Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année/ Optimisation
Année universitaire: 2020/2021

Série d'exercice N: 3

Exercice 1:

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\min_D f(x) = -\max_D -f(x).$$

Exercice 2:

Soient $g : I \to \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions telle que g est une fonction continue, strictement croissante et

$$D \subset \mathbb{R}^n \text{ et } f(D) \subset I.$$

Montrer que l'ensemble des solutions du problème $\min_D f(x)$ est identique à l'ensemble des solutions du problème $\min_D g(f(x))$.

Application: Montrer que les problèmes suivants admettent une solution globale, puis calculer cette solution:

1. $\min e^{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\min \sqrt{x^4+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3:

1. Quel est le minimum de la fonction affine suivante

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

où: a) $D = [a,b]$ b) $D =]a,b[$ c) $D = \mathbb{R}$

2. Quel est la condition sur n pour que $x = 0$ soit un min/max de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

Exercice 4.

Soit f la fonction à variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{x^4+1} - x + 3$$

Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

On fixe $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème suivant

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}} g(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Solution Ex 1:
D'une part,

$$\forall x \in D : f(x) \geq \min_D f(x) \Rightarrow \forall x \in D : -f(x) \leq -\min_D f(x)$$

donc, par passage au *max*, on trouve

$$\max_D (-f(x)) \leq -\min_D f(x) \Rightarrow \boxed{-\max_D (-f(x)) \geq \min_D f(x)}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \forall x &\in D : -f(x) \leq \max_D -f(x) \Rightarrow \forall x \in D : f(x) \geq -\max_D -f(x) \\ &\Rightarrow \boxed{\min_D f(x) \geq -\max_D -f(x)} \end{aligned}$$

Solution Ex 2:
Soit x^* une solution du problème $\min_D f(x)$, c'est à dire

$$\forall x \in D : f(x) \geq f(x^*),$$

comme g est strictement croissante, on a

$$\forall x \in D : g \circ f(x) \geq g \circ f(x^*)$$

ce qu'il montre que x^* est une solution pour $\min_D g(f(x))$.
Inversement, soit x^* une solution du problème $\min_D g(f(x))$, c'est à dire

$$\forall x \in D : g \circ f(x) \geq g \circ f(x^*),$$

comme g est continue et strictement croissante, alors $g : I \to g(I)$ est inversible et sa fonction inverse $g^{-1} : g(I) \to I$ est aussi strictement croissante. Donc;

$$\forall x \in D : g^{-1} \circ g \circ f(x) \geq g^{-1} \circ g \circ f(x^*)$$

c'est à dire

$$\forall x \in D : f(x) \geq f(x^*) \Rightarrow x^* \text{ est une solution pour } \min_D f(x).$$

Application:
1. On a

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(e^{x^2-x+1}\right) = +\infty,$$

la fonction e^{x^2-x+1} est coercive+continue, le problème $\min e^{x^2-x+1}$ admet au moins une solution globale sur $\mathbb{R}$. Comme e^x est strictement croissante, on va résoudre le problème

$$\min f(x) = x^2 - x + 1.$$

Alors, $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Encore, $f''(x) = 2 > 0$, alors $x = \frac{1}{2}$ est un min global.
2. On a

$$\lim_{|x| \to +\infty} \sqrt{x^4 + 1} = +\infty,$$

la fonction $\sqrt{x^4+1}$ est coercive+continue, le problème

$$\min \sqrt{x^4+1}$$

admet au moins une solution globale sur $\mathbb{R}$. Comme $\sqrt{x}$ est strictement croissante, on va résoudre le problème

$$\min f(x) = x^4 + 1.$$

Alors, $f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$. Encore,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 \left(f''(0) = 0\right) \\ f'''(x) &= 24x \left(f'''(0) = 0\right) \\ f''''(x) &= 24 > 0 (\text{l'ordre de la dérivée est paire}) \end{aligned}$$

alors $x = 0$ est un min global $\min \sqrt{x^4+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution Ex 3:

1. La fonction affine f n'admet pas de points critiques. Dans ce cas, on étudie la fonction sur la borne de D.

a) Sans perte de généralité on suppose que $a > 0$. Alors sur $D = [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned} f \text{ présente un } \mathit{min} \text{ en } x &= \alpha \\ f \text{ présente un } \mathit{max} \text{ en } x &= \beta \end{aligned}$$

b) Sur $D =]\alpha, \beta[$, la fonction f n'admet ni valeur *minimale* ni *maximale*, on écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} \inf \{f(x) : x \in]\alpha, \beta[\} &= \lim_{\substack{> \\ x \to \alpha}} f(x) = a\alpha + b \\ \sup \{f(x) : x \in]\alpha, \beta[\} &= \lim_{\substack{< \\ x \to \beta}} f(x) = a\beta + b \end{aligned}$$

c) Sur $D = \mathbb{R}$, (similaire au cas (b)), on écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} \inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} &= -\infty \\ \sup \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} &= +\infty \end{aligned}$$

2. Nous avons,

$$f'(x) = nx^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

on continue la dérivée

$$f^{(n)}(x) = n \times (n-1) \times ... \times 1 \Rightarrow f^{(n)}(0) \neq 0.$$

Alors, la condition sur n pour que $x = 0$ soit un min/max est

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ est impaire} \Rightarrow x = 0 \text{ est un point } \textit{d'inflexion} \\ \text{si } n \text{ est impaire} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } f^{(n)}(0) > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ est un } \mathit{min} \\ \text{si } f^{(n)}(0) < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ est un } \mathit{max} \end{cases} \end{cases}$$

Solution Ex 4:

Nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to+\infty} f(x) &= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x+3\right)\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ est coercive+continue, elle admet au moins un point minimum global sur $\mathbb{R}$.

Solution Ex 5:

Tout d'abord, on a

$$g(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\left(\frac{(x_1-\mu)^2}{2}+\ldots+\frac{(x_n-\mu)^2}{2}\right)}$$

Alors,

$$g^{'}(\mu) = (\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu) g(\mu).$$

Comme $g(\mu) > 0$, alors

$$g^{'}(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

On calcul la deuxième dérivée

$$g^{''}(\mu) = (\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu) g^{'}(\mu) - ng(\mu)$$

On remarque que

$$g^{''}(\mu^*) = -ng(\mu^*) < 0$$

Alors, $\mu^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ est un max global (car g admet un seul point critique)