Série d'exercices N°1

Exercice 0.1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements de probabilités respectives $p(A)$ et $p(B)$.

- Calculer la probabilité $p[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)]$en fonction de $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$
- On suppose que la probabilité $p(B) \neq 0$. Déduire de la question précédente que l'on a $p(A/B)+p(\overline{A}/B) = 1$

Exercice 0.2. La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes :

- Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?
- Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Exercice 0.3. Une urne contient x boules blanches et y boules rouges. On tire deux boules simultanément de l'urne.

- Quelle est la probabilité, $p(x, y)$ qu'elle soient de même couleur?
- Quelle relation doivent vérifier x et y pour que l'on ait $p(x, y) = \frac{1}{2}$? Quels sont les couples (x, y) qui vérifient cette relation?

Exercice 0.4. On lance deux dés équilibrés à 6 faces.

1. Donner l'ensemble fondamental Ω des résultats possibles et la probabilité p associée à cette expérience
2. Donner la probabilité d'obtenir:

- Un double
- Au plus un nombre pair
- Exactement un nombre pair,
- Deux nombres qui se suivent.

Exercice 0.5. Dans une usine on dispose de 3 machines A, B, C fabriquant des pièces mécaniques d'un type déterminé. La machine A assure 25% de la production, la machine B en assure 35% et la machine C en assure 40%. 5% des pièces fabriqués aide de la machine A sont défectueuses. Les pourcentages sont égaux à 4% et 2% pour les machines B et C. On tire une pièce d'un lot constitué de pièces fabriquées, dans les proportions indiqués, par les machines A, B et C. On constate que cette pièce est défectueuse Calculer la probabilité qu'elle ait été fabriquée:

1. Par la machine A.
2. Par la machine B.
3. Par la machine C.

Exercice 0.6. Un Joueur dispose de 9 dés: deux de type A, trois de type B et quatre de type C. Le tableau ci-dessous indique, pour chaque type de dés, le nombre de faces portant le numéro i(i=1,2,3,4,5,6)

	1	2	3	4	5	6
A	1	2	1	0	1	1
B	1	2	2	0	1	0
C	2	2	2	0	0	0

Le joueur considéré choisit au hasard un seul de ces dés et fait 421 en trois coups. Quelles sont les probabilités respectives pour qu'il ait joué avec un dé de type A, de type B, de type C?

Expence aloire - nement

- On appelle **Expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat est déterminé seulement par le hasard.
- L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers. On le notera Ω.
- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle un espace probabilisable (fini).
- Toute partie de Ω est appelé événement.
- Un événement comprenant un seul élément s'appelle événement élémentaire.
- L'ensemble vide est appelé événement impossible.
- L'événement " A ou B " est A (A est réalisé ou B est réalisé).
- l'événement " A et B " est $A \cup B$ (A est réalisé et B est réalisé).
- l'événement contraire de A est le complémentaire de A dans Ω , not.
- A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \phi$.
- On appelle système complet d'événements de Ω toute famille finie d'événements $(A_{nn}$ vérifiant :

$$\bullet\ \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \phi, \qquad \bullet\ \cup_i A_i = \Omega$$

Espace probabilisé fini

On appelle probabilité sur l'univers Ω toute application $p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant

$$\bullet\ p(\Omega) = 1, \qquad \bullet\ \forall A \cap B = \phi\ disjoints)p(A) = p(A) + p(B)$$

Le couple (Ω, p) s'appelle alors un espace probabilisé fini.

Probabilités conditionnelles

A et B deux nements aloires tels que $p(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

Formule des probabilités totales

$(A_k)_{k \in K}$ un syst complet d'événements aléatoires dans Ω

$$P(A) = \sum_{k \in K} P(A/A_k)P(A_k). \tag{2}$$

Formule de Bayes pour n événements

$(A_k)_{k \in K}$ un syst complet d'évments aléatoires dans Ω, si on a pour tout $k \in K$, $P(A_k) > 0$ alors on peut ecrire tout événement A de probabilité $P(A) > 0$:

$$P(A_k/A) = \frac{P(A/A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i \in K} P(A/A_i)P(A_i)} \tag{3}$$