خلاصة :

نظام كهربائي		نظام ميكانيكي
① شحنة كهربائية $q(t)$	←	إزاحة الجسم عن موضع الاتزان $x(t)$
② تيار كهربائي $i(t)$	←	سرعة الجسم $v(t)$
③ وشيعة أو محاثة L	←	كتلة الجسم m
④ مكثف سعته C	←	نابض ثابت مرونته k
⑤ مقاومة R	←	معامل التخامد α
⑥ الطاقة الكهربائية W_{elec}	←	الطاقة الكامنة $U(x)$
⑦ الطاقة المغناطيسية $W_H(t)$	←	الطاقة الحركية $T(\dot{x})$

2005-11-16

الفصل الثاني : الاهتزازات الحرة المتخامدة ذات درجة حرية واحدة

مقدمة : يقوم الجسم الذي لا تؤثر عليه إلا قوى مرونية أو شبه مرونية $(-kx)$ باهتزازات توافقية بسعة ثابتة "A".

غير أنه من الناحية العملية تؤثر على الوسط المحيط بالجملة قوى معيقة للحركة مثل قوى الاحتكاك ...

من خلالها تضيع الطاقة الميكانيكية للجملة وبالتالي تتناقص السعة الاهتزازية مما ينتج في النهاية تخامد الاهتزازات.

وفيما يتعلق بالجمل الميكانيكية، نميز نوعين من الاحتكاك التي تسبب تخامد الحركة الاهتزازية (عدة أنواع) أهمها:

أ) تخامد ناتج عن احتكاك لزج (تخامد لزج)

ب) تخامد ناتج عن احتكاك صلب (تخامد صلب)

$$Q_r = \sum_i Q_i \frac{\partial OM}{\partial q_r}$$

الاهتزازات المتخامدة بفعل الاحتكاك اللزج :

وصف الظاهرة : تحدث مثل هذه الظاهرة نتيجة التفاعل بين مختلف الذرات والجزيئات السريعة منها والبطيئة نتيجة التلامس بين الطبقات الاحتكاك اللزج بين الأجسام الصلبة والسوائل (الغاز) فتشكل ظاهرة

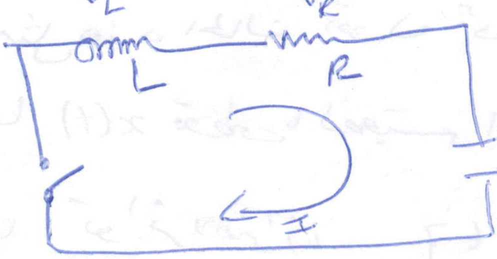
ب) حسب لاغرانج: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f_x \frac{d\dot{x}}{dx}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = kx \end{array}\right\} m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Leftrightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = 0}$$

نظام كهربائي (RLC)

نأخذ نظام كهربائي يتكون من وشيعة ذاتيتها L ومقاومة R و مكثف C كما في الشكل.



- نقوم بشحن المكثف بشحنة q ثم نغلق الدارة معها يتولد سريان التيار في عناصر الدارة:

حسب مبدأ أوم:

$$V_L + V_R + V_C = 0 \Leftarrow \sum V_i = 0$$

$$\Leftrightarrow L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = 0$$

من جهة أخرى لدينا $I = \frac{dq}{dt}$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \Leftrightarrow \boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0}$$

بالمقارنة مع المعادلة السابقة نجد:

$$q = x \qquad \frac{1}{C} = k \quad , \quad R = \alpha \quad , \quad L = m$$

حل المعادلة التفاضلية للحركة الاهتزازية المتخامدة بفعل الاحتكاك (الحل العام):

أي نريد حل المعادلة التفاضلية التالية $(x(t))$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

تبعا للقواعد العامة لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية ذات معاملات ثابتة $x = e^{\beta_\nu t}$

بالتعويض في معادلة الحركة:

$$\beta_\nu^2 + 2\gamma\beta_\nu + \omega_0^2 = 0$$

- وتسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة (1)

$$?,\ \beta_{1,2} = -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

وعليه يكتب الحل العام للمعادلة (1) بالشكل التالي :

$$x(t) = A_1 e^{\beta_1 t} + A_2 e^{\beta_2 t} = A_1 \left(e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right.$$

$$= \quad x(t) = e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t} \right] \longrightarrow (2)$$

من خلال دالة الإزاحة الجسيمة في العلاقة (2) نميز ثلاث حالات
حسب العلاقة بين γ و ω_0.

(1) لما: $\gamma < \omega_0$ ⟵ تبقى قوى الاحتكاك ضعيف أمام قوى المرونة
قوى المرونة ⟵ قوى الاحتكاك :

في مثل هذه الحالة نقول أن التخامد تخامد ضعيف (جذري المعادلة المميزة يكونان مترافقين عقديا :
عندها $x(t)$ تعطى بالصيغة التالية

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t} + A_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t} \right]$$

ω_0 : تواتر الاهتزازات الحرة اللامتخامدة

$$\boxed{x(t) = a e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \varphi)} \longrightarrow (3)$$

حيث $\boxed{\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ وهو تواتر الاهتزازات الحرة المتخامدة

تدعى حركة الجملة في مثل هذه الحالة بـ : ~~حركة~~ الاهتزازات الحرة المتخامدة التي
يمكن إعتبارها حركة اهتزازية توافقية بسعة متناقصة مع الزمن
$a e^{-\gamma t}$ وتسمى كذلك بالحركة الذبذبية المتخامدة.

(2) - $\gamma > \omega_0$ ⟵ قوة الاحتكاك كبيرة أمام قوة المرونة : (الجذرين حقيقيان وسالبان)
في مثل هذه الحالة نقول أن التخامد تخامد قوي :
وفي هذه الحالة دالة الإزاحة $x(t)$ تعطى بـ :

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t} \right)$$

حيث $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ من خلال $x(t)$ يبين أن الحركة
ليست اهتزازية بل تتناقص مع الزمن و يعود النظام إلى
موضع الاتزان المستقر مستغرقا زمن أطول وتسمى بالحركة
اللادورية :

(3)

3- $\omega_0 = \gamma$ ← قوى الاحتكاك مكافئة لقوى المرونة، أو من نفس الرتبة

في مثل هذه الحالة نقول أن التخامد تخامد حرج عندها $x(t)$ تعطى

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A + bt\right]$$

وهي حالة خاصة من الحالة الثانية ($\omega_0 < \gamma$) حيث يعود النظام إلى موضع الاتزان المستقر في زمن أقل مما هو عليه في الحالة الثانية.

- دراسة دالة الإزاحة في حالة التخامد الضعيف:

لدينا دالة الإزاحة $x(t)$ معطاة:

$$x(t) = a e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

حيث

$$A(t) = a e^{-\gamma t}$$

من جهة أخرى لدينا:

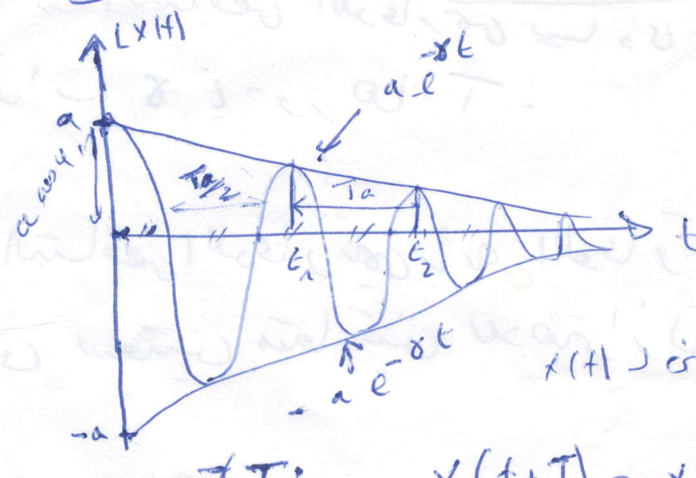
$$-1 \le \cos(\omega t + \varphi) \le 1$$

بالضرب طرفا المتراجحة $a e^{-\gamma t}$

$$-a e^{-\gamma t} \le a e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \le a e^{-\gamma t}$$

$$-a e^{-\gamma t} \le x(t) \le a e^{-\gamma t}$$

ومنه المنحنى البياني لـ $x(t)$ محصور بين الدالتين $a e^{-\gamma t}$ و $-a e^{-\gamma t}$



من خلال المنحنى البياني لـ $x(t)$ نلاحظ أن:

$\nexists T: \; x(t+T) = x(t)$ لا يوجد

أي أن $x(t)$ ~~تنشئ~~ ذبذبات اهتزازية لا دورية تماما، إلا أنها تحتفظ بنوع من الدورية في كون الجملة تمر بموضع الاتزان المستقرة خلال فواصل زمنية متساوية

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Leftarrow T_a = \frac{2\pi}{\omega}$$

نسبة التخامد $\xi = \frac{\gamma}{\omega_0}$ حيث $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$

T_a يدعى بالدور الشبه دوري للاهتزازات المتخامدة، وهو مرتبط بدور الاهتزازات الذاتية اللامتخامدة:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- من الواضح أن دور الاهتزازات المتخامدة T_a أكبر دوماً من دور الاهتزازات اللامتخامدة إذا كان : $\gamma \leq \omega_0$

$$T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} = T_0\left(1-\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq T_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)$$

أي أن الدور T_a في هذه الحالة قريب من T_0

$$\Longrightarrow \boxed{T_a > T_0}$$

حساب معامل التخامد γ : كلما كان γ أكبر كلما كان تناقص سعة الاهتزازات أسرع : وعليه يمكن وصف سرعة تناقص سعة الاهتزاز بالمضروب $e^{-\gamma t}$. نأخذ عادة ما يسمى بتناقص التخامد المساوي للنسبة بين سعتين متتاليتين يفصل بينهما دور كامل :

$$\Delta = \frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\gamma T_a}$$

إلا أنه غالباً ما يستخدم ما يسمى بالتناقص اللوغارتمي للتخامد δ وهو ما يساوي اللوغارتم الطبيعي لـ Δ :

$$\delta = \ln\Delta = \ln e^{\gamma T_a} = \gamma T_a .$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\Delta = \delta = \gamma T_a}$$

نلاحظ أن التناقص اللوغارتمي يساوي جداء عامل التخامد الاهتزازات γ في دورها T .

تعريف : يعرف التناقص اللوغارتمي بأنه اللوغارتم الطبيعي للنسبة بين سعتين متعاقبتين للاهتزازات المتخامدة

حساب الطاقة الضائعة بسبب الاحتكاك اللزج (تخامد)

إن الطاقة الميكانيكية للجملة E الاهتزازية بوجود تخامد ليست ثابتة حيث يفقد جزء منها للتغلب على العمل المبذول من طرف قوى الاحتكاك ومن أجل حساب مقدار الطاقة الضائعة بسبب قوة الاحتكاك نتبع الخطوات التالية:

- نعيد كتابة معادلة الحركة بالصيغة التالية:

$$\alpha \dot{x} = -m\ddot{x} - kx = -(m\ddot{x} + kx)$$

نضرب طرفي المعادلة في المقدار: $dx = \dot{x}\,dt$ ومنه نجد:

$$\alpha\, dx\, \dot{x} = -(m\ddot{x}\,dx + kx\,dx)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \dot{x}^2 dt = -\left(m\ddot{x}\,dt\,\frac{d\dot{x}}{dt} + kx\,dx\right) = -(m\dot{x}\,d\dot{x} + kx\,dx)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \dot{x}^2 dt = -d\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) \Leftrightarrow \alpha \dot{x}^2 dt = -dE$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha \dot{x}^2 = -\frac{dE}{dt}}$$

أي أن الطاقة المفقودة بسبب الاحتكاك تستغل للتغلب على قوى الاحتكاك

- وفي حالة كون قوى الاحتكاك $(-\alpha\dot{x})$ ضعيف أمام قوة المرونة $(-kx)$

أي $\gamma \ll \omega_0$

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = a e^{-\gamma t}\cos(\omega_a t + \varphi) \longrightarrow \frac{1}{2} m a^2 \omega_a^2 e^{-2\gamma t}$$

$E \longrightarrow$

$$E = \frac{1}{2} m a^2 \omega_a^2 e^{-2\gamma t} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -m a^2 \omega_a^2 \gamma e^{-2\gamma t} = -2\gamma\left(\frac{1}{2} m a^2 \omega_a^2 e^{-2\gamma t}\right)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E \Rightarrow \frac{dE}{E} = -2\gamma\, dt$$

لما: $dt = T_a \Leftarrow dE = \Delta E$

$$\frac{\Delta E}{E} = -2\gamma T_a$$

ويكون التغير النسبي بالقيمة المطلقة للطاقة الضائعة بسبب الاحتكاك خلال دور شرطي T_a يساوي

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = 2\gamma T_a}$$

(١)

معامل الجودة Q

تعريف: يعرف معامل الجودة بالعلاقة التالية

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

$$= 2\pi \frac{1}{\underbrace{2\gamma T_a}_{\delta}} = \frac{\pi}{\delta}$$

بالنسبة للجملة الفيزيائية ما يكون فيه معامل الجودة Q عاليا والذي يوافق معامل احتكاك ضعيف $\gamma \ll$

$$\gamma \ll \Rightarrow \omega \simeq \omega_0$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \Rightarrow Q \simeq \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

ومنه يمكن اعتبار معامل الجودة Q كمقدار مميز للحالة الديناميكية التخامدية

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\Omega = \omega = \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} = \gamma\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2}$$

$$= \gamma\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{2\gamma}\right)^2\cdot(2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 2\gamma\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - Q^2}$$

ومنه وفقا لقيم Q ومقارنته بـ $\frac{1}{2}$ نجد الحالات التالية

1) $Q < \frac{1}{2}$ تخامد قوي وبالتالي الحركة لا دورية

2) $Q = \frac{1}{2}$ تخامد حرج " " " "

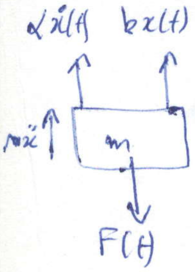
3) $Q > \frac{1}{2}$ ضعيف " " حركة دورية تخامدية

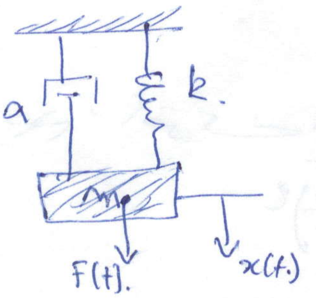
الاهتزازات المتخامدة القسرية (المجبرة)

مقدمة:

- إن الجمل الفيزيائية التي تخضع لقوى تشبه مرونية $(-kx)$ عند الازاحات الصغيرة حول موضع توازنها المستقرة تقوم باهتزازات توافقية حول هذا الموضع و نظرا لوجود الاحتكاك تكون مثل هاته الاهتزازات الذاتية متخامدة إلى أن يرجع النظام إلى موضع التوازن المستقر و من أجل التغلب على هذا التخامد الذي يسبب فقدان الطاقة للنظام الفيزيائي لابد من تطبيق قوة خارجية تعمل باستمرار على تعويض الطاقة المفقودة لتجاوز الاحتكاك عندئذ تدعى مثل هاته القوة المطبقة بالقوة القسرية أو المجبرة
- و بناء على ذلك تسمى الحركة الاهتزازية بالاهتزازات المتخامدة القسرية.

* الاهتزازات القسرية بتأثير قوة خارجية





اشتقاق معادلة الحركة وحلها:

نأخذ نظام فيزيائي متكون من نابض بثابت مرونة $(-kx)$ ومخمد بمعامل α، كتلته m ضمن حقل خارجي $F(t)$ باتجاه الحركة كما في الشكل

عندئذ القوى المؤثرة على الجمل الممثلة في الشكل هي:

1- قوة المرونة $-kx$

2- قوة العطالة $m\ddot{x}$

3- قوة التخامد اللزج $-\alpha\dot{x}$

4- قوة الفعل الخارجي $F(t)$

حسب المبدأ الأساسي للتحريك المعادلة التفاضلية الواصفة لحركة الجمل تكون

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t) \longrightarrow (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F(t) \longrightarrow (2)$$

بوضع $\frac{\alpha}{m} = 2\gamma$ ، $F'(t) = \frac{1}{m}F(t)$ ، $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

عندئذ المعادلة (2) تكتب بالصيغة التالية

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F'(t)} \longrightarrow (3)$$

- يتوقف حل المعادلة (3) على الشكل الصريح لعبارة دالة القوة القسرية $F(t)$
- وفي إطار الحركة الاهتزازية نميز ثلاث حالات لعبارة $F(t)$

3

الحالة (b) : $\gamma = \omega_0$

$$x_p = e^{-\gamma t}\left[A + \beta t\right]$$

ومنه حل المعادلة (3) تعطى في هذه الحالة بالصيغة التالية

$$x(t) = x_p + x_c = x_c\left[1 + (1+\gamma t)e^{-\gamma t}\right]$$

$$x(t) = x_c + x_c\, e^{-\gamma t}(1+\gamma t)$$

ومنه الكتلة m مخامدة إلى أن تستقر حول الوضع x_c.

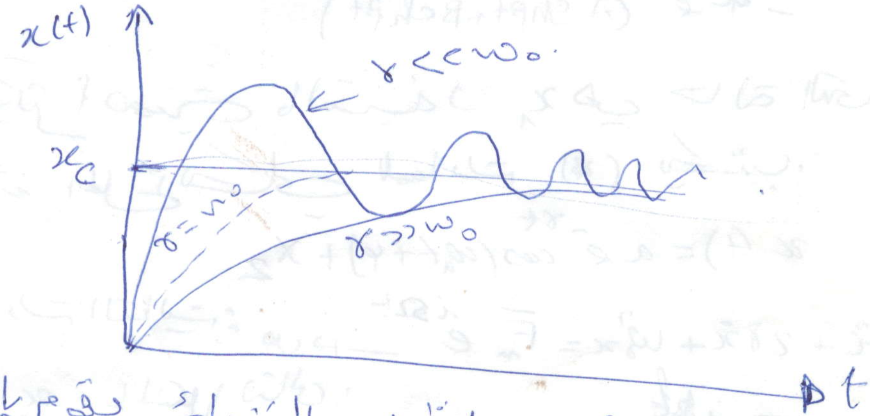
الحالة (c) : $\gamma \gg \omega_0$:

$$x_p = e^{-\gamma t}(A\, ch\beta t + B\, sh\beta t)$$

حل المعادلة (3) في الحالة (c) هو :

$$x(t) = x_c\left[1 + e^{-\gamma t}(ch\beta t + sh\beta t)\right]$$

ومنه الكتلة m تتخامد إلى أن تستقر حول الموضع x_c



من خلال منحنيات $x(t)$: النظام الفيزيائي يقوم باهتزازات متخامدة حول موضع إتزان مستقر جديد x_c وعليه قلنا بتطبيق قوة خارجية ثابتة على نظام فيزيائي اهتزازي متخامد لا يغير من حالته الفيزيائية.

الحالة الثانية: دالة القوة القسرية دالة جيبية يفرض أن :

$$\varphi(t) = A\cos(\Omega t + \psi)$$

Ω : تواتر القوة القسرية

ψ : فرق الطور الابتدائي لـ $\varphi(t)$

المعادلة التفاضلية (3) تكتب :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{A}{m}\cos(\Omega t + \psi)$$

بكتابة $\cos(\Omega t + \psi)$ في الشكل العقدي كما يلي

$$\cos(\Omega t + \psi) = Re\, e^{i(\Omega t + \psi)}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_e \frac{A}{m} e^{i(\Omega t+\psi)}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\frac{A}{m} e^{i\psi}}_{F_m} \cdot e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \bar{F}_m \cdot e^{i\Omega t} \quad ; \quad \bar{F}_m = \frac{A}{m} e^{i\psi} \longrightarrow (*)$$

حل المعادلة (*) هو عبارة عن مجموع حليف x_1 و x_2 حيث

x_1 : يمثل حل عام للمعادلة بدون طرف ثاني

x_2 : " " خاص " بطرف ثاني

أين x_1 يحقق المعادلة التفاضلية التالية : $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

x_1 : يمثل حلول المعادلة التفاضلية للحركة الاهتزازية المتخامدة بفعل تخامد لزج :

$$x_1 = \alpha e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \alpha e^{-\gamma t}(At + \beta)$$

$$= \alpha e^{-\gamma t}(A \operatorname{sh}\beta t + B \operatorname{ch}\beta t)$$

ان الحالة الاكثر أهمية بالنسبة لـ x_1 هي حالة التخامد الضعيف ($\gamma \ll \omega_0$) عندئذ الحل الكلي للمعادلة (*) يكتب :

$$x(t) = a e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \varphi) + X_2$$

x_2 : تحقق المعادلة التالية :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \bar{F}_m e^{i\Omega t} \longrightarrow (*)$$

نبحث عن x_2 بالشكل التالي :

$$x_2 = \bar{X}_m e^{i\Omega t}$$

$$\bar{X}_m = x_m e^{i(\psi+\theta)}$$

بالتعويض في المعادلة (*) نجد :

$$\left[-\bar{X}_m \Omega^2 e^{i\Omega t} + 2\gamma i\Omega \bar{X}_m e^{i\Omega t} + \omega_0^2 \bar{X}_m e^{i\Omega t}\right] = \bar{F}_m e^{i\Omega t}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}_m(-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2\gamma i\Omega)e^{i\Omega t} = F_m e^{i\Omega t} \Longrightarrow \bar{X}_m = \frac{\bar{F}_m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\Omega)}$$

$$\bar{X}_m = \frac{A/m\, e^{i\psi} \,\overbrace{(\omega_0^2 - \omega^2}^{x} - \overbrace{2i\gamma\Omega}^{y})}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} =$$

$\cos\theta =$

$$= \frac{\frac{A}{m} e^{i\psi}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \cdot e^{i\theta}$$

$$X_m = \sqrt{\bar{X}_m \bar{X}_m^*}$$

ظاهرة التجاوب :

لدينا :

$$\begin{cases} X_m = \dfrac{A/m}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \\ tg\,\theta = -\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} \end{cases} \longrightarrow (*)$$

من الملاحظ أن X_m و θ دوال تابعة ل Ω بشكل صريح، وعليه نقوم بدراسة مدى تأثير تواتر القوة القسرية على السعة X_m و فرق الطور θ :

لديـنا : من العلاقات (*)

$$\begin{cases} X_m = \dfrac{A/m}{\omega_0^2\left[\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\gamma}{\omega_0}\cdot\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} . \\ \\ tg\,\theta = \dfrac{-\frac{2\gamma}{\omega_0}\cdot\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \end{cases} \longrightarrow (**)$$

- بادخال تحويلات جديدة والمتمثلة في $\varphi = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ ، $\mu = \frac{\Omega}{\omega_0}$ نكتب العلاقات (**) بالشكل التالي :

$$X_m = \frac{\frac{A}{m\omega_0^2}}{\left[(1-\mu^2)^2+\left(\frac{\mu}{\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

$$tg\,\theta = \frac{-\mu}{\varphi(1-\mu^2)}$$

* التجاوب السعوي : لدينا : بوضع :

$$X_{0M} = \frac{A}{m\omega_0^2}.$$

$$\left(\frac{X_m}{X_{0M}}\right) = \frac{1}{\left[(1-\mu^2)^2+\left(\frac{\mu}{\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} ,\quad \varphi = \frac{\omega_0}{2\gamma} ,\quad \mu = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\Omega .$$

$$\Omega \ll \longrightarrow \mu \longrightarrow 0 ,\quad \frac{X_m}{X_{0M}} \longrightarrow 1$$

$$\bar{X}_m = \frac{\frac{A}{m}\, e^{i\psi}}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{i\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad -\pi \leq \theta \leq 0 \qquad \underline{\sin\theta \leq 0}$$

ومنه الحل الخاص من المعادلة (*) يعطى بالصيغة

$$\boxed{x_2 = \frac{\frac{A}{m}}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cos(\Omega t + \psi + \theta)}$$

حيث

$$x_2 = x_m \cos(\Omega t + \psi + \theta)$$

$$x_m = \frac{\frac{A}{m}}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

نضيف هذا الحل إلى x_1 لنحصل على دالة الإزاحة كحل عام للمعادلة (*) بالصيغة التالية

$$x(t) = a\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) + x_m \cos(\Omega t + \psi + \theta)$$

- من الملاحظ أن الحد الأول من عبارة $x(t)$ يتناقص أسيا مع الزمن إذا أنه خلال زمن كافٍ يتلاشى هذا الجزء كليا ولا يبقى إلا الحد الثاني المستقر وعليه فإن الحل الخاص x_2 هو الحل الذي يحدد سعة الاهتزاز وكذا فرق الطور

$$x(t) = x_m \cos(\Omega t + \psi + \theta)$$

وهذا يعني أن الجملة تكون عندئذ قد بلغت نظاما مستقرا للاهتزازات التوافقية القسرية بتواتر مساوٍ لتواتر القوة المؤثرة Ω.

ظاهرة التجاوب :

لدينا :

$$\begin{cases} X_m = \dfrac{A/m}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \\ tg\theta = \dfrac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} \end{cases} \longrightarrow (**)$$

من الملاحظ أن X_m و θ دالتان لـ Ω بشكل صريح،
وعليه نقوم بدراسة مدى تأثير تواتر القوة القسرية على السعة
X_m و فرق الطور θ :

لدينا: من العلاقات $(**)$

$$\begin{cases} X_m = \dfrac{A/m}{\omega_0^2\left[\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\gamma}{\omega_0}\cdot\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \\ tg\theta = \dfrac{-\frac{2\gamma}{\omega_0}\cdot\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \end{cases} \longrightarrow (***)$$

- بإدخال تحويلات جديدة والمتمثلة في
$\varphi = \dfrac{\omega_0}{2\gamma}$ ، $\mu = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$
تكتب العلاقات $(***)$ بالشكل التالي :

$$X_m = \frac{\frac{A}{m\omega_0^2}}{\left[(1-\mu^2)^2+\left(\frac{\mu}{\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$tg\theta = \frac{-\mu}{\varphi(1-\mu^2)}$$

* **التجاوب السعوي** : لدينا : بوضع :

$$X_{0M} = \frac{A}{m\omega_0^2}$$

$$\left(\frac{X_m}{X_{0M}}\right) = \frac{1}{\left[(1-\mu^2)^2+\left(\frac{\mu}{\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad ، \quad \varphi = \frac{\omega_0}{2\gamma} \text{ ، } \mu = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\Omega .$$

$$\Omega \ll \longrightarrow \mu \longrightarrow 0 \text{ ، } \frac{X_m}{X_{0M}} \longrightarrow 1$$

$\Omega >>$:

$\mu \to \infty$ ، $\frac{X_m}{X_{om}} \to 0$

$\Omega \to \Omega_m$

$\mu \to \mu_m = \left[1 - \frac{1}{2\varphi^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

(ندرس عبارة $\frac{X_m}{X_{om}}$ ثم نشتقها بالنسبة لـ μ نعدم المشتق فنجد عبارة $\mu_{max} = \left[1 - \frac{1}{2\varphi^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ ثم نعوض عبارة μ_{max} في عبارة $\frac{X_m}{X_{om}}$ فنجد :)

$$\left(\frac{X_m}{X_{om}}\right)_{max} = \frac{\varphi}{\left[1 - \left(\frac{1}{2\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

لما : $\gamma << \omega_0$

$\Rightarrow \Omega \to \omega_0$ ، $\left(\frac{X_m}{X_{om}}\right) \simeq \varphi \leq \frac{\varphi}{\left[1 - \left(\frac{1}{2\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

ومن جهة أخرى :

$$\left(\frac{X_m}{X_{om}}\right)_{Max} = \frac{\omega_0}{2\gamma\left[1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow (****)$$

لدينا : $\mu_m = \frac{1}{\omega_0}\Omega_m \Leftarrow \Omega_m = \omega_0 \mu_m$

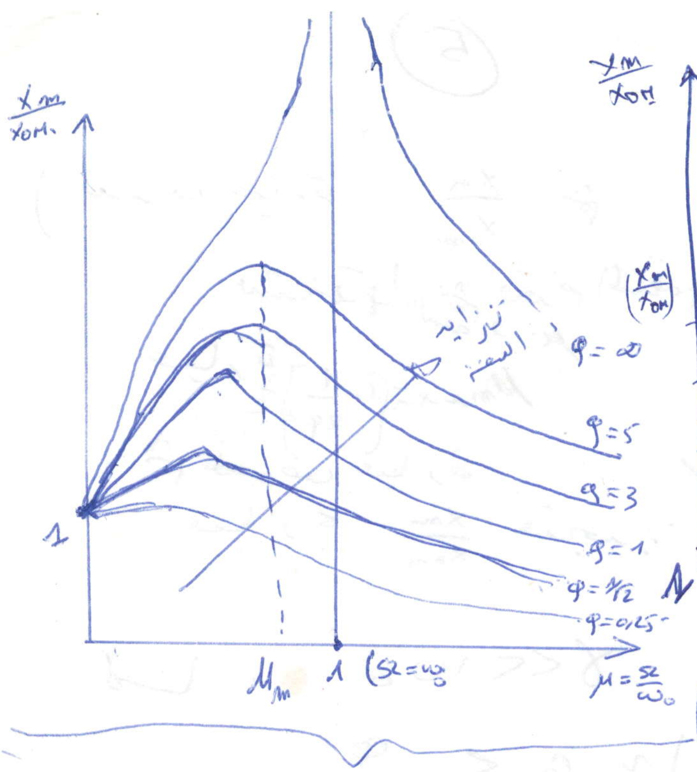
$$= \omega_0 \left[1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

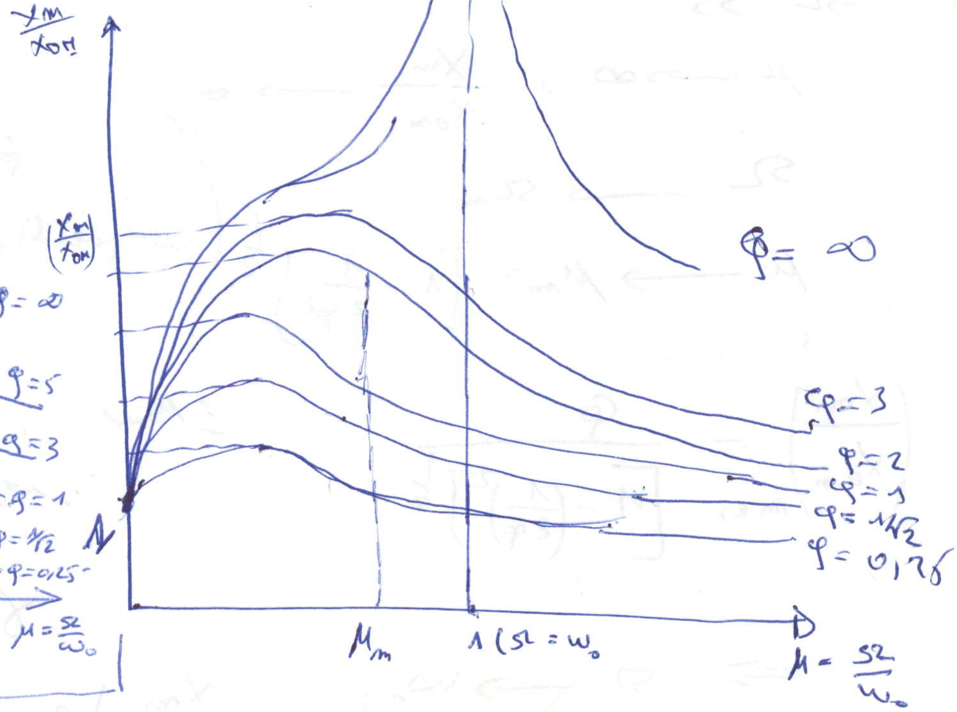
التجاوب يكون بجوار ω_0.

- يتضح من العبارة الممثلة (****) للقيمة العظمى لسعة الاهتزاز التحاكي القسري إن القيمة العظمى للسعة قيمة محددة لما $\gamma \neq 0$ وتنتشر إلى اللانهاية بـ لما $\gamma \to 0$ و ~~تنتشر~~

- في حالة كون $\gamma << \omega_0$ فإن قيمة $\left(\frac{X_m}{X_{om}}\right)_{max}$ تقابل ω_0

وعليه فإن سعة الاهتزاز تتزايد بشكل ملحوظ بجوار ω_0 وتسمى هاته الظاهرة بظاهرة التجاوب السعوي .





دراسة فرق الطور:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\mu}{\varphi(1-\mu^2)} \qquad -\pi \leq \theta \leq 0$$

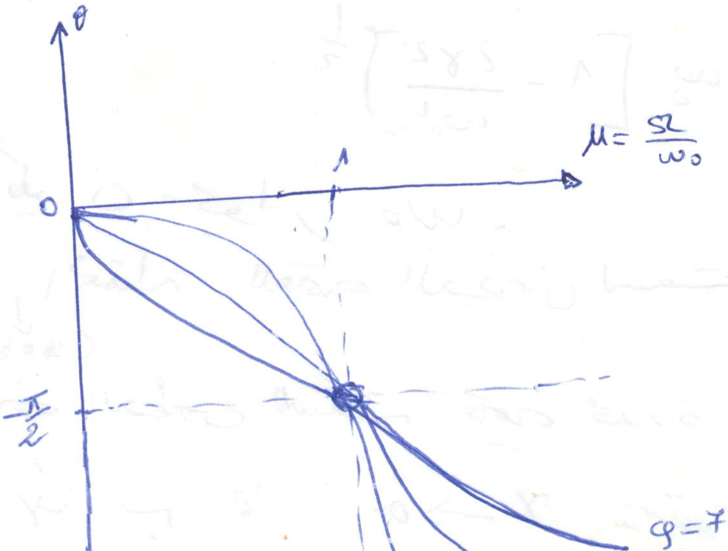
$$\mu \longrightarrow 0 \rightarrow \operatorname{tg}\theta \sim \theta \longrightarrow 0$$

$$\mu \longrightarrow \infty \qquad \operatorname{tg}\theta \sim \frac{1}{\varphi(\mu)} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \theta = -\pi$$

$$\Omega \Rightarrow \omega_0$$

$$\mu \longrightarrow 1 \;,\; \operatorname{tg}\theta \longrightarrow \infty \;,\; \theta \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$$



- نلاحظ أن فرق الطور سالب مما يعني أن دالة الإزاحة متأخرة في فرق الطور عن القوة القسرية