Université de M'sila
Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année/ Optimisation
Année universitaire: 2020/2021

Série d'exercice N: 4

Exercice 1:

Soit la fonction suivante $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
1. Montrer que f est coercive.
2. Calculer le gradient en tout point puis déterminer les points critiques de f.
3. En déduire le minimum global de f.

Exercice 2:

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$$

avec A une matrice *réelle symétrique*.
1- Calculer $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$.
2- Soient λ_{min}, λ_{max} la plus petite et la plus grande valeur propre de A. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lambda_{\min} \|x\|_2^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_{\max} \|x\|_2^2 .$$

3- Supposons que A est **définie positive**:
 - Montrer que f est coercive.
 - En déduire que f admet un minimum global (unique).
 - Montrer que: x^* est solution du système $Ax = b$ *si et seulement si* x^* réalise le minimum (unique) de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^n$.
4- Si A n'est pas semi définie positive, montrer que f n'admet pas de minimums sur $\mathbb{R}^n$
5- **Application**: Soit

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz - 3x - 4y + 4 \end{array}$$

a- Mettre f sous la forme d'une fonction quadratique

$$\frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$$

où A est une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^3$ et $c \in \mathbb{R}$.
b- Résoudre le problème $\min_{x\in\mathbb{R}^3} f(x)$.

Exercice 3:

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes en indiquant la nature des ces points:
1. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$;
2. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;
3. $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$
4. $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$
5. $f(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 5y$;
6. $f(x,y) = x^4 - xy^2 + 5y^2 + 2x$;
7. $f(x,y,z) = 4x^2 + 6y^2 + 3z^2$.

Solution Ex 1:

Soit la fonction suivante $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n$

1. On pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) &= \lim_{r\to+\infty} f(r,\theta) \\ &= \lim_{r\to+\infty} \left(\frac{r^4}{4}\cos^4(\theta) - r^2\cos(\theta)\sin(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \right) \\ &= \lim_{r\to+\infty} r^4 \left(\frac{1}{4}\cos^4(\theta) - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \right) = +\infty \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(x^3 - y, -x + 2y\right)^T = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ (0,0), \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

3. La matrice hessienne

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $(x,y) = (0,0)$:

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas définie (point selle)}$$

- $(x,y) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$:

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ définie positive (minimum local)}$$

- $(x,y) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$:

$$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ définie positive (minimum local)}$$

Conclusion: Comme f admet au moins un mini global et

$$f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{16}$$

alors $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ sont minimums globaux.

Solution Ex 2:

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$$

avec A une matrice réelle symétrique.

1- $\nabla f(x) = Ax - b$ et $\nabla^2 f(x) = A$.

2- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

avec v_i est un vecteur propre associe à λ_i. Donc

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \left\langle A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle \end{aligned}$$

alors

$$\lambda_{\min} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle \leq \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle \leq \lambda_{\max} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle$$

d'où

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_{\max} \|x\|^2 .$$

3- Supposons que A est **définie positive**:

Nous avons $\lambda_{\min} > 0$, et encore

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &\geq \lambda_{\min} \|x\|^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c \geq \frac{\lambda_{\min}}{2} \|x\|^2 - b^T x + c \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c \geq \frac{\lambda_{\min}}{2} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| + c \\ &\geq \|x\|^2 \left(\frac{\lambda_{\min}}{2} - \frac{\|b\|}{\|x\|}\right) + c \end{aligned}$$

C'est à dire

$$f(x) \geq \|x\|^2 \left(\frac{\lambda_{\min}}{2} - \frac{\|b\|}{\|x\|}\right) + c \overset{\|x\| \to +\infty}{\to} +\infty$$

Donc $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Comme f est continue et coercive alors elle admet au moins un minimum global. Ce minimum est unique, car f est strictement convexe (la matrice hessienne est définie positive).

- Si x^* est solution du système $Ax = b$ alors

$$\begin{aligned} Ax^* &= b \Rightarrow Ax^* - b = 0 \\ &\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow x^* \text{ est un minimum global} \end{aligned}$$

Inversement, si x^* réalise le minimum (unique) de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, il vérifie que

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow Ax^* - b = 0 \Rightarrow Ax^* = b.$$

4- Nous avons $\nabla^2 f(x) = A$ (la matrice hessienne est constante).
Si A n'est pas semi définie positive, alors la condition nécessaire d'un point minimum n'est pas vérifie alors f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}^n$.
5- **Application**: Soit

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz - 3x - 4y + 4 \end{array}$$

a- On a toujours

$$\begin{aligned} A &= \nabla^2 f(x) \\ b &= \nabla f(0) \\ c &= f(0) \end{aligned}$$

On a,

$$\nabla f(x) = (2x + y + z - 3, 2y + x + z - 4, 2z + y + x)^T$$

alors

$$\begin{aligned} c &= f(0) = 4 \\ b &= \nabla f(0) = (-3, -4, 0)^T \\ A &= \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2- D'après sylvester,

$$\begin{aligned} \text{Mineur principal diagonal d'ordre 1} &: \quad 2 \\ \text{Mineur principal diagonal d'ordre 2} &: \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \\ \text{Mineur principal diagonal d'ordre 3} &: \quad \det A = 4 \end{aligned}$$

la matrice A est définie positive, la solution de problème $\min_{x \in \mathbb{R}^3} f(x)$ est la solution unique du système

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -3 \\ x + 2y + z = -4 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right).$$

Solution Ex 3:

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes en indiquant la nature des ces points:
1. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$. On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (2x-2, 4y)^T = 0 \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \{(1,0)\} \end{aligned}$$

La matrice Hessienne est

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{(définie positive)}$$

Conclusion: le point $(1,0)$ est un min global.
2. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$. On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(e^{x-y}\left(-2x - 2y^2 + x^2\right), e^{x-y}\left(2y^2 - x^2 - 4y\right)\right)^T = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y^2 + x^2 = 0 \\ 2y^2 - x^2 - 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (4,-2)\}. \end{aligned}$$

La matrice Hessienne est

$$\nabla^2 f(x,y) = e^{x-y} \begin{pmatrix} 2 - 2y^2 + x^2 + 4x & 2y^2 - x^2 - 2x - 4y \\ 2y^2 - x^2 - 2x - 4y & 8y - 2y^2 + x^2 - 4 \end{pmatrix} \text{(définie positive)}$$

♦ $\underline{(x,y) = (0,0)}$: On a

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \nabla^2 f(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ est un point selle.}$$

♦ $\underline{(x,y) = (4,-2)}$: On a

$$\nabla^2 f(4,-2) = e^6 \begin{pmatrix} 26 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \nabla^2 f(4,-2) < 0 \Rightarrow (4,-2) \text{ est un point selle.}$$

3. $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(6x^2 - 6y, 6y - 6x\right)^T = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6y - 6x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (1,1)\}. \end{aligned}$$

La matrice Hessienne est

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

♦ $\underline{(x,y) = (0,0)}$: On a

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \nabla^2 f(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ est un point selle.}$$

♦ $\underline{(x,y)=(1,1)}$: On a

$$\nabla^2 f\,(1,1)=\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix},\ \text{sylvester} \Rightarrow (1,1)\ \text{ est un min local.}$$

4. $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$. On a

$$\begin{aligned} \nabla f\,(x,y,z) &= \left(2xe^{x^2+y^2+z^2}, 2ye^{x^2+y^2+z^2}, 2ze^{x^2+y^2+z^2}\right)^T = 0 \\ &\Leftrightarrow (x,y,z)\in\{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

La matrice Hessienne est

$$\begin{aligned} \nabla^2 f\,(x,y,z) &= e^{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} 2+4x^2 & 4xy & 4xz \\ 4xy & 2+4y^2 & 4yz \\ 4xz & 4yz & 2+4z^2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \nabla^2 f\,(0,0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion: le point $(0,0,0)$ est un min global. ($\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} e^{x^2+y^2+z^2}=+\infty$).