors $sym(E)=S_n$ désigne l'ensemble des permutations des éléments de E.
c/ Le nombre de tirage différents de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n est égal à $n(n-1)\ldots(n-p+1)$, lorsque les tirages sont sans remise après chaque tirage (on dit que les tirages sont exhaustifs)
d/ Le nombre de façons de placer p objet distincts dans n cases chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est $n(n-1)\ldots(n-p+1)$.
In this case, we have n choices for the first element, and for each of these n choices, it remains $n-1$ choices for the second element, and $n-2$ choices for the third element, ..., and then $n-(k-1)$ choices for the k-th element. Then, the total of possible choices in this case is :

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-(k-1))$, which represent (le nombre tirage sans remise de k boules d'un réservoir contenant n différentes boules (n différents couleurs).

Nous allons appliquer le principe des choix successifs pour calculer le nombre d'applications d'un ensemble fini E vers un ensemble fini F. On note par F^E l'ensemble des applications de E vers F.

Théorème 1

Soient E et F deux ensembles finis, alors F^E est fini et on a: $\left|F^E\right|=|F|^{|E|}=m^n$.

Cet ensemble représente aussi les suites avec répetition de longueur $n=|E|$, qu'on peut former à l'aide des éléments de l'ensemble fini F de cardinal $|F|=m$.
Preuve:

Notons l'ensemble E par $E=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Une application $f:E\longrightarrow F$, qu'on peut repésenter par $f=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & . & . & . & f(a_n)\end{pmatrix}$ est complètement determinée par le choix des valeurs attribuées à $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$. Comme il y'a $|F|$ possibilités pour chacune des $f(a_i)$, pour $i\in\{1,\ldots,n\}$, alors par le principe multiplicatif : le nombre de façons de définir f est égal au produit des n facteurs chacun égal $|F|$, donc il y'a $|F|\times|F|\times\ldots\times|F|$ (n fois)$=|F|^{|E|}$ façons de définir une application de E vers F.
Exercice 6 Montrer que le nombre des fonctions booléennes de n variables est 2^{2^n}.

Exemples 9

1/ soit $E = \{a\}$ et $F = \{0,1,2\}$. Il y'a trois applications de E vers F :
$f : a \longmapsto 0$, $g : a \longmapsto 1$, $h : a \longmapsto 2$.

2) Soit $E = \{a,b\}$ et $F = \{0,1,2\}$. Pour définir une application de E vers F, nous pouvons partir des trois applications précedentes, choisir à chaque fois une image différente pour l'élément b. On obtient:

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_5 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$f_7 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} f_8 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_9 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de ces applications est $\left|F^E\right| = |F|^{|E|} = 3^2 = 9$. Comme il y'a trois éléments dans F, il y'a trois choix possibles pour l'image de b, donc $3 \times 3 = 3^2$ applications de E vers F.

Si l'ensemble E avait un troisième élément c, chacune des neufs applications précédentes permettrait de définir trois applications de $\{a,b,c\}$ dans F (puisqu'il y'a trois possibilités de choix pour l'image de l'élément c. Il y aurait donc $9 \times 3 = 3^3$ applications de E vers F. On peut représenter l'arbre des applications de $E = \{a,b,c\}$ vers $F = \{1,2\}$ par:

2/ Injections d'un ensemble vers un autre (arrangements sans répétition)

Rappelons qu'une application f de E dans F est une injection, lorsque deux éléments quelconques distincts dans E ont des images distinctes dans F. Soient E, F 2ensembles avec $|E| = p$ et $|F| = n$. On note par A_n^p le nombre d'injections

d'un ensemble E à p éléments vers un ensemble F à n éléments.
1/ Supposons que $p > n$.
Dans ce cas on a $|E| = p > |F| = n$, donc E a plus d'éléments que F, les images de tous les éléments de E ne peuvent être des éléments distincts de F, et par suite il n'y'a aucune application de E vers F qui soit injective$\Longrightarrow A_n^p = 0$.

Exemple 10 Il est impossible de former un mot de longueur 4 avec seulement 3 lettres sans qu'on répète au moins une lettre.
2/ On suppose $p = 1$.
Dans ce cas, E possède un seule élément, et par suite toute application de E vers F est une injection

$$\Longrightarrow A_n^1 = n^1 = n.$$

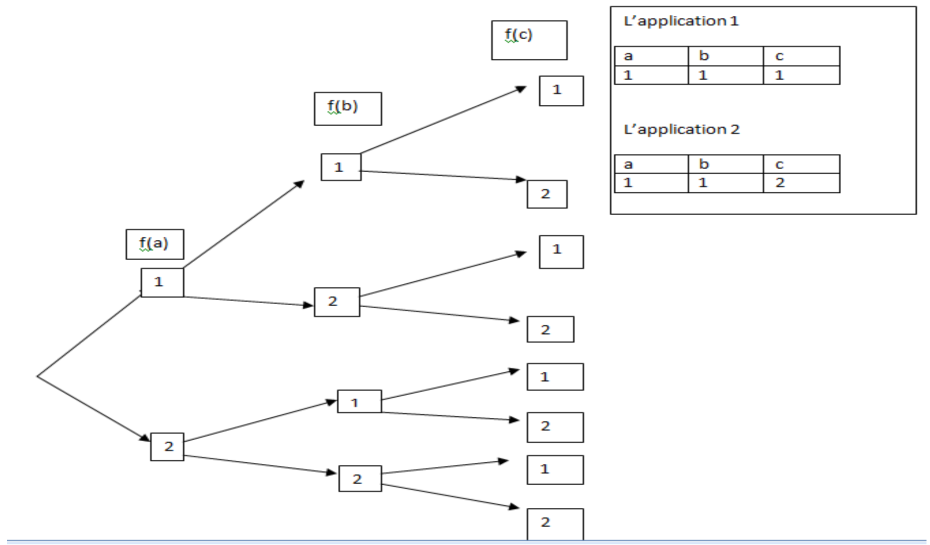


Figure 2: applications de l'ensemble { a,b,c} vers l'ensemble {1,2}

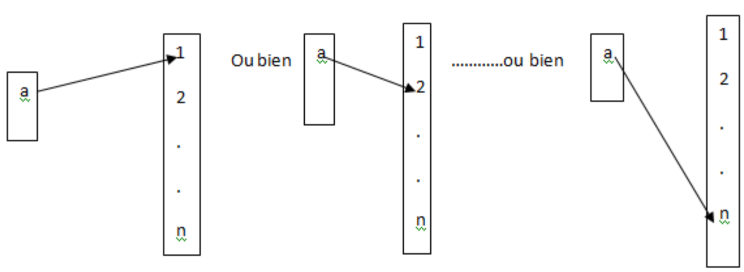


Figure 3: applications de E={a} vers F={1,2,...,n}

3/ Supposons que $1 < p \leq n$. Nous allons appliquer encore une fois le principe des choix successifs pour compter le nombre des applications injectives d'un ensemble E vers un ensemble F.

Pour définir une application injective f de E dans F on choisit d'abord $f(a_1)$ arbitrairement, ce qui fait on a n possibilités, puis $f(a_2)$ mais cette fois il n'ya plus que $(n-1)$ possibilités car $f(a_2)$ doit être différent de $f(a_1)$. On choisit ensuite $f(a_3)$, il n'ya que $(n-2)$ possibilités (pour éviter les valeurs prises par $f(a_1)$ et $f(a_2)$. On continue ainsi, et lorsqu'on arrive au moment de choisir $f(a_p)$ compte tenu des $(p-1)$ interdictions dues aux choix de $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{p-1}))$ il ne reste plus que $(n-(p-1))$ possibilités, et par suite le nombre total des injections de E vers F, en utilisant le principe multiplicatif, est :

$A_n^p = n(n-1)(n-2) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ avec par définition $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ (lire n-factoriel) avec $0! = 1$.

Un p-arrangement sans répétition = une p-liste sans répétition= un mot de longueur p sans répétition de lettres.

Un arrangement de p éléments de F est parfois appelé une suite de p éléments distincts de F (on dit aussi arrangement de n éléments p à p). Deux arrangements diffèrent si leurs images ne contiennent pas les mêmes éléments ou si les éléments ne sont pas pris dans le même ordre.

Exemple 11
Dix chevaux participent au départ d'une course. Combien y'a t'il de tiercés différents dans l'ordre (combien de choix de trois gagnants dont l'ordre est significant). Soit $F = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ l'ensemble des chevaux. Il s'agit de calculer le nombre d'arrangements de trois éléments de F. Et on $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$. Remarquons que (a, b, c) et (b, a, c) sont des tiercés différents puisque l'on tient compte de l'ordre.

Exercice 7
On appelle arrangement d'ordre p de d'un ensemble A, toute suite ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les éléments de A.
1/Montrer que l'ensemble des arrangements d'ordre p de A est équipotent à

l'ensemble des applications injectives de $\{1, ..., p\}$ dans A.
2/ En déduire le nombre d'arrangements d'ordre p de A, noté $A(n, p)$.
3/ En déduire le nombre de permutations de A (arrangements d'ordre n de A) noté $p(n)$.
Preuve Voir td.

II.4/ Bijection d'un ensemble sur lui même (permutation d'un ensemble E avec $|E| = n$).

Lorsque $|E| = |F| = n$, toute injection de E vers F est une bijection de E vers F.

Il y'a donc $A_n^n = n!$ bijections E sur lui même.

Notation

Rappelons qu'on appelle factorielle de l'entier naturel n et le note $n!$ l'entier $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ avec $0! = 1$ (le nombre de bijection d'un ensemble de 0 éléments vers lui même est l'application vide)

Permutation et le groupe S_n.

On appelle permutation de n éléments toute bijection de l'ensemble de ces n éléments vers lui même. On note une permutation $\pi \in S_n$ par:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & n \\ \pi(1) & \pi(2) & . & . & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

On note par S_n l'ensemble des permutations d'un ensemble de n éléments. L'ensemble S_n muni par la composition des applications $(S_n, \circ)$ est un groupe dit groupe de permutations de n lettres.

EXERCICE

Démontrer que $(S_n, \circ)$ est groupe.

Exercice 8 In how many ways can 7 women and 3 men be arranged in row if the 3 men must always stand next to each other

Proof: see the td

Exercice

How many 6-digit numbers without repetition of digits are there such that the digits are all non zero and 1 and 2 do not appear consecutively in either order.

II.4.2/ **Cyclic groups**

cyclic notation

The permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ has the effect of moving the elements around in a cycle. This is called a cycle of length 3 and we write this as (132) and this signify $(1 \to 3 \to 2 \to 1)$. Evidently, this permutation can be also written $(321) = (213) = (132)$.

In general, if $a_1, a_2, ..., a_r$ are distinct elements of $\{1, 2, 3, ..., n\}$ the permutation $\pi \in S_n$ defined by $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3, ..., \pi(a_{r-1}) = a_r$, $\pi(a_r) = a_1$ and $\pi(x) = x$ if $x \notin \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, is called a cycle of length r or an r-cycle. We denote it by $(a_1 a_2 ... a_r) = (a_1 \to a_2 \to ... \to a_r \to a_1)$.

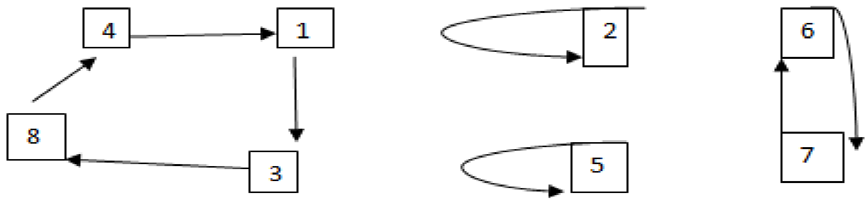


Figure 4: orbites de la permutation π

Proposition 1

A r-cycle in S_n has order r.

Proof:

If $\pi = (a_1 a_2 ... a_r)$ is an r-cycle in S_n, then $\pi(a_1) = a_2, \pi^2(a_1) = a_3, \pi^3(a_1) = a_4, ..., \pi^{r-1}(a_1) = a_r$ and $\pi^r(a_1) = a_1$.

Similarly, $\pi^r(a_i) = a_i$ for $i = 1, 2, ..., r$. Since π^r fixes all the other elements, it is the identity permutation, but none of the permutations $\pi, \pi^2, ..., \pi^{r-1}$ equal the identity, because they move the element a_1. Hence, the order of π is r.

Example 12

Write down $\pi = (1342)$, $\rho = (13)$ and $\sigma = (12) \circ (34)$ as permutation in S_4. Calculate $\pi \circ \rho \circ \sigma$.

Solution: We have $(1342) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, (13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, then $\sigma = (12) \circ (34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ...etc.

Permutations that are not cycles can be split up into two or more cycles as follows:
If $\pi \in S_n$ and $a \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ the orbit of a under π consist of distinct elements a, $\pi(a)$, $\pi^2(a)$, $\pi^3(a)$,..., We can split a permutation up into its different orbits, and each orbit will give rise to a cycle. Consider the permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$. We have: $\pi(1) = 3$, $\pi^2(1) = \pi(\pi(1)) = \pi(3) = 8$, $\pi^3(1) = 4$, $\pi^4(1) = 1$. Then the orbite of 1 is $orb(1) = \{1, 3, 8, 4\}$. Evidently, $orb(1) = orb(3) = orb(8) = orb(4)$. Since π leaves 2 and 5 fixed then $orb(2) = \{2\}$, $orb(5) = \{5\}$. And finally, $orb(6) = \{6, 7\}$ is a 2-cycle.

Disjoint cycle decomposition of π is:

We have $\pi = (1384) \circ (2) \circ (5) \circ (67) = (67) \circ (2) \circ (5) \circ (1384) = (67) \circ (1384)$.
Proposition

Every permutation can be written as a product of disjoint cycles

$$\pi = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ...\gamma_k$$

where γ_i are the cycles obtained as described in the precedent example.
Corollaire

The order of a permutation is the least common multiple of lengths of its disjoint cycles.
Proof
If $\pi = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ...\gamma_k$ is the decomposition π in disjoint cycles $\Longrightarrow \forall m$, $\pi^m = \gamma_1^m \circ \gamma_2^m \circ ...\gamma_k^m$ Because the cycles are disjoint, and this is the identity iff γ_i^m is the identity for each $k \geq i \geq 1$, the least such integer is the least common multiple of the orders of the cycles.
Example 13

The cycle decomposition of π is

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (13825) \circ (476).$$

Then the order of π is the $\operatorname{lcm}(5, 3) = 15$. we can calculate $\pi^2, \pi^3, \pi^4, ...,$ until we obtain the identity.

La formule suivante donne une éstimation de $n!$ pour n assez large.
Théorème *(*formule de Stirling)
lorsque n tend vers l'infini le rapport $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \longrightarrow 1$,
ce qui donne

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

II .5/ Combinaisons sans répétition (l'ordre est sans importance)**:**
Définition 3 Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. Une p-combinaison (ou bien combinaison de p éléments) de E est une partie de E ayant p éléments. On dit aussi combinaison de n objets p à p.
Exemple 14
Soit $E = \{a, b, c\}$ et $p = 2$ les combinaisons de deux éléments de E sont les parties contenant deux éléments de E qui sont: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$.
Il est important de noter que:

- Dans une partie tous les éléments sont distincts.

- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales, (l'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance).

Théorème 2

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Ce nombre est aussi noté $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right)$ (notation englo-saxonne).

Preuve

A partir d'une combinaison sans répétition de n objets p à p, on obtient un arrangement de n objets p à p en ordannant ces p objets. Comme il y'a $p!$ façons d'ordonner p objets, on peut dire qu'à une combinaison correspond $p!$ arrangements et ainsi on obtient la relation: $A_n^p = p!C_n^p$.

Exemples 15

a/ Le nombre de façons de placer p objets indiscernables dans n cases chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est C_n^p.

b/ Le nombre d'applications d'un ensemble ayant n éléments dans $\{0, 1\}$ qui envoient exactement p éléments dans 0 et les autres dans 1 est égal à C_n^p.

c/ Le nombre d'applications strictements croissantes de $\triangle_p = \{1, 2, ..., p\}$ dans $\triangle_n = \{1, 2, ..., n\}$ est égal à C_n^p.

Relations entre les nombres ou les coefficients C_n^p

Il existe de nombreuses relations entre les coefficients C_n^p. On citera les plus importantes:

Propriétés

1/ $C_n^0 = C_n^n = 1$,

2/ $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$, *relation de Pascal.*

3/ $C_n^p = C_n^{n-p}$, *relation de symétrie.*

4/ $C_n^p = \frac{n}{p} C_n^{p-1}$.

Preuve:

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer par calcul algèbrique en utilisant seulement le résultat $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, Ou bien d'une manière combinatoire:

Une preuve combinatoire est une démonstration qui tend à établir une identité entre deux expressions a priori différentes. La preuve s'appuie généralement sur deux techniques :

Une preuve par double dénombrement, qui consiste à compter un même ensemble d'objets de deux manières différentes ;

Une preuve par bijection, qui consiste à établir une bijection entre deux ensembles dont on souhaite prouver l'équipotence (bijection). On donne les preuves combinatoire de ces quatres propriétés:

Pour la propriété 1

On a $C_n^0 = C_n^n = 1$. En effet, il y'a une seule partie de 0 éléments dans tout ensemble de n éléments, c'est la partie $\emptyset$. De même, dans un ensemble de

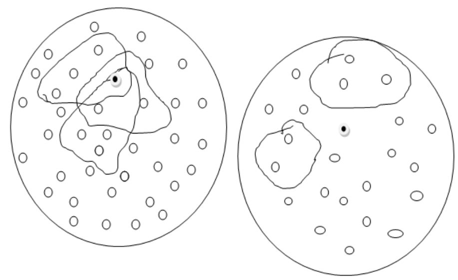


Figure 5: parties avec et sans l'élément a_1

n éléments il y'a 1 une seule partie contenant n éléments, c'est l'ensemble en entier.

Pour la propriété 2: cette relation est connue sous le nom la relation de Pascal.

Considérons un ensemble E de n éléments avec $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Distinguons l'élément a_1, par exemple, de cet ensemble. Pour former une partie de p éléments de E, cette partie peut contenir l'élément a_1 ou bien ne pas contenir l'élément a_1. Le nombre de parties de E ne contenant pas l'élément a_1 est égal au nombres de parties de p éléments qu'on peut former de l'ensemble $E_1 = E - \{a_1\}$, et ce nombre est bien C_{n-1}^{p}. De même, le nombre de parties de p éléments qui contiennent chacune l'élément a_1 sont au nombre de C_{n-1}^{p-1}, qui sont toutes différentes des parties précedentes par au moins l'élément a_1, et par suite ce nombre vérifie bien $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$.

3/ La propriété 3 est connue sous le nom de la propriété de symétrie des combinaisons: dans un ensemble E de n éléments, à toute partie de p éléments de E correspond une partie unique de $n-p$ éléments E et vice versa, et par suite on a la propriété (voir schema)

conséquences: $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$

$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n.$

Formule du binôme de Newton

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire d'élément unité 1_A, pour tout couple (a, b) de A^2 et tout entier naturel n on a: $(a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$ où $a^0 = b^0 = 1$.

Preuve

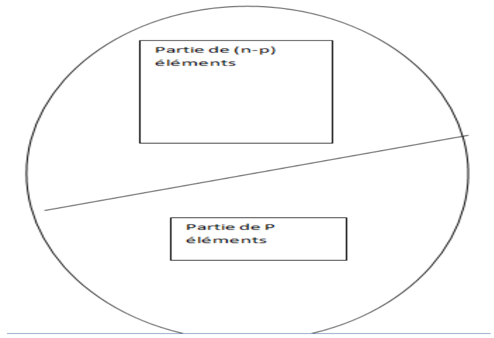


Figure 6: Correspondance 1-1 entre partie de p éléments et de (n-p) éléments

1/ par récurrence sur n (voir td).
2/ preuve combinatoire: En developpant le produit $(a+b)^n = (a+b)\times(a+b)\times \ldots\times(a+b)$ nous obtenons 2^n termes (on a n termes $(a+b)$ et pour chaque terme on le choix de choisir soit a soit b). On peut voir chaque terme comme une suite de longueur n de l'ensemble $\{a,b\}$, par exemple le choix de a à chaque fois nous donne $a^n = a\times a\times \ldots \times a$, et c'est la seule façon d'obtenir a^n. Pour obtenir le terme $a^p b^{n-p}$, on doit choisir a (p fois) et b ($n-p$ fois). Mais ce choix peut se faire en C_n^p façons différentes, d'où la formule pour p allant 0 à n.

Exercice 9 Soit A un ensemble à n éléments. On appelle combinaison d'ordre p de A, toute suite non ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les éléments de A.

1/ Quelle est le nombre d'arrangements qu'on peut associer à une combinaison d'ordre p de A.

2/ En déduire le nombre de combinaisons d'ordre p de A, noté $C(n,p)$.

Exercice 10 Soit a un élément d'un ensemble E. Déterminer le nombre de sous ensembles de E de cardinal p :

- qui contiennent l'élément a.
- qui ne contiennent pas a.

En déduire: $C(n,p) = C(n-1,p-1) + C(n-1,p)$.

Exercice 12 Soit un ensemble à n éléments, et $A\subset E$ un sous ensemble de p éléments de E. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et seul élément de A.

Exercice 13

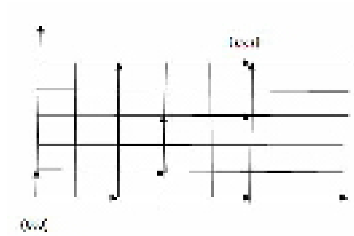


Figure 7: Chemins du point (0,0) au point (p,q)

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$; $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$; $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$; $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} C_n^k$.

En utilisant la formule du binôme démontrer que:

1/ $2^n + 1$ est divisible par 3 $\iff$ n est impair.

Exercice 14

En part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y'a t'il de chemins possibles? combien de chemins passent par un point particulier c. Voir le schéma ci après. ,

Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de la façon suivante:

Binôme	triangle de pascal(Coefficients)
$n=0$, $(a+b)^0 = 1$	1
$n=1$, $(a+b)^1 = a+b$	1 1
$n=2$, $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
	$\downarrow$
$n=3$, $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$n=4$, $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

$n=0$.................1					
$n=1$.................1	1				
$n=2$.................1	2	1			
$n=3$.................1	3	3	1		
$n=4$.................1	4	6	4	1	
$n=5$.................1	5	10	10	5	1

. etc

La formule du binôme possède plusieurs applications

1/ En prenant $a = b = 1$ dans la formule du binôme de newton on obtient:

$2^n = C_n^0 + C_n^p + ... + C_n^p + ... + C_n^n$, qui représente le nombre de parties dans un ensemble de n éléments.

2/ En prenant $a = 1, b = -1$ on obtient $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$.

3/ On a $\sum\limits_{k \leq n, k \text{ pair}} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \sum\limits_{k \leq n, k \text{ impair}} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^{n-1}$.

4/ $\sum\limits_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n 2^{n-1}$.

Preuve:

1. On développe $(1+1)^n$ avec le binôme de Newton.
2. On développe $(1-1)^n$ avec le binôme de Newton.
3. Par 1 et 2, on a le système, en notant $P = \sum\limits_{k \leq n, k \text{ pair}} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ et $I = \sum\limits_{k \leq n, k \text{ impair}} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$,

$$\left\{ \begin{array}{c} P + I = 2^n \\ P - I = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2P = 2^n \\ P = I \end{array} \right\} \Longrightarrow P = 2^{n-1} m = I.$$

4. Cette somme représente la somme des cardinaux de toutes les parties de E. Pour $X \in \wp(E)$ on X et X^c sont disjoints avec $|X \cup X^c| = |X| + |X^c| = n$, d'où $\sum\limits_{X \in \wp(E)} |X| + |X^c| = \sum\limits_{X \in \wp(E)} n$ or $\sum\limits_{X \in \wp(E)} |X| = \sum\limits_{X \in \wp(E)} |X^c|$ et par suite $2 \sum\limits_{X \in \wp(E)} |X| = n \sum\limits_{X \in \wp(E)} 1 \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n}{2} \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n 2^{n-1}$.

I.7/ **Combinaisons avec répétition**

Définition 4 Soit $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un ensmble de n éléments. Soit p un entier naturel. On appelle combinaison avec répétition d'ordre p de E toute collection $[e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ip}]$ de p éléments (distincts ou non) de E. On peut représenter cette combinaison par:$[e_1, ..., e_1, e_2, ..., e_2, ..., e_n, ..., e_n]$ avec e_1 est répété p_1 fois, e_2 est répété p_2, ...,et e_n est répété p_n fois avec $p_1 + p_2 + ... + p_n = p$.

Proposition 2

Le nombre de combinaison avec répétition d'ordre p de E est $K_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$.

PreuveUne combinaison avec répétition d'ordre p est caractérisée par le nombre p_k de fois où l'élément e_k est répété, avec $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = p$.

Tout ceci revient donc à resoudre l'équation suivante en nombres entiers positifs ou nuls $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ (*) où x_1 représente le nombre de fois de répétition de e_1, et x_2 représente le nombre de répétition de e_2,..., et x_n représente le nombre de fois de répétition de e_n. Tout ceci revient donc a imaginé la distribution de p identical balls sur n distincts boxes où chaque boxe peut contenir plusieurs balls. Pour simplifier la solution au problème on imagine que les $(n-1)$ signes plus + dans l'équation "*" sont des cloisons et on veut distribuer ces p identical balls entre ces $(n-1)$ cloisons ou bien résevoirs. La solution est tout simplement $C^p_{(n-1)+p} = C^{n-1}_{n+p-1}$, (On imagine que les solutions sont les différentes façons d'ecrire un mot de longueur $(n-1)+p$ avec seulement deux symbols $\{*, I\}$ et ce mot doit contenir $(n-1)$ symboles "I" et p symboles "$*$". Le nombre de solutions est égal au nombre de mots différents qu'on peut écrire avec ces deux symboles, selon la condition préscrite, qui est bien $C^p_{(n-1)+p}$

Exemple 16

Given 12 identical coins and wish to distribute them into four distinct boxes. In how many ways can we do this?.

One of the distribution can be like this: $\circ\circ I \circ\circ\circ\circ I \circ\circ\circ I \circ\circ\circ \longleftrightarrow (2,4,3,3)$, or like this $\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ III \longleftrightarrow (12,0,0,0)$. There are 12 coins $\circ$ and three "I" then 15 symbols, we choose three places from 15 places for the dividers. This can be done in $C^3_{15} = 455$ ways.

Théorème 3

The number of nonnegative integer solutions to the equation $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ *is* $\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n \end{pmatrix}$.

Proof

The solution $(x_1, x_2, ..., x_k)$ corresponds to a partition of a set of n identical objects into k distinct classes with x_i is the number of elements in the i-th classe: two partitions will different iff the string $(x_1, x_2, ..., x_k)$ are different.

Sample problem

Find the number of non negative integer solutions to $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.

Solution We have $k = 4$ and $n = 11$ so there are $\begin{pmatrix} 11+4-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix} =$ 364 solutions.

Sample problem

Find the number of integer solutions to $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, where $x_1 \geq 2$, $x_1 \geq -2$, $x_3 \geq 3$, and $x_4 \geq 5$.

Solution

Define $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 + 2$, $y_3 = x_3 - 3$, $y_4 = x_4 - 5$ we have then the equivalent equation $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 - 2 + 2 - 3 - 5 = 12$ with $y_i \geq 0$ for $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. There are $\begin{pmatrix} 12+4-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix} = 455$ solutions.

Essayons de démontrer le résultat suivant qui montre la correspondance entre choisir une partie de p éléments d'un ensemble E de cardinal n et le choix d'une suite strictement croissante de cette ensemble. De même le choix d'une partie de p éléments avec répétition correspond au choix d'une suite croissante au sens large de cette ensemble.

Exercice Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $E = \{1, ..., n\}$.

1/ Combien y'a -t-il de suite strictement croissantes $(x_1 < x_2 < ... < x_p)$ d'éléments de E.

2/ Combien y'a-t-il de suites croissantes au sens large $(x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_p)$ d'éléments de E.

Solution 1/ Une suite $(x_1 < x_2 < ... < x_p)$ strictement croissante est entièrement déterminée par le choix de p éléments distincts dans E, qu'il suffit alors d'ordonner, il y'a donc autant de suites strictement croissantes que de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments, soit donc $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

2/ Associons à une suite $(x_1,\ x_2, ..., x_p)$ d'éléments de E, croissante au sens large, la suite $(y_1,\ y_2, ..., y_p)$ strictement croissante définie par $y_k = x_k + (k-1)$. On a $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3 + 2, ..., y_p = x_p + (p-1)$.

La suite $(y_1,\ y_2, ..., y_p)$ ainsi obtenue est un élément de l'ensemble $E' = \{1, ..., n+p-1\}$. Et donc le nombre de suites $(x_1,\ x_2, ..., x_p)$ croissantes au sens large est égal à $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$.

I.8/ **Permutation avec répétition**

Définition 5

Soit un entier naturel $n \geq 1$. Soit $E = [e_1, ..., e_1, e_2, ..., e_2, ..., e_n, ..., e_n]$ une collection de p éléments dont p_k fois l'élément e_k avec $p = p_1 + p_2 + ... + p_n$. On appelle permutation avec répétition de E, toute suite ordonnée des p éléments de E.

Proposition 3

Le nombre de permutations avec répétition de E est $\frac{p!}{p_1!p_2!...p_n!}$.

Preuve

Pour construire une permutation de E, on choisit successivement

- p_1 positions pour e_1 parmi les positions possibles, on a $C_p^{p_1}$ choix possibles;
- p_2 positions pour e_2 parmi les $p - p_1$ positions restantes, soit $C_{p-p_1}^{p_2}$;
- p_3 positions pour e_3 parmi les $p - p_1 - p_2$ positions restantes, soit $C_{p-p_1-p_2}^{p_3}$;
-...
- p_n positions pour e_n parmi les $p - p_1 - p_2 - ... - p_{n-1} = p_n$ positions restantes, soit $C_{p_n}^{p_n}$.

Le principe de multiplication donne donc le nombre de permutations avec répétition de E est $C_p^{p_1} \times C_{p-p_1}^{p_2} \times C_{p-p_1-p_2}^{p_3} \times ... \times C_{p_n}^{p_n} = \frac{p!}{p_1!(p-p_1)!} \times \frac{(p-p_1)!}{p_2!(p-p_1-p_2)!} \times \frac{(p-p_1-p_2)!}{p_3!(p-p_1-p_2-p_3)!} \times ... \times \frac{p_n!}{p_n!0!}$, d'où le résultat $\frac{p!}{p_1!p_2!...p_n!}$.

Example 17

How many distinct words, including nonsense ones, can be produced using all the lettres of the word MISSISSIPPI?

In first, imagine the lettres are distinguished, like $\mathrm{MI_1S_1S_2I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4}$ we have 11 distinct letters, and these can be permuted in 11! distinct ways. But the words $\mathrm{MI_1S_2S_1I_2S_4S_3I_3P_2P_1I_4}$, $\mathrm{MI_1S_4S_3I_2S_1S_2I_3P_1P_2I_4}$, for example, are the same as the word MISSISSIPPI, the answer to the problem, is $\frac{11!}{4!4!2!1!}$.

The same argument leads to the following general result: if we have objects of m kinds, k_i indistinguishable objects of i-th kind, where $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, then the number of distinct arrangements of these onjects in a row is given by $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$ this expression is usually written $\begin{pmatrix} n \\ k_1, k_2, ..., k_m \end{pmatrix}$ and is called a multinomial coefficient. In particular, for $m = 2$, we have the binomial coefficient: $\begin{pmatrix} n \\ k, n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Theorem 4 (Multinomial theorem). For arbitrarly real numbers $x_1, x_2, ..., x_m$ and any natural number $n \geq 1$, the following equality holds:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+...+k_m=n \\ k_1,...,k_m \geq 0}} \begin{pmatrix} n \\ k_1, k_2, ..., k_m \end{pmatrix} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}.$$

Example 18 The coefficient of $x^2y^3z^5$ in $(x+y+z)^{10}$ is $\begin{pmatrix} 10 \\ 2, 3, 5 \end{pmatrix} = 2520$.

Exercice 15 Prove the multinomial theorem by induction on n.

The pigeonhole principale (le principe des cages à pigeons)

Suppose m pigeons fly into n pigeonholes to roost, where $m > n$ then obviously at least two pigeons must roost in the same pigeonhole. This property, is called the pigeonhole principal (principe des cages à pigeons). This principale can stated in terms of functions.

Theorem (the pigeonhole principale)

Let $f : X \to Y$ where X and Y are finite sets with $|X| = m$, $|Y| = n$, and $m > n$. Then there exist at least two distinct elements x_1 and x_2 such that $f(x_1) = f(x_2)$.

Proof

let $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Suppose f is injective, then $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)\}$ are all distinct in the set Y .Then $|Y| = n \geq m$. But this contradict the fact that $m > n$. Therefore f must non injective and there is at least two distinct elements x_1 and x_2 such that $f(x_1) = f(x_2)$.

The pigeonhole principale is also called the Dirichlet Box principale

Examples Si le nombre des étudiants 1ere année master discrète dépasse 12 alors certainement, il y'a au moins deux étudiants qui sont nés dans le même mois.

Exemple 19 Supposant qu'on choisit 367 étudiants de l'université de M'sila, alors il existe au moins deux étudiants qui ont le même jour de naissance. En effet, comme il y'a 366 jours dans l'année et on a 367 étudiants, il suffit de prendre 366 les cages et 367 les pigeons. Et donc, nécessairement il y'a au moins deux étudiants qui ont le même jour de naissance. Montrons que ce principe peut etre utilisé pour démontrer des choses assez profonde.

It is well known that the decimal expansions of rational numbers are periodic, we will show this using this principal. Rappelons qu'en effectuant la division de la fraction $\frac{p}{q}$ on obtient une partie entiere e et une partie fractionnaire f, i.e, $\frac{p}{q} = e + f$ avec $0 \leq f < 1$. La partie fractionnaire f est certainement finie ou bien périodique.

Exemples 20:

$\frac{355}{4} = 88 + 0,75$, $\frac{4111}{33300} = 0,12\overbrace{345}\overbrace{345}\overbrace{345}....$

Proposition Prove that the decimal expansion of a rational number is periodic

Proof:

Consider, for convenience, a positive rational number $\frac{a}{b}$,where $0 < a < b$. Let $\frac{a}{b} = 0, d_1d_2d_3...$, we have

$10a = bd_1 + r_1,$

$10r_1 = bd_2 + r_2,$

$10r_2 = bd_3 + r_3,$

.

.

.

$10r_j = bd_{j+1} + r_{j+1}$

.

.

and $0 \leq r_i < b$ for every i. The digits $d_1, d_2, ...$, in the decimal expansion are the quotients when $10a$, $10r_1, ...$ are divided by b. Since a remainder has only b choices, by the pigeonhole principle, two of the remainders $r_1, r_2, ..., r_{b+1}$ must be equal; that is, $r_j = r_k$ for some j and k, where $1 \leq j < k \leq b + 1$. Consequently, $d_{k+1} = d_{j+1}$, $d_{k+2} = d_{j+2}, ..., d_{2k+j} = d_k$, $d_{2k+j+1} = d_{j+1}$ and so on. Thus $d_{j+1}...d_k$ is the smallest block repeated and the period of the decimal expansion is $k - j$. See the book [ ] for more examples.

Example 21

Suppose $a_1, ..., a_n$ are integers. Then "some consecutive sum" $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+m}$ is divisible by n.

Consider these n sums:

$s_1 = a_1,$

$s_2 = a_1 + a_2,$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

.

.

.

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$

These are all consecutives sums, if one of them is divisible by n we are done. If not, dividing each by n leaves a non-zero remainder $r_1 = s_1 \bmod n$, $r_2 = s_2 \bmod n$, ..., these remainders have values in $\{1, 2, ..., n - 1\}$. Since there are n sums and only $(n - 1)$ remainders then certainely there is two sums with the same remainder,

Exercices pour révision

Exercice 16

Démontrer la formule

$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n+1)! - 1.$

Exercice 17

Combien un polygone de n sommets a t-il de diagonales? Vérifier la formule obtenue dans les cas particuliers: $n = 3, n = 4, n = 5$.

Exercice 18 a/ En évaluant parmi les combinaisons de n objets p à p celles contenant un élément précisé a et celles ne le contenant pas, établir la formule

$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}.$

b/ Etablir, par un procédé analogue à celui de la question a), la formule en distinguons 2 éléments: $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-2 \\ p \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} n-2 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-2 \\ p-2 \end{pmatrix}.$

c/ Même question en distinguons 3 éléments:

$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-3 \\ p \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} n-3 \\ p-1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} n-3 \\ p-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-3 \\ p-3 \end{pmatrix}.$