UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE-M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Master : Analyse Fonctionnelle

Cours polycopié pour le module

Espaces de suites et leurs opérateurs

Dahmane Achour

E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Année 2020-2021

Table des matières

0.1 Introduction

Cours polycopié pour le module Espaces de suites et leurs opérateurs.
Dahmane Achour. E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Le présent polycopié reprend un cours de deuxième année Master "Analyse Fonctionnelle" donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2018-2020. Ce cours vise à fournir aux étudiants les propriétés essentielles concernant les espaces de suites de Banach $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$, $\ell_p\langle X\rangle$ et les idéaux d'opérateurs (au sens de Pietsch). Comme tout cours de Mathématique, il doit être lu avec un stylo et une feuille de papier blanche à la main pour vérifier pas à pas que toutes les assertions sont correctes. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices non corrigés.

Objectifs. Le but de ce cours est de fournir les outils nécessaires et largement utilisées dans la théorie des idéaux d'opérateurs. Il a aussi pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution des problèmes parfois difficiles.

Connaissances préalables recommandées. Il est conseillé de connaitre les notions de base de l'analyse fonctionnelle.

Mode d'évaluation: a) une épreuve écrite. b) travail continu.

Les documents dont il est largement inspiré sont:

• J. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

• J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

• A. Grothendieck, Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

• M.C. Matos, Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

• A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.

0.2 Espace de Banach

Définition 0.2.1 *(Suite de cauchy)*
Soit (X, d) un espace métrique. On appelle suite de cauchy dans X une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq n_0 : \ d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Définition 0.2.2 *(Espace complet)*
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est complet si toute suite de cauchy converge dans X.

Définition 0.2.3 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, ,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Autrement dit, toute norme est positivement homogène, c'est-à-dire vérifie (2) et satisfait l'inégalité triangulaire (3). Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

Définition 0.2.4 *(Espace de Banach)*
On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Définition 0.2.5 *Soient X un espace normé et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est dite absolument convergente dans X si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ est convergente.*

Théorème 0.2.1 *Un espace normé X est de Banach si et seulement si toute série de X absolument convergente est convergente.*

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y

Proposition 0.2.1 *$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ est un espace vectoriel normé pour la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq y} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Définition 0.2.6 *(Convexité) Soit X un espace vectoriel et A une partie de X.*

1) On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall \lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

2) Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit convexe si son épigraphe est convexe.

De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in]0,1[\, \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Définition 0.2.7 *(Semi-continue inferieure) Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit semi-continue infieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiée:*

i) *L'épigraphe $epi(\varphi) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

ii) *L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

iii) *Pour tout $x \in X$, tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k \geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Exemple 0.2.1 *1. toute fonction continue est semi-continue infieurement.*

2. une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue $\Longleftrightarrow$ si f et $(-f)$ sont semi-continue infieurement.

Définition 0.2.8 *Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\} \qquad (H \text{ est fermé} \Leftrightarrow f \text{ bornée})$$

Théorème 0.2.2 *(Théoreme de Hahn Banach, forme géométrique) Soient A et B deux ensembles convexes non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé réel X. Si A est ouvert,il existe une forme linéaire continue f sur X ($f \in X^*$).et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. En particulier, A et B sont séparés par l'hypothèse affine fermé H.*

Définition 0.2.9 *(Théoreme de graphe férmé)*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire. Alors, T est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$.

Définition 0.2.10 *(Théoreme de Banach-Steinhauss) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_n$ une famille de suites dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On suppose que X est complet et que, pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_Y < \infty.$$

On a alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Exercice 0.2.1 *1) Soit $\alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq m$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_m}, r, r_j \in]0, +\infty]$ on a*

$$\frac{1}{r} \prod_{j=1}^{m} \alpha_j^r \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} \alpha_j^{r_j}$$

Cas particuliere pour $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*}$ $(m = 2, r = 1, r_1 = p \quad , r_2 = p^*)$ on a

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p^*}\beta^{p^*} \tag{0.2.1}$$

2)

$$\prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{\frac{r}{r_j}} \leq r \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} \alpha_j, \alpha_j \geq 0$$

et

$$(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \alpha_{i,j}^r)^{\frac{1}{r}} \leq \prod_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}^{r_j})^{\frac{1}{r_j}}, \alpha_{i,j}^r \geq 0$$

Preuve. Le cas particuliere. La fonction exponentielle étant convexe, on a

$$\exp(tx + (1-t)y) \leq t\exp(x) + (1-t)\exp(y)$$

pur tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, et l'inégalité cherchée s'obtient en prenant x et y tel que $\exp(x) = \alpha^p$ et $\exp(y) = \beta^{p^*}$ et $t = \frac{1}{p}, (1-t) = \frac{1}{p^*}$ ■

0.3 La convergence faible

Définition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach. La suite $(x_n)_n$ de X est dite converge faiblement vers $x \in X$ si*

$$\forall f \in X^* : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

et on écrit $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de X. On a*

a) Si $(x_n)_n$ converge vers x fortement, alors elle est convergente faiblement vers x, i.e.,

$$\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0 \right) \Longrightarrow \left(x_n \xrightarrow{w} x \right)$$

b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée. De plus on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n\| .$$

c) d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, et $f_n \longrightarrow f$ fortement $(\|f_n - f\|_{E^*} \longmapsto 0)$ dans E^*, alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

On notera X et Y deux espaces de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|.\|_X$ ou simplement $\|.\|$, l'orsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes $(X \sim Y)$ si il existe un opérateur invertible I (dit isomorphisme) de X dans Y. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques $(X \simeq Y)$ s'il existe une isométrie entre X et Y.

Chapitre 1

Espaces de suites de Banach

1.1 Espaces de suites classique

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Soit

$$\mathcal{S} = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\mathcal{S}$ muni de le loi $(+)$

$$(x + y) = (x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$

et le loi $(.)$

$$\lambda x = \lambda (x_n)_n = (\lambda x_n)_n , \lambda \in \mathbb{K}$$

est un espace véctoriel.

Soit les sous espaces suivants

$$\ell_\infty(\mathbb{K}) = \left\{x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : \sup_n |x_n| < \infty\right\}$$
$$c_0(\mathbb{K}) = \left\{x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0\right\}$$
$$c(\mathbb{K}) = \left\{x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : x_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell \in \mathbb{C}\right\}$$

ℓ_∞ : l'espace des suites bornées.

c_0 : l'espace des suites convergents vers 0.

c : l'espace des suites convergents.

Théorème 1.1.1 *Les ensembles* ℓ_∞, c_0, c *munis de la norme*

$$\|x\|_\infty = \|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.1.1 *L'espace* c_0 *c'est un sous-espace fermé de* ℓ_∞ *donc un espace de Banach.*

Rappelons que $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$ est l'espace vectoriel des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p$ converge.
Alors $\ell_p(\mathbb{K})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$ définie par:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$.

Proposition 1.1.1 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors*
1) $(c_0)^* = \ell_1$ *isomorphisme isometrique. De plus on a*

$$\|(x_n)_n\|_1 = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_\infty \leq 1\right\}. \tag{1.1.1}$$

2) $(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$ *isomorphisme isometrique pour* $p \geq 1$. *De plus on a*

$$\|(x_n)_n\|_p = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_i)_i \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_{p^*} \leq 1\right\}. \tag{1.1.2}$$

1.2 Espaces de suites p-sommable

Tout d'abord, si X un espace de Banach, nous noterons $X^{\mathbb{N}}$ l'espace de toute les suites $(x_i)_i$ d'éléments de X. L'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ est espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$(x_n)_n + (x_n)_n := (x_n + y_n)_n,$$

et la loi

$$\lambda.(x_n)_n := (\lambda x_n)_n, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.2.1 *(L'espace des suites p-sommables). Une suite (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est absolument p-sommables si la suite scalaire $(\|x_n\|)$ (resp.$(\|x_i\|)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p. On note $\ell_p(X)$ (resp.$\ell_p^n\ (X)$) l'espace de suites $(x_n)_n$ (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument p-sommables. Pour tout $x=(x_n)_n\in\ell_p(X)$, on pose*

$$\begin{aligned} \|(x_n)_n\|_p &= \|(x_n)_n\|_{\ell_p(X)} &&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} && si\ 1\leq p<\infty \\ \|(x_n)_n\|_\infty &= \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} &&= \sup_n \|x_n\| && si\ p=\infty \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *(Inégalité de Hölder). Soient X un espace vectoriel normé et $1\leq p\leq +\infty$. On a*
i) $\sum_{i=1}^n\|x_i\|\,\|y_i\|\leq\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$
et $\sum_{i=1}^n\|x_i\|\,\|y_i\|\leq\sup\limits_{1\leq i\leq n}\|y_i\|\sum_{i=1}^n\|x_i\|$ *pour* $p=1$.
ii) Soient $(x_n)_n\in\ell_p(X),(y_n)_n\in\ell_q(X)$ et $s,q,r\in[1,+\infty[$ avec $\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q}$. Alors $(\|x_n\|\,\|y_i\|)_i\in\ell_r$. De plus on a

$$\left\|(\|x_i\|\,\|y_i\|)_{i=1}^n\right\|_r\leq\left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_s\cdot\left\|(y_i)_{i=1}^n\right\|_q. \tag{1.2.1}$$

Preuve. Les cas $p=1$ et $p=\infty$ étant immédiats par la définition, supposons que $1<p<+\infty$.
i) On suppose que $\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\neq 0$ ou $\sum_{i=1}^n\|y_i\|^{p^*}\neq 0$. On pose

$$c_i=\frac{\|x_i\|}{\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\ ,\ 1\leq i\leq n$$

et

$$d_i=\frac{\|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^n\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}}\ ,\ 1\leq i\leq n.$$

D'après (0.2.1) on a

$$c_id_i\leq\frac{1}{p}c_i^p+\frac{1}{p^*}d_i^{p^*}.$$

Ce qui implique

$$\frac{\|x_i\|\,\|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}}\leq\frac{1}{p}\frac{\|x_i\|^p}{\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p}+\frac{1}{p^*}\frac{\|x_{yi}\|^{p^*}}{\sum_{i=1}^n\|y_i\|^{p^*}}\forall\ 1\leq i\leq n$$

On utilise la somme sur les deux coté

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p}{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p} + \frac{1}{p^*}\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_{yi}\|^{p^*}}{\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{p^*}}.$$

D'où

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\| \leq \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

ii) $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\left(\frac{p}{r}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{q}{r}\right)} \Rightarrow p > r$ ou $q > r$. On pose : $\|X_i\| = \|x_i\|^r$ et $\|Y_i\| = \|y_i\|^r$.
D'après *(i)* ona :

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\|y_i\|^r &= \sum\nolimits_{i=1}^{n}\|X_i\|\|Y_i\| \\ &\leq \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|X_i\|^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|Y_i\|^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}}\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\|y_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|x_i\|^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|y_i\|^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|y_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Si $p = r, (q = +\infty)$ on utiliser (ii) . ■

Proposition 1.2.2 *Soient* $(x_n) \in \ell_p(X)$,$(y_n) \in \ell_q(Y)$ *et* , $r, p, q \in]0, +\infty[$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. *Alors*

$$\left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^r\|y_n\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \|(x_n)\|_p\|(y_n)\|_q$$

Preuve. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder (1.2.1) pour n fixé et passer à la limite pour n tend vers $+\infty$. ■

Théorème 1.2.1 *Soit* $p \geq 1$. $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Soient $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell_p(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda x\|_p = \|(\lambda x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

alors $\lambda x \in \ell_p(X)$ et $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$.
Pour $p = 1$ on a,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \|(x_n+y_n)_n\|_1 \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \|x_i + y_i\| \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| = \|(x_n)_n\|_1 + \|(y_n)_n\|_1 .
\end{aligned}$$

Soit maintenant $p > 1$. Puisque $\|x_n + y_n\|^p = \|x_n + y_n\| \, \|x_n + y_n\|^{p-1}$, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|x_n + y_n\|^{p-1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \, \|x_n + y_n\|^{p-1} \right).$$

D'après l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|x_n\| \, \|x_n + y_n\|^{p-1} &\leq \|(x_n)_n\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^{p^*(p-1)} \right)^{\frac{1}{p^*}} \text{ et} \\
\sum_{i=1}^{n} \|y_n\| \, \|x_n + y_n\|^{p-1} &\leq \|(y_n)_n\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^{p^*(p-1)} \right)^{\frac{1}{p^*}},
\end{aligned}$$

de puis $p = p^*(p-1)$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^p \leq \left(\|(x_n)_n\|_p + \|(y_n)_n\|_p \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^p \right)^{\frac{1}{p^*}},$$

il s'ensuit que

$$\|(x_n)_n + (y_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_p + \|(y_n)_n\|_p < \infty,$$

et aussi $\|(x_n)_n\|_p = 0$ implique que $\|x_n\| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(x_n)_n = 0$. Ce qui montre que $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace vectoriel normé.
Montrons que $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ est complet. Soit $(x^{(n)})_n$ (où $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_i \in \ell_p(X)$) est une suite de Cauchy dans $\ell_p(X)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \left\| x^{(n)} - x^{(m)} \right\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right\|^p \leq \varepsilon^p, \tag{1.2.2}$$

alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right\| \leq \varepsilon,$$

On en déduit d'abord que pour chaque i fixé, $(x_i^{(n)})_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach X, donc elle converge vers un certain $x_i \in X$, posons $x = (x_i)_i$. Montrons que $x \in \ell_p(X)$. D'après (1.2.2) ceci revient à dire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ on déduit que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| x_i^{(n)} - x_i \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

maintenant en faisant $N \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\left\| x - x^{(n)} \right\|_p \leq \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{1.2.3}$$

Alors, $x^{(n_0)} - x = \left(x_i^{(n_0)} - x_i \right)_i \in \ell_p(X)$ et enfin puisque $x^{(n_0)} \in \ell_p(X)$ on a

$$x = x^{(n_0)} - (x^{(n_0)} - x) \in \ell_p(X),$$

et d'après (1.2.3), nous avons $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x^{(n)} = x$. Donc $\ell_p(X)$ est un espace de Banach. ■

Proposition 1.2.3 *Si* $(1 \leq q \leq p \leq \infty)$ *alors*

$$\ell_q(X) \subset \ell_p(X)$$

et

$$\|(x_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_q, \text{ pour tout } (x_n)_n \in \ell_q(X),$$

de plus, l'inclusion $I : \ell_q(X) \hookrightarrow \ell_p(X)$, $I((x_n)_n) = (x_n)_n$ *n'est pas une isométrie.*

Preuve. Soit $(x_n)_n \in \ell_q(X)$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\| \leq 1 \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

$\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0\right.$. Alors, pour $\varepsilon = 1$ donné $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq tel que:$n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n\| \leq 1$). Donc pour $n \geq n_0$ on a $\|x_n\|^p \leq \|x_n\|^q$, par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^{k} \|x_n\|^p \leq \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^q < \infty,$$

ceci implique que

$$(x_n)_n \in \ell_p(X) \quad \text{et} \quad \|(x_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_q \ .$$

Soit $(x_n)_n = (x, x, 0, 0, ..) \in \ell_q(X)$ avec $x \in X, x \neq 0$. Alors si $p < \infty$,

$$\|I\left((x_n)_n\right)\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|x\| \neq \|(x_n)_n\|_q = 2^{\frac{1}{q}} \|x\| \,,$$

et si $p = \infty$,

$$\|I\left((x_n)_n\right)\|_\infty = \|x\| \neq \|(x_n)_n\|_q = 2^{\frac{1}{q}} \|x\| \,,$$

ce qui montre que I n'est pas une isométrie. ■

Maintenant on note par $c_0(X)$ l'espace de suites $(x_n)_n$ d'éléménts de X convergeant vers zéros. i.e.,

$$c_0(X) = \left\{(x_n)_n \subset X : \lim_n \|x_n\| = 0\right\}.$$

Proposition 1.2.4 *$c_0(X)$ est un sous-espace fermé de $\ell_\infty(X)$.*

Preuve. En effet , soit $(x^{(n)})_n$ une suite dans $c_0(X)$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x^{(n)} = x \in \ell_\infty(X),$$

notons que $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_k \in c_0(X)$ et $x = (x_k)_k$ et montrons que $(x_k)_k \in c_0(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty = \sup_k \left\|x_k^{(n)} - x_k\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

De plus il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|x_k^{(n)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } k \geq k_0.$$

Par suite, por tout $k \geq k_0$ on a

$$\|x_k\| \leq \left\|x_k^{(n_0)} - x_k\right\| + \left\|x_k^{(n_0)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} x_k = 0$ ce qui donne $(x_k)_k = x \in c_0(X)$. ■

1.3 Le dual de $\ell_p(X)$

Si $x^* = (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(X^*)$ où p^* est l'exposant conjugué de p, alors la formule

$$\psi_{x^*}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n), x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X) \tag{1.3.1}$$

définit une forme $\psi_{x^*} \in [\ell_p(X)]^*$.

En effet, en appliquant l'inégalité de Hôlder, on obtient que $\psi_{x^*}(x)$ est bien défini et

$$|\psi_{x^*}(x)| \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \, \|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*}.$$

Par conséquent,

$$\psi_{x^*} \in [\ell_p(X)]^* \, et \, \|\psi_{x^*}\| \leq \|x^*\|_{p^*} \text{ pour tout } x^* \in \ell_{p^*}(X^*).$$

Ainsi, l'application linéaire $J : \ell_{p^*}(X^*) \to [\ell_p(X)]^*$ définie par $J(x^*) = \psi_{x^*}$ est continue, de norme ≤ 1. Comme $c_0(X)$ est un sous-espace de $\ell_\infty(X)$, les mêmes formules définissent aussi une application linéaire continue $J : \ell_1(X^*) \to [c_0(X)]^*$ de norme ≤ 1.

Théorème 1.3.1 *Soit $1 < p < +\infty$. Alors $(\ell_p(X))^*$ est isomorphisme isometrique à $\ell_{p^*}(X^*)$, où une suite $x^* = (x_n^*)_n$ dans $\ell_{p^*}(X^*)$ est identifiée à la fonctionnelle linéaire f donnée par*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \text{ pour tout } x = (x_n)_n \in \ell_p(X). \tag{1.3.2}$$

Preuve. On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccc} J: & \ell_{p^*}(X^*) & \longrightarrow & (\ell_p(X))^* \\ & (x_n^*)_n & \longmapsto & J((x_n^*)_n) = f, \end{array}$$

telle que f est la fonctionnelle linéaire comme dans (**??**). De plus, pour $(x_j)_j \in \ell_p(X)$ et par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
|f((x_j)_j)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^*\right\| \|x_j\| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^*\right\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\|(x_j^*)_j\right\|_{p^*} \|(x_j)_j\|_p .
\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien défini, continue et $\|f\| \leq \left\|(x_j^*)_j\right\|_{p^*}$. Par conséquent, J est bien définit, continu et $\|J\| \leq 1$. D'autre part, nous définissons l'application linéaire I par

$$I : (\ell_p(X))^* \longrightarrow \ell_{p^*}(X^*),\ I(T) = (T \circ I_k)_k \, ,$$

où I_k est l'opérateur linéaire de X dans $\ell_p(X)$ donné par $I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \cdots)$, où x est la k-ème position dans la suite $I_k(x)$. L'application I_k est bien définie, linéaire et continue, avec $\|I_k(x)\|_p = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Il est claire que $T \circ I_k = x_k^* \in X^*$, pour tout $T \in (\ell_p(X))^*$. On montre que $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(X^*)$, donc (d'après (1.1.2)) il suffit de montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k\right| < \infty \text{ pour tout } (\alpha_k)_k \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_k)_k\|_p \leq 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $x_k \in X, \|x_k\| \leq 1$, telle que ($\|T \circ I_k\| = \sup_{x_k \in B_X} |T \circ I_k(x_k)|$)

$$\|T \circ I_k\| \leq |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} .$$

Soit $(\beta_k)_k \subset \mathbb{K}$ avec $|\beta_k| = 1$ et $|T \circ I_k(x_k)| = T \circ I_k(x_k)\beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $(\alpha_k)_k \in B_{\ell_p}$, et par l'inégalité de Hölder on obtien

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}}\right) |\alpha_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| |\alpha_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} |\alpha_k| \\
&\qquad \text{(car } \sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k = T((\alpha_n x_n)_n) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} |\alpha_k| < \infty) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| |\alpha_k| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{p^*}}{2^k}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k\right| + \varepsilon \|(\alpha_k)_k\|_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k\right| &= |T((\alpha_k\beta_k x_k)_k)| \\ &\leq \|T\| \, \|(\alpha_k\beta_k x_k)_k\|_p \\ &\leq \|T\| \, \|(\alpha_k)_k\|_p \, , \end{aligned}$$

nous pouvons conclure que

$$(*) \leq (\|T\| + \varepsilon) \, \|(\alpha_k)_k\|_p \, .$$

Donc

$$\|(\|T \circ I_k\|)_k\|_{p^*} = \sup_{\left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\| \in B_{\ell_p}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \, \alpha_k\right| \leq \|T\| + \varepsilon < \infty.$$

Ce qui implique que $(\|T \circ I_k\|)_k \in \ell_{p^*}$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous avons $(T \circ I_k)_k \in \ell_{p^*}(X^*)$, avec $\|(T \circ I_k)_k\|_{p^*} \leq \|T\|$ pour tout $T \in (\ell_p(X))^*$. Donc, I est bien définit, continue et $\|I\| \leq 1$.

En fin puisque $I \circ J = id_{\ell_{p^*}(X^*)}$ et $J \circ I = id_{(\ell_p(X))^*}$. Par conséquent, $\ell_{p^*}(X^*)$ et $(\ell_p(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

Théorème 1.3.2 *On a l'identification isomorphisme isometrique*

$$(c_0\,(X))^* = \ell_1(X^*).$$

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'opérateur linéaire

$$I_k : X \longrightarrow c_0\,(X)\,, \;\; I_k\,(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)\,,$$

où x est dans la k-ème position. Il est clair que cet opérateur est linéaire borné et

$$\|I_k\,(x)\|_\infty = \|x\|\,, \text{ pour tout } x \in X.$$

Soit l'opérateur linéaire

$$I : (c_0\,(X))^* \longrightarrow \ell_1(X^*), \;\; I(T) = (T \circ I_k)_k\,.$$

Montrons que I est bien défini c'est-à-dire montrons que

$$\left(T \circ I_k\right)_k \in \ell_1(X^*) \text{ pour tout } T \in \left(c_0\left(X\right)\right)^*,$$

donc (d'après (1.1.1)) il suffit de montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \, \alpha_k\right| < \infty \text{ pour tout } \left(\alpha_k\right)_k \subset \mathbb{K}, \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \leq 1.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $T \circ I_k \in X^*$, de plus on a

$$\|T \circ I_k\| \leq \|T\| \, \|I_k\| = \|T\| \, .$$

D'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_k \in B_X$, telle que

$$\|T \circ I_k\| \leq |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Pour chaque $\left(\alpha_k\right)_k \subset \mathbb{K}, \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \leq 1$, on peut écrit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \, \alpha_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|T \circ I_k(x_k)| \, |\alpha_k| + \tfrac{\varepsilon}{2^k} \, |\alpha_k|\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\varepsilon}{2^k} \, |\alpha_k| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| + \varepsilon \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \\
&= (*).
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\beta_k \in \mathbb{K}$, $|\beta_k| = 1$, telle que

$$|T \circ I_k(x_k)| = T \circ I_k(x_k)\beta_k.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
(*) &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\beta_k\right| + \varepsilon \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \\
&\leq \|T\| \left\|\sum_{k=1}^{\infty} I_k(\beta_k x_k)\right\| + \varepsilon \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \\
&\leq \|T\| \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty + \varepsilon \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Ce qui conclut que

$$\left\|\left(\|T \circ I_k\|\right)_k\right\|_1 = \sup_{\left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \leq 1} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \, \alpha_k\right| \leq \|T\| + \varepsilon < \infty.$$

Cela montre que $(\|T \circ I_k\|)_k \in \ell_1$, et bien sûr $(T \circ I_k)_k \in \ell_1(X^*)$, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\|I(T)\| = \|(T \circ I_k)_k\|_1 \leq \|T\| \text{ pour tout } T \in (c_0(X))^*.$$

Alors I est continue avec une norme $\|I\| \leq 1$. D'autre part, on définit un opérateur linéaire

$$J : \ell_1(X^*) \longrightarrow (c_0(X))^*,$$

tel que

$$J(x^*)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_k),$$

pour tout $x^* = (x_k^*)_k \in \ell_1(X^*)$ et $x = (x_k)_k \in c_0(X)$. Avec ces notations on obtien

$$\begin{aligned} |J(x^*)(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\| \|x_k\| \\ &\leq \|(x_k)_k\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\| \\ &= \|x^*\|_1 \|x\|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

Puisque $x \in c_0(X)$ est arbitraire on déduit que J est bien défini, continu et $\|J\| \leq 1$. D'autre part l'application I est une bejection et $I^{-1} = J$ car

$$I \circ J = id_{\ell_1(X^*)} \text{ et } J \circ I = id_{(c_0(X))^*}.$$

Ainsi, pour tout $x^* \in \ell_1(X^*)$ on a

$$\|x^*\|_1 = \|I \circ J(x^*)\|_1 \leq \|J(x^*)\|,$$

d'où $\|J(x^*)\| = \|x^*\|_1$, alors J est une isométrie et par conséquent $I : (c_0(X))^* \longrightarrow \ell_1(X^*)$ est une isométrie. Par conséquent, $\ell_1(X^*)$ et $(c_0(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

Exercice 1.3.1 $(\ell_1(X))^* = \ell_\infty(X^*)$ *isomorphisme isometrique.*

Preuve. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_1(X)$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position et $I : (\ell_1(X))^* \longrightarrow \ell_\infty(X^*)$ par $I(T) = (T \circ I_k)_{k=1}^\infty$. Cet opérateur est bien défini, linéaire et continu avec

$$\|I(T)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|T \circ I_k\| \leq \|T\|,$$

pour tout $T \in (\ell_1(X))^*$, ce qui entraine que $\|I\| \leq 1$. Maintenent on définit l'opérateur $J : \ell_\infty(X^*) \longrightarrow (\ell_1(X))^*$ par

$$J(x^*)(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j^*(x_j).$$

Où $x^* = \left(x_j^*\right)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(X^*)$ et $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(X)$. J est linéaire, bien définie et continue, avec $\|J\| \leq 1$. Puisque $|J(x^*)(x)| \leq \|x^*\|_\infty \|x\|_1$.

D'autre part on a

$$I \circ J = id_{\ell_1(X^*)} \text{ et } J \circ I = id_{(c_0(X))^*}.$$

Ainsi, pour tout $x^* \in \ell_\infty(X^*)$ on a

$$\|x^*\|_\infty = \|I \circ J(x^*)\|_\infty \leq \|J(x^*)\| \leq \|x^*\|_\infty,$$

Donc J (et par conséquent I) est une isométrie. Par conséquent, $\ell_\infty(X^*)$ et $(\ell_1(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

Corollaire 1.3.1 *Si $1 \leq p < \infty$, on a*

$$\| (x_n)_n \|_p = \sup\left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| : (x_n^*)_{n=1}^\infty \in X^*, \| (x_n^*)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\}. \tag{1.3.3}$$

Proposition 1.3.1 $\| (x_n)_n \|_{p,\omega} = \sup\left\{ \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \right\| : \| (\lambda_n)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\}$.

1.4 Espaces de suites faiblement p-sommable

Définition 1.4.1 *(L'espace des suites faiblement p-sommables) Une suite (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est faiblement p-sommables si la suite scalaire $(x^*(x_n))$ (resp.$(x^*(x_i)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p pour tout $x^* \in X^*$. On note $\ell_p^w(X)$(resp.$\ell_p^{n\ w}(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X faiblement p-sommables telle que*

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : (\langle x^*, x_n\rangle)_n \in \ell_p, x^* \in X^*\}.$$

Pour tout $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, *on pose*

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \quad si \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_n |\langle x^*; x_n \rangle| \quad si \quad p = \infty$$

Théorème 1.4.1 *L'expression*

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$$

est finie. De plus, $\|\cdot\|_{p,w}$ *définit une norme sur* $\ell_p^w(X)$.

Preuve. Soit $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, on peut associeé à x l'opérateur

$$T : X^* \longrightarrow \ell_p$$

défini par

$$T(x^*) = (x^*(x_n))_n.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n \rangle|^p < \infty$ pour tout $x^* \in X^* \Longrightarrow (x^*(x_n))_n \in \ell_p$ pour tout $x^* \in X^*$ et donc T est bien défini et linéaire. Comme X^* et ℓ_p sont des espaces de Banach, nous pouvons utiliser le théorème du graphe fermé pour montrer sa continuité. Il s'agit de montrer que si

$$\begin{cases} x_k^* \rightarrow_k x^* \\ T(x_k^*) \rightarrow_k \eta = (\eta_n)_n \text{ dans } \ell_p, \text{ alors } T(x^*) = \eta. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$|x_k^*(x_n) - \eta_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_k^*(x_i) - \eta_i|^p \rightarrow_k 0,$$

donc $x_k^*(x_n) \rightarrow_k \eta_n$ pour tout $n \geq 1$.

D'autre part

$$|x_k^*(x_n) - x^*(x_n)| \leq \|x_n\| \, \|x_k^* - x^*\|_{X^*} \rightarrow_k 0.$$

(i.e, $(x_k^*)_k$ converge vers $x^* \in X^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(x_k^*(x_n))_k$ est converge vers $x^*(x_n)$).

Il en resulte que $x^*(x_n) = \eta_n$ pour tout $n \geq 1$. D'où $T(x^*) = (x^*(x_n))_n = (\eta_n)_n = \eta$. Par conséquent T est de graphe fermé et donc borné, en d'autre terme

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup \left\{ (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x^*(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X^*} \right\} = \|T\| < \infty$$

qui est ce qui nous voulions. On peut conclure facilement que $\|\cdot\|_{p,w}$ est une norme sur $\ell_p^w(X)$. ■

Exemple 1.4.1 *Soit* $(e_n)_n$ *est la base canonique de* ℓ_{p^*}, *alors* $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ *et* $\|(e_n)_n\|_{p,w} = 1$.

Nous considérons les relations entre les espaces de suites.

Théorème 1.4.2 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors*

i) $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$,

ii) $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$.

iii) $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$ *si et seulement si* $\dim(X)$ *est finie.*

Démonstration. iii) Puisque $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$, il suffit de montrer que $\ell_p^w(X) \subset \ell_p(X)$. On suppose que $\dim X = m$, alors X est isomorphe à $\mathbb{K}^m$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$. Soit $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ et π_i désigne la i-ème projection de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_n\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_{\mathbb{K}^m}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_n^j|^p\right)^{\frac{p}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m} |\pi_j(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{+\infty} |\pi_j(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= m^{\frac{1}{q}} \|(x_n)_n\|_{p,w}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.4.3 $(\ell_p^w(X), \|\cdot\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. *$\ell_p^w(X)$ est complet. Si $p = \infty$ on a $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$, il est donc que $\ell_\infty^w(X)$ est un Banach. Pour $1 \leq p < \infty$. Ici, nous utilisons un raisonnement direct; un peu plus tard (voir Proposition 1.3), nous allons indique une façon différante). Soit $(x^k)_k$ où $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p^w(X)$, une suite de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq: $\forall k, k' \geq N$ on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left\langle x^*, x_n^k\right\rangle - \left\langle x^*, x_n^{k'}\right\rangle\right|^p \leq \epsilon^p, \forall x^* \in B_{X^*}. \tag{1.4.1}$$

Pour tout $x^* \in B_{X^*}$.chaque terme de cette série est dominée par ϵ^p,donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\| = \sup\left\{\left|\left\langle x_n^k, x^*\right\rangle - \left\langle x_n^{k'}, x^*\right\rangle\right| : x^* \in B_{X^*}\right\} \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X, comme X est complet , elle est donc convergente vers une limite x_n ,ça nous permet d'associer à chaque composante une limite, donc la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$converge vers une limite qui est $x = (x_n)_n$. Il reste de vérifier que $x \in \ell_p^w(X)$.D'après (1.4.1) et soit k'tend vers l'infinie. Alors, quand $k' \geq N$ on a

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left\langle x^*, x_n - x_n^k\right\rangle\right|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall x^* \in B_{X^*}$$

donc $x - x^k$ et x appartient a $\ell_p^w(X)$. ■

■

Lemme 1.4.1 *Soient $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$ et $(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}(\mathbb{K})$. Alors, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ est convergente dans X.*

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de Hahn-Banach et l'inégalité de Hölderon a

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{n=m+1}^{k} \alpha_n x_n\right\|_X \\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|\sum_{n=m+1}^{k} \alpha_n \psi(x_n)\right| \\
&\leq \left(\sum_{n=m+1}^{k} |\alpha_n|^{p^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{n=m+1}^{k} (|x^*(x_n)|)^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Maintenant en prenant la limite lorsque $k, m \to \infty$, on obtient que $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_n x_n)_n$ est une suite de Cauchy sequence dans X, qui est un espace Banach. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$ est convergente dans X. ■

Proposition 1.4.1 *(TD) Soientt X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

1) $\ell_p^w(X) = \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ isomorphisme isometrique pour $1 < p \leq +\infty$.

2) $\ell_1^w(X) = \mathcal{L}(c_{0,}X)$ isomorphisme isometrique pour $p = 1$.

Proposition 1.4.2 *On a*

$$\|(y_n^*)_n\|_{p,w} = \sup_{y\in B_Y}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y(y_n^*)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } (y_n^*)_n \in \ell_p^w(Y^*)$$

1.5 Espaces de suites fortement p-sommables

Définition 1.5.1 *Soit $1 < p \leq \infty$. On dit que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ est une suite Cohen fortement p-sommables si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$ est convergente pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$. L'espace des suites Cohen fortement p-sommables sera noté $\ell_p\langle X\rangle$.*

Théorème 1.5.1 *L'espace $\ell_p\langle X\rangle$ est un espace normé et la norme est donnée par*

$$\left\|(x_n)_{n\geq 1}\right\|_{\langle p\rangle} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)\right| : \| (x_n^*)_{n\geq 1} \|_{p^*,\omega} \leq 1\right\}. \tag{norme-coh}$$

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p\langle X\rangle$. Montrons que $\|\cdot\|_{\langle p\rangle}$ est fini.
On peut considérer la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ comme une forme lineaire $f \in [\ell_{p^*,\omega}(X^*)]^*$ définit par

$$f : \ell_{p^*,\omega}(X^*) \to \mathbb{K}; f\left((x_n^*)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$$

On définit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des formes lineaire dans $\ell_{p^*}^w(X^*)$ par

$$f_n((x_n^*)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x_i).$$

Il est facile de remarquer que toutes les f_n sont continues, et par définition de f_n et f, on a f_n converge vers f pour tout les points de $\ell_{p^*}^w(X^*)$, et comme $\ell_{p^*}^w(X^*)$ est complet; on applique le théorème de Banach Steinhaus, on obtient: f est continue et $\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\langle p\rangle} = \sup\limits_{\|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*,\omega}\leq 1} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)\right| = \| f \| < \infty$. ∎

Proposition 1.5.1 *Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$ est convergente pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$ si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)|$ est convergente aussi pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$.*

Dans ce cas

$$\left\|(x_n)_{n\geq 1}\right\|_{\langle p\rangle} = \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| : \| (x_n^*)_{n\geq 1} \|_{p^*,\omega} \leq 1\right\}$$

Preuve. La première inégalité ($\leq$) dans (**??**) est évidente. Pour l'inégalité inverse,pour tout $(x_n^*)_n \in B_{\ell_{p^*}^w(*)}$, on peut choisir une suite scalaire $(\lambda_n)_n$, avec $|\lambda_n| = 1$, por tout n tel que

$$x_n^*(x_n) = \lambda_n x_n^*(x_n) = |\psi_n(x_n)|.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n)$$

et puisque $\|(x_n^*)_n\|_{p^*,\omega} = \|(\psi_n)_n\|_{p^*,\omega}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sup_{\|(\varphi_n)_n\|_{p^*,q^*}^w \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| &= \sup_{\|(\psi_n)_n\|_{p^*,q^*}^w \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n) \\ &\leq \sup_{\|(\psi_n)_n\|_{p^*,q^*}^w \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n) \right|. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.2 $(\ell_p\langle X\rangle, \|\cdot\|_{\langle p\rangle})$ *est un espace de Banach.*

Preuve. D'après le Théorème **??** $\|\cdot\|_{\langle p\rangle}$ est une norme. Donc, il suffit de montrer que $\ell_p\langle X\rangle$ est un sous-espace vectoriel complet.
Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans $\ell_p\langle X\rangle$ telle que $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : \| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} < \varepsilon$$

d'après la Proposition 1.5.1 on a

$$\| x_n - x_m \|_p \leq \| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} < \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $l_p(X)$. On pose

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x, \text{ et } x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$$

on a

$$\| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*,w}(X)}} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_{m,i}) \right| < \varepsilon$$

pour $m \longrightarrow \infty$, cela donne

$$\sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_i) \right| < \varepsilon$$

Ce qui implique que $\| x_n - x \|_{\langle p \rangle} < \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}
&\| x \|_{\langle p \rangle} \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^* (x_i) \right| : \| (x_i^*)_{i=1}^\infty \|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^* (x_i - x_{n,i}) + x_i^*(x_{i,n}) \right| : \| (x_i^*)_{i=1}^\infty \|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i}) \right| + \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i}) \right| \\
&< \varepsilon + \| x_n \|_{\langle p \rangle}
\end{aligned}$$

donc, $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p \langle X \rangle$, alors, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x$ dans $\ell_p \langle X \rangle$, d'où $\ell_p \langle X \rangle$ est complet. ■

Exercice 1.5.1 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$, *Montrer que*

1) $\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p\ (X) \subset \ell_p^w (X)$ *et*

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{p,\omega} \leq \| \ \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p \leq \| \ \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\langle p \rangle},$$

pour tout $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p \langle X \rangle$ *et* $1 < p \leq +\infty$.

2) $\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1\ (X)$ *et*

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_1 = \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\langle 1 \rangle}$$

Preuve. 1) On a: $\ell_p\ (X) \subset \ell_p^w (X)$ et $\|(x_n)_n\|_{p,\omega} \leq \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p$ *pour tout* $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(X)$.

D'autre part, soit $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p \langle X \rangle$, d'après (1.3.3) et comme $B_{\ell_{p^*}(X)} \subset B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}$ on a

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| \\
&\leq \sup_{(x_n^*)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\
&= \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\langle p \rangle}
\end{aligned}$$

alors, $\ell_p \langle X\rangle \subset \ell_p\ (X)$ et $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p\rangle}$

2) Pour $p=1, p^*=\infty$, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 \langle X\rangle$, d'après (1.3.3) on a

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \\
&= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(X)}} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)\right| \\
&= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty,\omega}(X)}} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)\right| \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle 1\rangle}
\end{aligned}$$

■

1.6 Les énoncés d'exercices

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty$ $(1 \leq p < \infty)$ (i.e., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$). Montrer que:

a- si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $\ell_p(X) \subset \ell_q(X)$ et

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p\,, \text{ pour tout } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X).$$

b- l'inclusion $i : \ell_p(X) \hookrightarrow \ell_q(X)$, $i((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une isométrie.

Exercice 2

Soit X un espace de Banach réel et $1 \leq p \leq \infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(x_n)|^p < +\infty$ pour toute $\psi \in X^*$ (i.e., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p^w(X)$).

a- En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que l'aplication linéaire

$$\begin{array}{rccl} T & : & X^* & \longrightarrow & \ell_p \\ & & \psi & \longmapsto & (\psi(x_n))_n \end{array}$$

est continue.

b- En déduire que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,w} = \sup\limits_{\psi \in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(x_n)| < +\infty$.

Exercice 3

i) Soit X un espace de Banach réel et $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que

a- $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$.

b- $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$ et $\|(x_n)_n\|_\infty = \|(x_n)_n\|_{\infty,w}$.

ii) Soit $X = c_0$ l'espace des suites réelles qui convergente vers 0. Cet espace est muni de sa norme usuelle $\|.\|_\infty$. On considère les suites $(e_n)_n$ où $e_n = (0, ...0, \underbrace{1}_{n-ième}, ..., 0, ...)$. Montrer que

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_\infty = 1$ et $e_n \in c_0$.

b) $(e_n)_n \notin \ell_1(c_0)$.

c) $(e_n)_n \in \ell_1^w(c_0)$.

iii) En déduire que l"inclusion (2.a) est stricte.

Exercice 4

Soit $1 < p < \infty$. On considère l'opérateur

$$\begin{array}{lllll} T & : & \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X) & \longrightarrow & \ell_p^w(X) \\ & & u & \longmapsto & (u(e_n))_n \end{array}$$

où $(e_n)_n$ est la base canonique de ℓ_{p^*}. Montrer que

a) $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ et $\|(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,w} = 1$.

b) T est linéaire et bien défini.

c) la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u(e_n)$ est convergente pour tout $(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}(\mathbb{K})$.

d) $\|T(u)\| = \|u\|$.

e) T est surjective

f) En déduire que $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ et $\ell_{p,w}(X)$ sont isomorphe isométrique et $(\ell_p^w(X), \|\cdot\|_{p,w})$ est un espace de Banach.

Exercice 5

Soit $(x_n^*)_n \in \ell_p^w(X^*)$. Montrer que

$$\|(x_n^*)_n\|_{p,w} = \sup_{x\in B_X} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n^*, x\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 6

Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On peut associeé à T les opérateurs linéires

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{T}^p & : & \ell_p(X) & \longrightarrow & \ell_p(Y) \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^p((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{T}^{p,w} & : & \ell_p^w(X) & \longrightarrow & \ell_p^w(Y) \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^{p,w}((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

Montrer que $\widehat{T}^p$ et $\widehat{T}^{p,w}$ sont continus et $\left\|\widehat{T}^p\right\| = \left\|\widehat{T}^{p,w}\right\| = \|T\|$.

Exercice 7

1) Soient X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_p \langle X \rangle$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position. Montrer que I_k est bien défini, linéaire et continu et $\|I_k(x)\|_{\langle p \rangle} = \|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On peut associeé à T l'opérateur linéire

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{T}^{\langle p \rangle} & : & \ell_p \langle X \rangle & \longrightarrow & \ell_p \langle Y \rangle \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^p((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

Montrer que $\widehat{T}^{\langle p \rangle}$ est continu et $\left\|\widehat{T}^{\langle p \rangle}\right\| = \|T\|$.

Chapitre 2

Idéal d'opérateurs linéaires

2.1 Définition et propréités

Définition 2.1.1 *(Opérateur linéaire de rang fini). Soit* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *. On dit que* T *est de rang fini si* $\dim(T(X)) < \infty$*. L'espace des opérateurs de rang fini sera noté* $\mathcal{L}_f(X,Y)$ *.*

Exemple 2.1.1 *Soit* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *.*

1) L'opérateur nulle ($T : X \to Y, x \longmapsto 0$*) est de rang fini.*

2) Si $\dim(X) = m$*, alors*T *est de rang fini. En effet* $\dim(T(X)) \leq \dim(X) = m$*.*

3) Si $Y = \mathbb{K}$*, alors* T *est de rang fini.*

En effet, $T(X) = \begin{cases} \{0\} \\ \mathbb{K} \end{cases}$ *. Si* $T \neq 0$ *alors il existe* $x_0 \in X$ *tels que* $T(x_0) \neq 0$*. Posons* $z = \frac{x_0}{T(x_0)}$*. Donc* $T(z) = 1$ *et* $T(\lambda z) = \lambda T(z) = \lambda$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

$(\forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \exists y \in X\ tq : \lambda = T(y))$.

Proposition 2.1.1 *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *est de rang fini si et seulment si, est somme fini d'opérateurs de la forme*

$$\begin{aligned} x^*(\cdot)y : \quad & X \longrightarrow Y \\ & x \longrightarrow x^*(x)\,y \end{aligned}$$

où $x^* \in X^*$ et $y \in Y$.

L'application $x^*(\cdot)y$ est continue de norme $\|y\|\,\|x^*\|$ car

$$\begin{aligned}\|x^*(\cdot)y\| &= \sup_{x\in B_X}\|x^*(x)\,y\| \\ &= \|y\|\sup_{x\in B_X}|x^*(x)| \\ &= \|y\|\,\|x^*\|\end{aligned}$$

Définition 2.1.2 *(Idéal linéaire)* **??** *Un idéal d'opérateur linéaire $\mathcal{I}$ est un classe d'opérateurs tels que: pour tout X et Y Banach, on a*

1) $\mathcal{I}(X,Y)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(X,Y)$.

2) $\mathcal{L}_f(X,Y)\subset\mathcal{I}(X,Y)$

3) Propriété d'ideal: *si* $T\in\mathcal{I}(X,Y)$, $u\in\mathcal{L}(E,X)$ *et* $v\in\mathcal{L}(Y,F)$, *on a*

$$v\circ T\circ u\in\mathcal{I}(E,F)$$

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ satisfait

i) $(\mathcal{I}(X,Y),\|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *est un espace normé (Banach)*

ii) $\|Id_{\mathbb{K}}:\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K},\lambda\longrightarrow Id_{\mathbb{K}}(\lambda)=\lambda\|_{\mathcal{I}}=1$

iii) $\|v\circ T\circ u\|_{\mathcal{I}}\leq\|v\|\,\|T\|_{\mathcal{I}}\,\|u\|$.

Alors, $(\mathcal{I}(X,Y),\|.\|_{\mathcal{I}})$ s'appelle idéal de Banach des opérateurs linéaires.

Remarque 2.1.1 $(\mathcal{I}=\mathcal{L},\|\cdot\|)$ *(avec la norme usuelle des opérateurs) est un idéal normé. En effet*

(a) $\mathcal{L}(X,Y)$ *est un sous-espace de* $\mathcal{L}(X,Y)$

(b) $\|Id_{\mathbb{K}}\|=\sup\limits_{|\lambda|\leq1}|Id_{\mathbb{K}}(\lambda)|=\sup\limits_{|\lambda|\leq1}|\lambda|=1.$

(c) Soit $u\in\mathcal{L}(E,X)$, $T\in\mathcal{I}(X,Y)$ *et* $v\in\mathcal{L}(Y,F)$ *pour tout* $x\in X$ *on a*

$$\begin{aligned}\|(v\circ T\circ u)(x)\| &\leq \|v\|\,\|T\circ u(x)\| \\ &\leq \|v\|\,\|T\|\,\|u(x)\| \\ &\leq \|v\|\,\|T\|_{\mathcal{I}}\,\|u\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

D'où $\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|$. *Et alors* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ *est un idéal normé.*

Définition 2.1.3 *i) Un idéal linéaire* $\mathcal{I}$ *est dit fermé si* $\mathcal{I}(X,Y)$ *est fermé dans l'espace des opérateurs linéaires continus* $\mathcal{L}(X,Y)$ *pour tout espaces de Banach* X *et* Y.

ii) Un idéal linéaire $\mathcal{I}$ *est dit injectif s'il vérifie la propriété d'injectivité*

$$i \circ T \in \mathcal{I}(X,Z) \implies T \in \mathcal{I}(X,Y),$$

où $i : Y \hookrightarrow Z$ *est une isométrie injective. De plus on a*

$$\|i \circ T\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{\mathcal{I}},$$

i.e., l'idéal ne dépend pas de l'espace d'arrivé.

Proposition 2.1.2 *Soit* $\mathcal{I}$ *un idéal normé. Alors* $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}$ *pour tout* $T \in \mathcal{I}$.

Preuve. Soient $T \in \mathcal{I}(X,Y), \varphi \in Y^*$ et $x \in X$. On définit

$$R : \mathbb{K} \to X : R(\lambda) = \lambda x$$

on a $\|R\| = \|x\|$ et

$$\varphi \circ T \circ R = (\varphi \circ T)(x)\, id_{\mathbb{K}} \tag{2.1.1}$$

En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ ona

$$(\varphi \circ T)(x)\, id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda (\varphi \circ T)(x)$$

comme

$$(\varphi \circ T \circ R)(\lambda) = (\varphi \circ T)(\lambda x) = \lambda (\varphi \circ T)(x)$$

il en résulte que $\varphi \circ T \circ R = (\varphi \circ T)(x)\, id_{\mathbb{K}}$

De (2.1.1) on a

$$\begin{aligned} |(\varphi \circ T)(x)| &= |(\varphi \circ T)(x)| \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|(\varphi \circ T)(x)\, id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|\varphi \circ T \circ R\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|R\| \end{aligned}$$

par le théoreme de Hahn-Banach on a

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} |\langle T(x), \varphi \rangle| = \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} |(\varphi \circ T)(x)| \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \|\varphi\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|R\| = \|T\|_{\mathcal{I}} \|x\| \end{aligned}$$

D'où

$$\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}$$

■

Remarque 2.1.2 *a) Si $x^* \in X^*$, alors $\|x^*\| = \|x^*\|_{\mathcal{I}}$. Comme x^* est de rang fini, alors $x^* \in \mathcal{I}$ et*

$$\|x^*\| \leq \|x^*\|_{\mathcal{I}} = \|id_{\mathbb{K}} \circ x^*\|_{\mathcal{I}} \leq \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \|x^*\| = \|x^*\| \tag{2.1.2}$$

b) $\|x^*(\cdot)y\|_{\mathcal{I}} = \|x^*\| . \|y\|$ pour tout $x^* \in X^*$ et $y \in Y$. En effet

$$\begin{aligned} \|x^*\| . \|y\| &= \|x^*(\cdot)y\| \leq \|x^*(\cdot)y\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|(id_{\mathbb{K}}(\cdot)y) \circ id_{\mathbb{K}} \circ x^*\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|id_{\mathbb{K}}(\cdot)y\| . \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} . \|x^*\| \\ &= \|y\| . \|x^*\| . \end{aligned}$$

D'où $\|x^*(\cdot)y\|_{\mathcal{I}} = \|x^*\| . \|y\|$.

Proposition 2.1.3 *La classe $\mathcal{L}_f$ (des opérateurs de rang fini) est le plus petit idéal d'opérateur et $\mathcal{L}$ est le plus grand.*

2.1.1 L'idéal des opérateurs approximables

Comme $\mathcal{L}_f$ est un idéal normé n'est pas fermé, on peut définit la classe des opérateurs suivante.

Définition 2.1.4 *Soient X et Y deux espaces normés. L'opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit approximable s'il existe une suite $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $\mathcal{L}_f(X, Y)$ converge vers T dans $\mathcal{L}(X, Y)$, i.e.*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$$

On note par $\mathcal{A}(X,Y)$ l'espace de tout les opérateurs approximables de X dans Y. i.e.,

$$\mathcal{A}(X,Y) = \overline{\mathcal{L}_f(X,Y)}.$$

Proposition 2.1.4 *$\mathcal{A}$ est un idéal de Banach avec la norme usuelle des opérateurs.*

2.1.2 Idéal des opérateurs compacts

Définition 2.1.5 *Soient X et Y deux espaces normés. L'opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est dit compact si $\overline{T(B_X)}$ est compact dans Y.*
On note $\mathcal{K}(X,Y)$ l'espace des opérateurs compacts de X dans Y.

Proposition 2.1.5 *$\mathcal{K}$ est un idéal de Banach des opérateurs linéaires.*

2.1.3 Idéal des opérateurs complètement continus

Définition 2.1.6 *Un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est dit complètement continu s'il transforme une suite convergeant faiblement dans X vers x en une suite convergeant en norme vers $T(x)$ dans Y i.e.*

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X : x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x)$$

On écrit $T \in \mathcal{CC}(X,Y)$.

Proposition 2.1.6 *La classe $\mathcal{CC}$ est un idéal d'opérateurs linéaires.*

Preuve. Il est clair que $T = 0 \in \mathcal{CC}(X,Y)$.
Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{CC}(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de X tel que $x_n \xrightarrow{w} x \in X$. Alors

$$(T_1 + \alpha T_2)(x_n) = T_1(x_n) + \alpha T_2(x_n) \longrightarrow T_1(x) + \alpha T_2(x) = (T_1 + \alpha T_2)(x).$$

Donc $(T_1 + \alpha T_2) \in \mathcal{CC}(X,Y)$.
Maintenant montrons que $\mathcal{CC}(X,Y)$ contient $\mathcal{L}_f(X,Y)$. Soient $\varphi \in X^*$, $y \in Y$ et $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ tel que $x_n \xrightarrow{w} x$. Par la définition de convergence faible on a $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$. Alors,

$$(\varphi(\cdot)y)(x_n) = \varphi(x_n)y \longrightarrow \varphi(x)y = (\varphi(\cdot)y)(x).$$

Ceci prouver que $\varphi(\cdot)y \in \mathcal{CC}(X,Y)$. En fin on a $\mathcal{L}_f(X,Y) \subset \mathcal{CC}(X,Y)$.
Pour la propriété d'idéal, soient $v \in \mathcal{L}(E,X),\ T \in \mathcal{CC}(X,Y),\ u \in \mathcal{L}(Y,F)$ et $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tel que $x_n \xrightarrow{w} x$. Comme v est continu, nous avons $v(x_n) \xrightarrow{w} v(x)$. Comme $T \in \mathcal{CC}(X,Y)$ nous avons

$$T(v(x_n)) \longrightarrow T(v(x)).$$

En fin par continuité de u on a

$$u(T(v(x_n))) \longrightarrow u(T(v(x))).$$

D'où, $u \circ T \circ v \in \mathcal{CC}(E,F)$. ■

Proposition 2.1.7 *L'idéal $\mathcal{CC}$ est fermé.*

Preuve. Soient $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{CC}(X,Y)$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|T_n - T\| = 0$ et montrons que $T \in \mathcal{CC}(X,Y)$. Soit $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset X$ avec $x_j \xrightarrow{w} x \in X$. Comme chaque T_n est complètement continu, pour tout n on a

$$\lim_{j\longrightarrow+\infty} \|T_n(x_j) - T(x)\| = 0$$

Par la Proposition 0.3.1, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall j : \|x_j\| \leq M \quad \text{et} \quad \|x\| \leq \liminf_j \|x_j\| \leq M.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|T_{n_0} - T\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$$

Comme $T_{n_0} \in \mathcal{CC}(X,Y)$, nous avons $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} T_{n_0}(x_j) = T_{n_0}(x)$, et donc il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall j \geq j_0 : \|T_{n_0}(x_j) - T_{n_0}(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors pour tout $j \geq j_0$ on a

$$\begin{aligned}
\|T(x_j) - T(x)\| &= \|T(x_j) - T_{n_0}(x_j) + T_{n_0}(x_j) + T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x) - T(x)\| \\
&\leq \|T(x_j) - T_{n_0}(x_j)\| + \|T_{n_0}(x_j) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \\
&\leq \|T_{n_0} - T\| \,.\, \|x_j\| + \tfrac{\varepsilon}{3} + \|T_{n_0} - T\| \,.\, \|x\| \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{3M} M + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3M} M = \varepsilon,
\end{aligned}$$

cesi donne $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} T(x_j) = T(x)$, et donc $T \in \mathcal{CC}(X,Y)$. ■

2.2 L'idéal des opérateurs p-sommants

Définition 2.2.1 *Soient X, Y deux Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dit que T est p-sommant (pour $1 \leq p < \infty$) si,*

$$\begin{cases} \exists C \geq 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X \\ \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

On note

$$\Pi_p(X,Y) = \{T : X \to Y \ \ \text{linéaires p-sommants}\}$$

et

$$\pi_p(T) = \inf\{C \ \text{vérifiant (2.2.1)}\}$$

Remarque 2.2.1 *Pour tout $T \in \Pi_p(X,Y)$, l'inégalité (2.2.1) équivalente à*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \text{pour tout} \ (x_i)_{i=1}^n \subset X$$

Exemple 2.2.1 *Soit K un compact et μ une probabilité sur K. L'injection canonique*

$$j_p : C(K) \to L_p(\mu, K),$$

est p-sommante et de norme égale à 1.

Proposition 2.2.1 *Soit $T \in \Pi_p(X,Y)$ et X_1 un sous espace de X. Alors, la restriction de T à M, est p-sommante.*

Proposition 2.2.2

1. *$\|T\| \leq \pi_p(T)$ pour tout $T \in \Pi_p(X,Y)$.*
2. *$(\Pi_p(X,Y), \pi_p(\cdot))$ est un espace normé*
3. *$\mathcal{L}_f(X,Y) \subset \Pi_p(X,Y)$*
4. *$\pi_p(id_{\mathbb{K}}) = 1$, où $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $id_{\mathbb{K}}(\alpha) = \alpha$.*
5. *Propriété d'ideal. Soient $v \in \mathcal{L}(E,X), T \in \Pi_p(X,Y)$ et $w \in \mathcal{L}(Y,F)$. Alors $w \circ T \circ v \in \Pi_p(E,F)$ et*

$$\pi_p(w \circ T \circ v) \leq \|w\| \, \pi_p(T) \, \|v\|.$$

6. $(\Pi_p(X,Y), \pi_p(\cdot))$ *est un idéal de Banach.*

Preuve. 1) Soit $T \in \Pi_p(X,Y)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $n = 1$, on a

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\langle \varphi, x\rangle| = \pi_p(T) \|x\|$$

Donc

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \pi_p(T)$$

2- $\Pi_p(X,Y)$ est un espace de Banach.

i) $(\Pi_p(X,Y), \pi_p(.))$ est un sous vectoriel normé.

a) Soient $T, S \in \Pi_p(X,Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \|(T+S)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i) + S(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{I.M}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \|S(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(T) \left\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{p,\omega} + \pi_p(S) \left\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{p,\omega} \\
&\leq (\pi_p(T) + \pi_p(S)) \left\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{p,\omega}.
\end{aligned}$$

D'où $T + S \in \Pi_p(X,Y)$ et

$$\pi_p(T+S) \leq \pi_p(T) + \pi_p(S). \tag{2.2.2}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \|(\lambda T)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\lambda| \pi_p(T) \left\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{p,\omega}.
\end{aligned}$$

D'où $\lambda T \in \Pi_p(X,Y)$ et

$$\pi_p(\lambda T) \leq |\lambda| \pi_p(T) \tag{2.2.3}$$

D'après (2.2.2) et (2.2.3), $\Pi_p(X,Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$.

D'autre part

$$\begin{aligned}\pi_p(T) &= \pi_p\left(\frac{1}{\lambda}\lambda T\right)\\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\pi_p(\lambda T)\end{aligned}$$

Donc

$$|\lambda|\,\pi_p(T) \leq \pi_p(\lambda T) \tag{2.2.4}$$

De (2.2.3) et (2.2.4) donne $\pi_p(\lambda T) = |\lambda|\,\pi_p(T)$.

b) $\pi_p(T) = 0$. D'après (**??**) on a

$$\begin{aligned}\|T\| &\leq \pi_p(T) = 0 \Longrightarrow \|T\| = 0\\ &\Longrightarrow T = 0\end{aligned}$$

De (a) et (b), $\Pi_p(X,Y)$ est espace vectoriel normé.

ii) $\Pi_p(X,Y)$ est complet. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\Pi_p(X,Y)$. D'après (**??**), on a

$$\|T_n - T_m\| \leq \pi_p(T_n - T_m).$$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X,Y)$. Alors converge vers une limite $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Soit $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : \pi_p(T_n - T_m) \leq \varepsilon.$$

Soient $l \in \mathbb{N}$,.$(x_k)_{k=1}^l \subset X$ on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{l}\|(T_n - T_m)(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T_n - T_m)\left\|(x_k)_{k=1}^l\right\|_{p,\omega}\\ &\leq \varepsilon\left\|(x_k)_{k=1}^l\right\|_{p,\omega}.\end{aligned}$$

$\forall n, m > n_0$ et pour m tend vers à l'infini on trouve

$$\left(\sum_{k=1}^{l}\|(T_n - T)(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\left\|(x_k)_{k=1}^l\right\|_{p,\omega}.$$

Ce qui implique que, $\forall n > n_0, (T_n - T) \in \Pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(T_n - T) \leq \varepsilon$, finalement $T = (T - T_n) + T_n \in \Pi_p(X,Y)$.

Alors $(\Pi_p(X,Y); \pi_p(.))$ est un espace de Banach.

3) Soit $T \in \mathcal{L}_f(X,Y)$. Comme $\mathcal{L}_f(X,Y)$ est un sous espace vectoriel, alors il suffit de montrer que l'opérateur de rang 1 de la forme $T = x^*(\cdot)\, y$ où $x^* \in X^*$ et $y \in Y$, est dans $\Pi_p(X,Y)$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|x^*(x_i)\, y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|y\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|y\|\, \|x^*\| \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{x^*}{\|x^*\|}(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|y\|\, \|x^*\| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\psi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|y\|\, \|x^*\| \left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{p,\omega}
\end{aligned}$$

D'où $T \in \Pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(T) \leq \|y\|\, \|x^*\|$. D'autre part

$$\|T\| = \|y\|\, \|x^*\| \leq \pi_p(T) \leq \|y\|\, \|x^*\|.$$

Donc $\pi_p(T) = \|y\|\, \|x^*\|$.

4) $\pi_p(id_{\mathbb{K}}) = 1$. Soit $(x_i)_{i=1}^n \in l_p^{\omega}(\mathbb{K})$, comme $\ell_{p,\omega}(\mathbb{K}) = \ell_p(\mathbb{K})$ et $\left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{p,\omega} = \left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_p$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|id_{\mathbb{K}}(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\psi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Donc $\pi_p(id_{\mathbb{k}}) = 1$.

5) Propriété d'ideal, soient $v \in \mathcal{L}(E,X), T \in \Pi_p(X,Y)$ et $w \in \mathcal{L}(Y,F)$. Pour tout $(z_i)_{i=1}^n \subset E$ on a

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\|(w\circ T\circ v)(z_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\|w(T(v(z_i)))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|w\|\left(\sum_{i=1}^{n}\|T(v(z_i))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|w\|\,\pi_p(T)\left\|(v(z_i))_{1\leq i\leq n}\right\|_{p,\omega} \\
&= \|w\|\,\pi_p(T)\,\|\widehat{v}((z_i)_{i=1}^n)\|_{p,\omega} \\
&\leq \|w\|\,\pi_p(T)\,\|v\|\,\|(z_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega}\,.
\end{aligned}
$$

D'où $w\circ T\circ v\in\Pi_p(E,F)$ et $\pi_p(w\circ T\circ v)\leq\|w\|\,\pi_p(T)\,\|v\|$.

Finalement $(\Pi_p(X,Y),\pi_p(\cdot))$ est un idéal de Banach. ■

Proposition 2.2.3 *(Exercice TD) Soit $1\leq p,q<\infty$ telle que $p<q$, alors*

$$\Pi_p(X,Y)\subset\Pi_q(X,Y),$$

et $\pi_q(T)\leq\pi_p(T)$ pour tout $T\in\Pi_p(X,Y)$.

2.3 Théorème de dimmantion de Pietsch

Théorème 2.3.1 ***(Théoreme de Dimmantion de Pietsch).*** *Soit X et Y deux espaces de Banach. Soit $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ et K un ensemble compact, $K=(B_{X^*},\sigma(X^*,X))$ alors T est p-sommants $(1\leq p\leq\infty)$ si et seulement s'il exist une probabilité μ sur K est une constante C tel que :*

$$\|T(x)\|\leq C\left(\int_K|\langle x,\xi\rangle|^p\,d\mu(\xi)\right)^{\frac{1}{p}},\ \textit{pour tout } x\in X \tag{2.3.1}$$

Démonstration. $\Leftarrow$) Soit $x_1,...x_n\in X$, alors

$$\|T(x_i)\|\leq C\left(\int_K|\langle x_i,\xi\rangle|^p\,d\mu(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p &\leq C^p \sum_{i=1}^{n} \left(\int_K |\langle x_i, \xi \rangle|^p \, d\mu(\xi) \right) \\
&= C^p \left(\int_K \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \, d\mu(\xi) \right) \\
&\leq C^p \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right) \left(\int_K d\mu(\xi) \right) \\
&= C^p \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\| \right)^{\frac{1}{p}} \leq C^p \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\Longrightarrow$) Pour $M \subset X$ fini (par exemple $M = \{x_1 ... x_n\} \subset X$), on définit

$$\begin{aligned}
g &= g_{\{x_1 ... x_n\}} : K \to \mathbb{R} \\
\xi &\mapsto g(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p - C^p \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \, ... (*)
\end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned}
Q &= \left\{ g \in C(K) : g(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p - C^p \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right\} \\
\text{et } P &= \{ f \in C(K) : f(\varsigma) > 0, \forall \varsigma \in K \}
\end{aligned}$$

les ensembles P et Q sont convexe de plus P est ouverte. Comme T est p-sommant. Alors $\exists \xi_0 \in K$ telle que $g(\xi_0) \leq 0$ anssi $P \cap Q = \varnothing$. Par le théorème da H-B (la forme géometrique) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, h \in C(K)^* \cong M(K)$ tel que

$$h(g) \leq \alpha < h(f), \forall f \in P. \forall g \in Q.$$

D'après le théoreme de Riezz il existe une mesure μ sur K tel que

$$\int_K g d\mu \leq \alpha < \int_K f d\mu, \forall f \in P. \forall g \in Q \tag{2.3.2}$$

Comme $0 \in Q$ alors $\alpha \geq 0, \mu \geq 0$ et $\left(0 \leq \alpha \leq \int_{\mathbb{k}} f d\mu\right)$. On suppose que $\alpha > 0$ comme P contient les constant positive α, on aurait

$$\alpha < \int_K \alpha d\mu = \alpha \mu(K).$$

On peut suppose que μ est une probabilité. Si non on prend $\lambda = \frac{\mu}{\|\mu\|}$ ce ci ne change pas (2.3.2). Contradiction, danc $\alpha = 0$. On a $x \in M$. On prend $M = \{x\}$. On a alors

$$g(\xi) = \|T(x)\|^p - C^p |\langle x, \xi \rangle|^p$$

et

$$\int_K g(\xi)\, d\mu(\xi) = \int_K \|T(x)\|^p - C^p |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\mu\xi \quad \leq 0$$

D'où

$$\|T(x)\| \leq C \left[\int_K |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

■

2.4 Les énoncés d'exercices

Exercice 2.4.1 *Montrer que:* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *est un idéal de Banach si et seulement si*
(1) $Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ *et* $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$
(2) Si $u \in \mathcal{L}(E, X)$, $T \in \mathcal{I}(X, Y)$, $v \in \mathcal{L}(Y, F)$, *alors* $v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(E, F)$ *et* $\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|$
(3) Si $(T_n)_n \subset \mathcal{I}(X, Y)$ *avec* $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}} < \infty$, *alors* $T := \sum_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathcal{I}(X, Y)$ *et* $\|T\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}}$

Preuve. Premièrement supposons que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un idéal de Banach. D'après la Définition **??**, il suffit de montrer la condition (3). La série $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ est absolument convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{I}(X, Y)$ alors elle est convergente et $T \in \mathcal{I}(X, Y)$. La continuité de la norme dans un espace normé donne

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{I}} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_n \right\|_{\mathcal{I}} = \left\| \lim_n \sum_{j=1}^{n} T_j \right\|_{\mathcal{I}} = \lim_n \left\| \sum_{j=1}^{n} T_j \right\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \lim_n \sum_{j=1}^{n} \|T_j\|_{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que les conditions (1), (2) et (3) sont satisfait. Soit X et Y deux espaces de Banach. Il est clair que si $T = 0$ de X dans Y et $v = 0$ de $\mathbb{K}$ dans Y et

$\varphi \in X^*$ on a

$$T = \upsilon \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$$

et l'hypothèse (2) donne $T = 0 \in \mathcal{I}(X,Y)$ et $\|0\|_{\mathcal{I}} = 0$. L'hypothèse (3) affirmé que si $T_1, T_2 \in \mathcal{I}(X,Y)$ alors

$$T_1 + T_2 \in \mathcal{I}(X,Y) \quad \text{et} \quad \|T_1 + T_2\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_1\|_{\mathcal{I}} + \|T_2\|_{\mathcal{I}}$$

(pour ceci on considère dans (3) la suite $(T_n)_n \subset \mathcal{I}(X,Y)$ avec $T_n = 0$ pour tout $n \geq 3$). Soit maintenant $T \in \mathcal{I}(X,Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est clair que l'opérateur linéaire

$$T_\lambda : Y \longrightarrow Y, \quad T_\lambda(y) = \lambda y,$$

est continu avec $\|T_\lambda\| = |\lambda|$. La condition (2) donne

$$\lambda T = T_\lambda \circ T \in \mathcal{I}(X,Y)$$

et

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{I}} = \|T_\lambda \circ T\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_\lambda\| \,.\, \|T\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \,.\, \|T\|_{\mathcal{I}}$$

D'autre part pour $\lambda \neq 0$ on a

$$\|T\|_{\mathcal{I}} = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda T \right\|_{\mathcal{I}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda T\|_{\mathcal{I}} \,,$$

ce qui donne $\|\lambda T\|_{\mathcal{I}} \geq |\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{I}}$. Alors

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \,.\, \|T\|_{\mathcal{I}}$$

Pour $\lambda = 0$ l'égalité est évidente. Soit $T \in \mathcal{I}(X,Y)$ tel que $\|T\|_{\mathcal{I}} = 0$. Supposons que $T \neq 0$, alors il existe $x \in X$, $x \neq 0$ tel que $T(x) \neq 0$ (on peut choisir x avec $\|x\| = 1$). Par le Théoréme de Hahn-Banach il existe une fonctionnelle $\varphi \in F^*$ tel que $\varphi(T(x)) = 1$. L'application linéaire définie par

$$S : \mathbb{K} \longrightarrow E, \quad S(\lambda) = \lambda x,$$

est de rang fini, alors $S \in \mathcal{I}(X,Y)$. D'autre part pour toute $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$\varphi \circ T \circ S(\lambda) = \varphi(T(S(\lambda))) = \varphi(T(\lambda x)) = \lambda \varphi(T(x)) = \lambda = Id_{\mathbb{K}}(\lambda).$$

Donc la condition (2) implique que $\varphi \circ T \circ S = Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(X,Y)$ et $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| . \|T\|_{\mathcal{I}} . \|S\| = 0$. Alors $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 0$, ce qui contredit la condition (1), donc $T = 0$. Alors nous avons montré que $\mathcal{I}(X,Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et que $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ est une norme sur espace vectoriel $\mathcal{I}(X,Y)$. Maintenant nous montrons que $\mathcal{I}(X,Y)$ contient les opérateurs linéaires de rang fini. Soit $\varphi \in X^*$ et $y \in Y$, l'opérateur linéaire

$$S_y : \mathbb{K} \to F, \ S_y(\lambda) = \lambda y,$$

est clairement continu. D'autre part pour tout $x \in E$ on a

$$S_y \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi(x) = S_y(\varphi(x)) = \varphi(x)y = (\varphi(\cdot)y)(x)$$

alors nous avons conclu que $\varphi(\cdot)y = S_y \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$. Par les conditions (1) et (2) on a $\varphi(\cdot)y \in \mathcal{I}(X,Y)$. Soit maintenant $T \in \mathcal{F}(X,Y)$, comme $\mathcal{I}(X,Y)$ est un espace vectoriel on a

$$T = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\cdot)y_i \in \mathcal{I}(X,Y)$$

En fin, le Théorème 0.2.1 (avec la condition (3)) assurer que $(\mathcal{I}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est de Banach.

■

Exercice 2.4.2 *Montrer que l'idéal $\mathcal{L}_f$ n'est pas de Banach avec la norme usuelle des opérateurs.*

Preuve. Il suffit de trouver deux espaces de Banach X_0 et Y_0 et montrons que $\mathcal{L}_f(X_0, Y_0)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{L}(X_0, Y_0)$.

On considère les espaces de Banach $X_0 = c_0$ muni de la norme sup, et l'espace $Y_0 = \ell_1$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la base canonique de l'espace ℓ_1, i.e.

$$e_i = (0, ..., 0, \underset{(\text{ordre } i)}{1}, 0, ...), \quad \text{pour tout } i \geq 1$$

On définit l'application $T : c_0 \longrightarrow \ell_1$ par

$$T((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\lambda_j}{2^j} e_j, \quad (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$$

Cette application est bien définie car pour tout suite $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ on a

$$\left\|T((\lambda_j)_{j=1}^{\infty})\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{2^j} e_j\right\| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} < \infty$$

Il est facile de prouver que T est linéaire. Aussi, par l'inégalité précédente, il est immédiat de voir que T est continue avec norme ≤ 1.
Maintenant on définit une suite $(T_n)_n$ des opérateurs linéaires $T_n : c_0 \longrightarrow \ell_1$ par

$$T_n((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\lambda_j}{2^j} e_j, \quad (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$$

On remarque que $\mathrm{Im}(T_n)$ est inclue dans le sous espace engendré par $\{e_1, ..., e_n\}$ ce qui implique que

$$\dim(\mathrm{Im}(T_n)) < \infty$$

et donc $T_n \in \mathcal{L}_f(c_0, \ell_1)$ pour tout $n \geq 1$.
En outre, nous avons

$$\begin{aligned} \|T - T_n\| &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{c_0}} \left\|(T - T_n)((\lambda_j)_{j=1}^{\infty})\right\| = \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{c_0}} \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \tfrac{\lambda_j}{2^j} e_j \right\| \\ &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{c_0}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \tfrac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \tfrac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Donc,

$$0 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|T - T_n\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

ce qui donne $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{L}(c_0, \ell_1)$ muni de la norme usuelle des opérateurs.
D'autre part notons que $T(2^j e_j) = e_j$. Alors

$$e_j \in \mathrm{Im}(T), \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Ceci signifier que l'espace $\mathrm{Im}(T)$ contient une infinité de vecteurs e_j linéairement indépendants, alors la dimension de $\mathrm{Im}(T)$ est infinie, d'où $T \notin \mathcal{L}_f(c_0, \ell_1)$. Finalement on obtient

$$\begin{cases} (T_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_f(c_0, \ell_1) \\ T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{L}(c_0, \ell_1) \\ T \notin \mathcal{L}_f(c_0, \ell_1) \end{cases}$$

D'où $\mathcal{L}_f(c_0, \ell_1)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{L}(c_0, \ell_1)$ avec la norme usuel des opérateurs. ■

Exercice 2.4.3 *Soient X, Y deux Banach, $1 \leq p, q < \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On dit que T est (p, q)-sommante s'il existe un nombre $C \geq 0$ telle que pour toute $(x_i)_{i=1}^{n} \subset X$ on ait* *l'inégalité*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\langle x_i,x^*\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.4.1}$$

On note

$$\Pi_{p,q}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ linéaires } (p,q)\text{-sommantes}\}$$

et

$$\pi_{p,q}(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.4.1)\}.$$

Montrer que:

1) $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ est un espace de Banach.

2) Si $p < q, \Pi_{p,q}(X,Y) = \{0\}$.

3) $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ est un idéal de Banach.

4) $\Pi_r(X,Y) \subset \Pi_{p,q}(X,Y)$ pour tout $q < r < p$.

Exercice 2.4.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. T est (p,q)-sommant.

2. T est $(p;q)$-sommant si $(T(x_n))_n \in \ell_p(F)$ chaque fois que $(x_n)_n \in \ell_q^w(E)$.

3. L'application induite $\widehat{T} : \ell_q^w(E) \to \ell_p(F)$ donnée par $\widehat{T}((x_n)_n) = (T(x_n))_n$ est une application linéaire bien définie et continue.

4. Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|(T(x_n))_n\|_p \leq C\,\|(x_n)_n\|_{q,w}, \quad \text{pour toute } (x_n)_n \in \ell_q^w(E).$$

L'infimum des constantes C pour lesquelles les inégalités ci-dessus sont vérifiantes ($= \left\|\widehat{T}\right\|$) est une norme (notée $\pi_{(p,q)}(\cdot)$) pour $\Pi_{p,q}(E,F)$ et sous cette norme, $\Pi_{p,q}(E,F)$ est complét.

Chapitre 3

Idéaux multilinéaire et méthodes de construction

3.1 Applications multilinéaires continues

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces normés.

Définition 3.1.1 *Une application $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est dite opérateur ou application multilinéaire (ou m-linéaire) si*

$$T(x^1, ..., \alpha x^j + \beta y^j, ..., x^m) = \alpha T(x^1, ..., x^j, ..., x^m) + \beta T(x^1, ..., y^j, ..., x^m)$$

pour tout $1 \leq j \leq m$ et $x^j, y^j \in X_j$,$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ,Si $Y = \mathbb{K}$, T est dit forme multilinéaire.

On note $L(X_1, ..., X_m; Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y

Définissons les opérations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)\left(x^1, ..., x^m\right) &= T_1\left(x^1, ..., x^m\right) + T_2\left(x^1, ..., x^m\right) \\ (\alpha T)\left(x^1, ..., x^m\right) &= \alpha T\left(x^1, ..., x^m\right) \end{aligned}$$

ce qui donne à $L(X_1, ..., X_m; Y)$ une structure d'espace vectoriel .

Proposition 3.1.1 *(multilinéaire borné) Soit $T \in L(X_1, ..., X_m, Y)$ munissons $X_1 \times \cdots \times X_m$ de la norme*

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\|\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \\ &= \max_{1 \leq j \leq m} \left\|x^j\right\|_j \end{aligned}$$

les proprietes suivant sont équivalentes:

(1) *T est continue*

(2) *T est continue au point $(0, \ldots, 0)$*

(3) *$\|T(x^1, \ldots, x^m)\|$ est borné sur le produit des boules unite $\|x^1\| \leq 1, ..., \|x^m\| \leq 1$.*

(4) *$\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall (x^1, \ldots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$*

$$\left\|T\left(x^1, \ldots, x^m\right)\right\| \leq M \left\|x^1\right\| \ldots \|x^m\|$$

Notation 3.1.1 *Lorsque les espaces X_j et Y sont des espaces normés. On munit l'espace $\prod\limits_{j=1}^{m} X_j$ de la topologie d'espaces vectoriel produit et on note $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'ensemble de tous les applications m-lineaire continues de $\prod\limits_{j=1}^{m} X_j$ dans Y, on a evidemment $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = L(X_1, ..., X_m; Y) \cap \left(\prod\limits_{j=1}^{m} X_j; Y\right)$ est donc est un sous espace vectoriel de chacun de ces espaces*

Si $X_1 = ... = X_m = X$ on note $\mathcal{L}(X^m; Y)$.

Si $Y = \mathbb{K}$ alors $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$.

Si $m = 1$ et $Y = \mathbb{K}$ alors $\mathcal{L}(X; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X) = X^*$ le dual topologique de X.

Exemple 3.1.1 *Soit $E = C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme*

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

T une application dans $L(^2E)$ définit par

$$T(x, y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$$

L'application T est séparèment continue mais n'est pas continue. En effet, comme $[0,1]$ est compact pour chaque $x \in E$, existe $C_x < \infty$ telle que

$$\sup_{|t \leq 1|} |x(t)| = C_x < \infty$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |T(x,y)| &\leq \int_0^1 |x(t)\, y(t)|\, dt \leq \sup_{|t\leq 1|} |x(t)| \int_0^1 |y(t)|\, dt \\ &= \sup_{|t\leq 1|} |x(t)|\, \|y\| = C_x \|y\| . \end{aligned}$$

Ainsi, T est continue dans la deuxiéme variables, de meme manière , il en résulte que T est continue dans la première variable.

Pour prouver que T n'est pas continue, on considérons la suites suivantes

$$x_n(t) = \begin{cases} n - n^3 t, \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 \qquad \text{si } \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nous avons

$$\|x_n\| = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left| n - n^3 t \right| dt = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(n - n^3 t \right) dt = \frac{1}{2n}$$

où il suit que $(x_n, x_n) \to (0,0)$. Mais $B(x_n, x_n)$ ne converge pas vers $B(0,0) = 0$ parce que

$$B(x_n, x_n) = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(n - n^3 t \right)^2 dt = \frac{1}{3}$$

Par conséquent, T n'est pas continue.

Théorème 3.1.1 *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y un espace vectoriel normé. L'application $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y)$ est continue si et seulment si T est continue pour chaque variable.*

Corollaire 3.1.1 *Si $E_1, ..., Em$ et de dimension finie, alors tous $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ est continue.*

3.2 Théorèmes fondamentaux

Théorème 3.2.1 ***(Théorème du graphe fermé pour les applications multilinéaire)*** *Soient $E_1, ..., E_m$ et F des espace de Banach et $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ une application m-linéaire de graphe fermé alors A est continue.*

Preuve. Soient $x_i \in E_i, i = 1, \ldots, m$ fixient ,on montrer que $A_{(x_2,\ldots,x_m)} : E_1 \to F$ de graphe fermé. Soit $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dans E_1 comme $y_n \to y$ dans E_1 et $A_{(x_2,\ldots,x_m)}(y_n) \to z \in F$. Comme $y_n \to y \in E_1$ on a

$$\begin{aligned} \|(y_n, x_2, \ldots, x_m) - (y, x_2, \ldots, x_m)\| &= \|(y_n - y), 0, \ldots, 0)\| \\ &= \|y_n - y\| \end{aligned}$$

est aussi

$$\lim_{n\to\infty} (y_n, x_2, \ldots, x_m) = (y, x_2, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$$

comme $A(y_n, x_2, \ldots, x_m) = A_{(x_2,\ldots,x_m)}(y_n) \to z \in F$. On a $((y_n, x_2, \ldots, x_m), A(y_n, x_2, \ldots, x_m))_{n=1}^{\infty}$est une suite de graphe A converge vers $((y, x_2, \ldots, x_m), z)$. Comme le graphe de A est fermé alors

$$z = A(y, x_2, \ldots, x_m) = A_{(x_2,\ldots,x_m)}(y)$$

donc comme $A_{(x_2,\ldots,x_m)}$ est un graphe ferme, alors par théorème graphe fermè $A_{(x_2,\ldots,x_m)}$ est continue. De même, $A_{(x_1,x_3,\ldots,x_m)}, \ldots, A_{(x_1,\ldots,x_{m-1})}$ sont continues. Alors A est continue . ■

Théorème 3.2.2 ***(Théorème uniforment continue pour les applications multilinéaires)*** *Soient $E_j, j = 1, ..., m$ espaces de Banach, F espace vectoriel normé et $\{T_i\}_{i\in I}$, une famille des applications m-linéaire continues de $E_1 \times \ldots \times E_m$ dans F. Si*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x_1, \ldots, x_m)\| < \infty \ \forall (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m. \tag{3.2.1}$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$$

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \left\{(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m;\ \sup_{i\in I} \|T_i(x_1, \ldots, x_m)\| < n\right\}$$

Il est facile de voir que chaque A_n est fermé, de (3.2.1) on a

$$E_1 \times \ldots \times E_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

D'après le théorème de Baire, il existe un entier positif n_0 tels que $int\,(A_{n_0}) \neq \phi$

$(a_1, \ldots, a_m) \in int\,(A_{n_0})$ et $r \succ 0$ tels que la boule ouverte $B_{\,E_1 \times \ldots \times E_m}\,((a_1, \ldots, a_m)\,; r)$ dans A_{n_0}. Ainsi,

$$\|T_i\,(x_1, \ldots, x_m)\| \leq n_0$$

pour tout $i \in I$ et tous $(x_1, \ldots, x_m) \in B_{E_1 \times \ldots \times E_m}\,((a_1, \ldots, a_m)\,; r)$. Alors

$$\|T_i\,(x_1, \ldots, x_m)\| \leq 2^m n_0 \tag{3.2.2}$$

pour tout $i \in I$ et tous $(x_1, \ldots, x_m) \in B_{\,E_1 \times \ldots \times E_m}\,(0; r)$. Donc

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2^m n_0}{r^m}$$

■

Le corollaire suivant est une version naturelle du théorème de Banach-Steinhaus pour le cas des applications multilinéaires.

Corollaire 3.2.1 ***(Théorème de Banach-Steinhaus pour des applications multilinéaires)*** *Soient $E_1, \ldots, E_m$ des espaces de Banach et F un espace vectoriel normé et $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(\,E_1 \times \ldots \times E_m; F)$ tels que pour tous $x_j \in E_j$, la suite $(A_n\,(x_1, \ldots, x_m))_{n=1}^{\infty}$ est convergent. Si*

$$A\,(x_1, \ldots, x_m) = \lim_{n \to \infty} A_n\,(x_1, \ldots, x_m)\,.$$

Alors $A \in \mathcal{L}(\,E_1 \times \ldots \times E_m; F)$.

Preuve. Il est claire que A est m-linéaire.Comme $(A_n\,(x_1, \ldots, x_m))_{n=1}^{\infty}$est convergente**.** Donc

$$\sup_n\,\|A_n\,(x_1, \ldots, x_m)\| < \infty \;\;\forall\,(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$$

D'après le théorème **??**, il existe un nombre réel $C > 0$ tels que

$$\sup_n \|A_n\| < C.$$

Ainsi,

$$\|A_n(x_1,\ldots,x_m)\| \leq \|A_n\| \|x_1\| \ldots \|x_m\| \leq C \|x_1\| \ldots \|x_m\|$$

quand $n \to \infty$ on obtient

$$\|A(x_1,\ldots,x_m)\| \leq C \|x_1\| \ldots \|x_m\| .$$

Donc A est continue. ■

3.3 Idéaux des opérateurs multilinéaires

Opérateur de rang fini

Soient $X_1,...,X_m$ et Y des espaces normés, $T \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ est de rang fini, s'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^{(j)} \in X_j^*$et $y_i \in Y$,$i = 1,...,n$, $j = 1,...,m$ tel que :

$$T(x_1,...,x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(x_1)...\varphi_i^{(m)}(x_m)\, y_i.$$

L'espace des opérateurs multilineaire de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1,...,X_m;Y)$.

Remarque 3.3.1 *$\mathcal{L}_f(X_1,...,X_m;Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$.*

Définition 3.3.1 *(idéal des opérateurs multilinéaires). Un idéal multilinéaire $\mathcal{M}$ est une classe d'opérateurs multilinéaires continues tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $X_1,...,X_m$ et Y des espace de Banach*

On a :

(1) *$\mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ qui contient $\mathcal{L}_f$*

(2) *Propriété d'idéal: si $T \in \mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y)$;$u_j \in \mathcal{L}(E_j;X_j)$ pour $j = 1,...,m$ et $v \in \mathcal{L}(Y;F)$ alors $v \circ T \circ (u_1,...,u_m) \in \mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$*

De plus, si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$satisfait

(1′) *$(\mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (Banach)*

(2′) $\|A^n : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K};\ A^n(x_1,...,x_m) = x_1...x_m\|_{\mathcal{M}} = 1.$

(3′) *Si* $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$ *;*$U_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$ *pour* $j = 1, ..., m$ *et* $v \in \mathcal{L}(Y; F)$

$$\|v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|u_1\| \, ... \, \|u_m\| \, .$$

Alors $(\mathcal{M}; \|.\|_{\mathcal{M}})$ *s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs multilinéaires.*

Exemple 3.3.1 $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *et* $\mathcal{L}_f$ *sont des idéaux des applications multilinéaires.*

Proposition 3.3.1 *Soit* $(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}})$ *un idéal normé des applications multilinéaires, on a :*

$$\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{M}} \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{M}.$$

Preuve. Soient $T \in \mathcal{M}\left(X_1, ..., X_m; Y\right), \varphi \in Y^*$ et $x_i \in X_j$, $j = 1, ..., m$
On définit:

$$\begin{array}{ccc} R_j & : & \mathbb{K} \longrightarrow X_j \\ \lambda & \longmapsto & R_j\left(\lambda\right) = \lambda x_j \end{array}$$

alors

$$\|R_j\| = \|x_j\|$$

$$\begin{aligned} \varphi \circ T \circ \left(R_{1,}...., R_m\right)\left(\lambda_1, ..., \lambda_m\right) &= \varphi \circ T\left(R_1\left(\lambda_1\right), ..., R_m\left(\lambda_m\right)\right) \\ &= \varphi \circ T\left(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_m x_m\right) \\ &= \varphi\left(\lambda_1 ... \lambda_m T\left(x_1, ..., x_m\right)\right) \\ &= \lambda_1 ... \lambda_m (\varphi \circ T)\left(x_1, ..., x_m\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{array}{c} id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda_1, .., \lambda_m) \longrightarrow \lambda_1 ... \lambda_n \end{array}$$

alors

$$\varphi \circ T \circ \left(R_{1,}...., R_m\right) = \left(\varphi \circ T\right)\left(x_1, ..., x_m\right) id_{\mathbb{K}^m} \tag{3.3.1}$$

de (3.3.1) on a:

$$\begin{aligned} |(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m)| &= |(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m)| \, \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m) \, id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|\varphi \circ T \circ (R_1, ..., R_m)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqslant \|\varphi\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| \, ... \, \|R_m\| \end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach:

$$\begin{aligned} \|T(x_1, ..., x_m)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m)\| \\ &\leqslant \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|\varphi\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| \, ... \, \|R_m\| \\ &\leqslant \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| \, ... \, \|R_m\| \\ &\leqslant \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|x_1\| \, ... \, \|x_m\| \end{aligned}$$

Donc

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leqslant 1} \|T(x_1, ..., x_m)\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{M}}$$

■

Proposition 3.3.2 *Soit $\mathcal{M}$ un idéal normé des applications multilinéaires, pour $\varphi_j \in X_j^*$, $y \in Y$ et $T = \varphi_1(\cdot)...\varphi_m(\cdot)y = \varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_m y \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ on a:*

$$\|T\|_{\mathcal{M}} = \|T\| = \|y\| \, \|\varphi_1\| \, ... \, \|\varphi_m\|$$

Preuve. Comme $T(x_1, ..., x_m) = \varphi_1(x_1) ... \varphi_m(x_m) \, y$, on a

$$\begin{aligned} \|T(x_1, ..., x_m)\| &= \|\varphi_1(x_1) ... \varphi_m(x_m) \, y\| \\ &= |\varphi_1(x_1) ... \varphi_m(x_m)| \, \|y\| \\ &= |\varphi_1(x_1)| \, ... \, |\varphi_m(x_m)| \, \|y\| \end{aligned}$$

$$\sup_{\|x_j\| \leqslant 1} \|T(x_1, ..., x_m)\| = \|\varphi_1\| \, ... \, \|\varphi_m\| \, \|y\|$$

donc

$$\|T\| = \|y\| \, \|\varphi_1\| \, ... \, \|\varphi_m\|$$

on a : $T = v \circ id_{\mathbb{K}^m}(\varphi_1, ..., \varphi_m)$, où $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; Y)$, $v(\alpha) = \alpha y$, $T \in \mathcal{M}$ et $id_{\mathbb{K}^m} \in \mathcal{M}$. Alors

$$\|T\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|v\| \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\| \leqslant \|y\| \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\| .$$

Donc

$$\|T\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|T\| .$$

D'autre part d'après la proposition 3.3.1 on a :

$$\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{M}} .$$

D'où

$$\|T\|_{\mathcal{M}} = \|T\| = \|y\| \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\| .$$

■

3.4 Les opérateurs m-linéaires $(p_1,...,p_m)$-dominés

Définition 3.4.1 *(opérateur m-linéaire $(p_1,...,p_m)$-dominé) Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq p_1,...,p_m \leq \infty$ *avec* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$.*Soit* $T \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ *un opérateur m-linéaire borné .On dit que* T *est* $(p_1,...,p_m)$*-dominés s'il existe une constante* C *telle que*

pour tous $x_i^j,...,x_n^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$,*on a*

$$\left\| \left(T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{p_j,\omega} \tag{3.4.1}$$

La classe des opérateurs m-linéaires $(p_1,...,p_m)$*-dominés de* $X_1,...,X_m$ *dans* Y *,notée* $\mathcal{L}_{d(p_1,...,p_m)}(X_1,...,X_m;Y)$, *et on note*

$$\|T\|_{d(p_1,...,p_m)} = \inf\left\{C \text{ vérifiant l'inégalite } (3.4.1)\right\}$$

Proposition 3.4.1 *(Théorème d'inclusion) Soient* $p_1 < p_2$, $t_j \leq s_j$ $1 \leq j \leq m$ *alors*

$$\mathcal{L}_{d(t_1,...,t_m)}(X_1,...,X_m;Y) \subset \mathcal{L}_{d(s_1,...,s_m)}(X_1,...,X_m;Y)$$

Proposition 3.4.2 $\left(\mathcal{L}_{d(p_1,...,p_m)}(X_1,...,X_m;Y), \|\cdot\|_{d(p_1,...,p_m)}\right)$ *est un idéal de Banach .*

3.4.1 Théorème de domination

On présente maintenant le théorème de domination.Avant ceci, on donne le lemme de kay fan

lemme de Ky Fan

Lemme 3.4.1 *Soient E un espace véctorielvectoriel topologique séparé,C une partie convexe compacte de E. Soit M un ensemble du fonctins définit sur C à valeurs dans $[-\infty;+\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes:*

a. *Tout $f \in M$ est convexe et semi-continue inférieurement.*

b. *Si $g \in conv\,(M)$,il existe $f \in M$ telle que $g\,(x) \leq f\,(x)\,, \forall x \in C$.*

c. *Il existe $r \in \mathbb{R}$ telle que pour toute $f \in M$ prend une valeur $\leq r$.*

Alors il existe $x_0 \in C$ telle que $f\,(x_0) \leq r$, $\forall\ f \in M$.

Théorème 3.4.1 *(théorème de Domiation de Pietsch) Soient $0 \leq p, p_1, ..., p_m < \infty$,avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$, un opérateur $T : X_1, ..., X_m \to Y$ est $(p_1, ..., p_m)$-dominé si et seulement s'il existe $C > 0$, et des mesures de probabilités de radon $\mu_j \in C\left(B_{X_j^*}\right)^*$,$(1 \leq j \leq m)$ telle que pour toute $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$*

$$\left\|T\left(x^1,...,x^m\right)\right\| \leq C\prod_{j=1}^{m}\left(\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}} \tag{3.4.2}$$

Preuve. $(\Leftarrow)$Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p &\leq C^p \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}} \right]^p \\
\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \mathbf{C} \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}} \right]^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}} \right) \\
&\leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&\leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&\leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{p_j,\omega}
\end{aligned}$$

Donc T est $(p_1,...,p_m)$-dominé et $\|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \leq C$

$(\Longrightarrow)$On supposson que T est $(p_1,...,p_m)$-dominé

On considére C l'ensemble des probabilités de Radon μ_j sur $C\left(B_{X_j^*}\right)$.Soit M un ensemble des fontions

définies sur C a valeur dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f\left(\mu_1,...,\mu_m\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right\} \quad (3.4.3)$$

(a) Soit $f \in M$,est continue alors est semi continue infireurement évident ,on montrer que f est convexe

Soient $\mu = (\mu_1,...,\mu_m)$; $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ et $\alpha \in]0,1[$

$$f\left(\alpha\mu_1+(1-\alpha)\lambda_1,...,\alpha\mu_m+(1-\alpha)\lambda_m\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{p}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p-C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\left(\alpha\mu_j+(1-\alpha)\lambda_j\right)\left(\varphi_j\right)\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{p}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p-\alpha C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\\ -(1-\alpha)C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\lambda_j\left(\varphi_j\right)\end{array}\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c}\frac{\alpha+(1-\alpha)}{p}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p-\alpha C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\\ -(1-\alpha)C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\lambda_j\left(\varphi_j\right)\end{array}\right\}$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{p}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p-C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right\}+$$
$$(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{p}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p-C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\lambda_j\left(\varphi_j\right)\right\}$$
$$=\alpha f(\mu)+(1-\alpha)f(\lambda)$$

Donc f est convexe.

(b)Il suffit de voir que M est convexe. Soient f, g dans M telles que

$$\alpha f\left(\mu_1,...,\mu_m\right)=\sum_{i=1}^{k_1}\left\{\frac{1}{p}\left\|T\left(\alpha^{\frac{1}{p_1}}x_i^{\prime 1},...,\alpha^{\frac{1}{p_m}}x_i^{\prime m}\right)\right\|^p-C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle\alpha^{\frac{1}{p_j}}x_i^{\prime j},\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right\}$$

$$(1-\alpha)g\left(\mu_1,...,\mu_m\right)=\sum_{i=1}^{k_2}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{p}\left\|T\left((1-\alpha)^{\frac{1}{p_1}}x_i^{\prime\prime 1},...,(1-\alpha)^{\frac{1}{p_m}}x_i^{\prime\prime m}\right)\right\|^p\\ -C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle(1-\alpha)^{\frac{1}{p_j}}x_i^{\prime\prime j},\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\end{array}\right\}$$

$$\left(\alpha f+(1-\alpha)g\right)\left(\mu_1,...,\mu_m\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{p}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p-C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_i^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right\}$$

avec $n=k_1+k_2$

$$x_i^j=\left\{\begin{array}{ll}\alpha^{\frac{1}{p_j}}x_i^{\prime j} & si\ 1\leq i\leq k_1\\ (1-\alpha)^{\frac{1}{p_j}}x_i^{\prime\prime j} & si\ \ k_1+1\leq i\ \leq n\end{array}\right\}$$

(c) Montrons que $r=0$ vérifie la condition (c).Soient $\varphi_j^0 \in B_{X_j^*}$ $(1 \leq j \leq m)$

$$\sup_{\|\varphi_j\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j^0 \right\rangle \right|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Soient $\delta_{\varphi_1^0},...,\delta_{\varphi_m^0}$ les mesures de Dirac portées par $\varphi_1^0,...,\varphi_m^0$

$$\begin{aligned}
f\left(\delta_{\varphi_1^0},...,\delta_{\varphi_m^0}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int\limits_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\delta_{\varphi_j^0}\left(\varphi_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_j} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j^0 \right\rangle \right|^{p_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \left\| \left(x_i^j\right) \right\|_{p_j,\omega}^{p_j} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \frac{1}{p} \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right) \right\|_{p_j,\omega}^{p} \leq 0
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Ky Fan, il existe $(\mu_1,...,\mu_m) \in C$ telles que $f\left(\delta_{\varphi_1^0},...,\delta_{\varphi_m^0}\right) \leq 0$ pour toute $f \in M$ .Si on prend $x=(x^1,...,x^m) \in X_1 \times ...X_m$ on a

$$f\left(\mu_1,...,\mu_m\right) = \frac{1}{p} \left\| T\left(x^1,...,x^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int\limits_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j$$

$$\frac{1}{p} \left\| T\left(x^1,...,x^m\right) \right\|^p \leq C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int\limits_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j \tag{3.4.4}$$

Posons pour $(1 \leq j \leq m)$

$$\alpha_j = \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

En remplaçant le vecteur $(x^1,...,x^m)$ par $\left(\frac{x^1}{\alpha_1},...,\frac{x^m}{\alpha_m}\right)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \left\| T\left(\frac{x^1}{\alpha_1},...,\frac{x^m}{\alpha_m}\right) \right\|^p &\leq C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int\limits_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle \frac{x^j}{\alpha_j}, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j \\
&\leq C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \frac{1}{\alpha_j^{p_j}} \int\limits_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\| T\left(\frac{x^1}{\alpha_1}, ..., \frac{x^m}{\alpha_m}\right)\right\|^p \leq C$$

D'où

$$\left\| T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

■

3.4.2 Théorème de factorisation

Théorème 3.4.2 *(Théorème de factorisation) Soient* $1 \leq p, p_1, ..., p_m < \infty$ *avec* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. *Alors* $T \in \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ *est* $(p_1, ..., p_m)$*-dominé si seulement il existe des espaces de Banach* $G_1, ..., G_m$, $u_j \in \Pi_{p_j}\left(X_j; G_j\right)$ *des opérateurs linéaires absoulement* p_j-*sommants,* $S \in \mathcal{L}\left(G_1, ..., G_m; Y\right)$ *un opérateur m-linéaire tels que*

$$T = S \circ \left(u_1, ..., u_m\right)$$

de plus

$$\|T\|_{d(p_1, ..., p_m)} = \inf\left\{ \|S\| \prod_{j=1}^{m} \pi_{p_j}\left(u_j\right) \ : T = S \circ \left(u_1, ..., u_m\right)\right\}$$

Preuve. $(\Leftarrow)$Soit $\left(x^1, ..., x^m\right) \in X_1 \times ... \times X_m$

Nous avons

$$\begin{aligned} \left\| T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| &= \left\| S\left(u_1\left(x^1\right), ..., u_m\left(x^m\right)\right)\right\| \\ &\leq \|S\| \prod_{j=1}^{m} \left\| u_j\left(x^j\right)\right\| \end{aligned}$$

Nous savons que, $\left(1 \leq j \leq m\right), u_j \in C\left(B_{X^*}\right)^*$ tel que

$$\left\| u_j\left(x^j\right)\right\| \leq \pi_{p_j}\left(u_j\right) \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

maintenant nous avons

$$\left\| T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq \|S\| \prod_{j=1}^{m} \pi_{p_j}\left(u_j\right) \prod_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Donc T est $(p_1, ..., p_m)$-dominé

et

$$\|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \leq \|S\| \prod_{j=1}^{m} \pi_{p_j}(u_j).$$

$(\Rightarrow)$On prend $T \in \mathcal{L}_{d(p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m; Y)$ puis de théorème 3.4.1 il existe des mesures de probabilités $\mu_j \in C\left(B_{X_j^*}\right)^*, (1 \leq j \leq m)$

tel que pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j(\varphi_j) \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Maintenant, nous considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} u_j \quad &: \quad X_j \to L_{p_j}(\mu_j) \\ x^j \quad &\to \quad u_j\left(x^j\right) := \left\langle x^j, . \right\rangle \end{aligned}$$

On remarque que

$$\left\|\left\langle x^j, . \right\rangle\right\| = \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} = \left\|x^j\right\| \quad \forall x^j \in X_j \;, 1 \leq j \leq m$$

on a

$$\left\|u_j\left(x^j\right)\right\| = \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_k^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j \right)^{\frac{1}{p_j}},$$

Notez que u_j est absoulement p_j- sommants avec $\pi_{p_j}(u_j) \leq 1$.

Soit l'operateur S_0 est défini sur $u_1(X_1) \times ... \times u_m(X_m)$ par :

$$S_0\left(u_1\left(x^1\right), ..., u_m(x^m)\right) := T\left(x^1, ..., x^m\right)$$

on montre que S_0 est bien définie et continue, alors ona

$$\left\|S_0\left(u_1\left(x^1\right), ..., u_m(x^m)\right)\right\| \leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

on fixe $j=1$ et $\varepsilon>0$..Alors il existe $(x_k^1)_{k=1}^n \subset X_1$tel que $x^1=\sum\limits_{k=1}^n x_k^1$ et

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{B_{X_1^*}} \left|\left\langle x_k^1,\varphi_1\right\rangle\right|^{p_1} d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \varepsilon + \left\|\left[\left\langle x^1,.\right\rangle\right]\right\|_{p_1}$$

on a

$$\begin{aligned}
\left\|S_0\left(u_1\left(x^1\right),...,u_m\left(x^m\right)\right)\right\| &= \left\|S_0\left(u_1\left(\sum_{k=1}^n x_k^1\right),...,u_m\left(x^m\right)\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left\|S_0\left(u_1\left(x_k^1\right),...,u_m\left(x^m\right)\right)\right\| \\
&\leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \sum_{k=1}^n \left(\int_{B_{X_1^*}} \left|\left\langle x_k^1,\varphi_1\right\rangle\right|^{p_1} d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\quad \times \prod_{j=2}^m \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&\leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \left(\varepsilon + \left\|\left[\left\langle x^1,.\right\rangle\right]\right\|_{p_1}\right) \prod_{j=2}^m \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\right)^{\frac{1}{p_j}}
\end{aligned}$$

on peut écrire,le même resultat de domination, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|S_0\left(u_1\left(x^1\right),...,u_m\left(x^m\right)\right)\right\| &\leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \left(\varepsilon + \left\|\left[\left\langle x^1,.\right\rangle\right]\right\|_{p_1}\right) \left(\varepsilon + \left\|\left[\left\langle x^2,.\right\rangle\right]\right\|_{p_2}\right) \\
&\quad \times \prod_{j=3}^m \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\right)^{\frac{1}{p_j}}
\end{aligned}$$

Par inclusion, on trouve

$$\left\|S_0\left(u_1\left(x^1\right),...,u_m\left(x^m\right)\right)\right\| \leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \prod_{j=1}^m \left(\varepsilon + \left\|\left[\left\langle x^j,.\right\rangle\right]\right\|_{p_j}\right)$$

Comme ceci est vérifie pour tout $\varepsilon>0$, on obtient

$$\left\|S_0\left(u_1\left(x^1\right),...,u_m\left(x^m\right)\right)\right\| \leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \prod_{j=1}^m \left\|\left[\left\langle x^j,.\right\rangle\right]\right\|_{p_j} \tag{3.4.5}$$

S_0 est bien défini pour applications bilinear

$$S_0 : u_1(X_1) \times u_2(X_2) \to Y$$

assume que $(x^1, x^2), \left(x'^1, x'^2\right) \in X_1 \times X_2$ satisfie que

$$\left(u_1\left(x^1\right), u_2\left(x^2\right)\right) = \left(u_1\left(x'^1\right), u_2\left(x'^2\right)\right).$$

on suivit $\left\|u_j\left(x^j - x'^j\right)\right\|_{p_j} = \left\|u_j\left(x^j\right) - u_j\left(x'^j\right)\right\|_{p_j} = 0$ avec $j = 1, 2$
on a $T\left(x^1, x^2\right) = T\left(x'^1, x'^2\right)$ (et alors S_0 est bien définit)
Par l'inégalite (3.4.5) on a

$$\begin{aligned}
& \left\|T\left(x^1, x^2\right) - T\left(x'^1, x'^2\right)\right\| \\
= & \left\|T\left(x^1, x^2\right) - T\left(x'^1, x^2\right) + T\left(x'^1, x^2\right) - T\left(x'^1, x'^2\right)\right\| \\
\leq & \left\|T\left(x^1 - x'^1, x^2\right)\right\| + \left\|T\left(x'^1, x^2 - x'^2\right)\right\| \\
\leq & \|T\|_{d(p_1,p_2)} \left\|u_1\left(x^1 - x'^1\right)\right\|_{p_1} \left\|u_2\left(x^2\right)\right\|_{p_2} \\
& + \|T\|_{d(p_1,p_2)} \left\|u_1\left(x'^1\right)\right\|_{p_1} \left\|u_2\left(x^2 - x'^2\right)\right\|_{p_2}. \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

Aussi l'inégalite (3.4.5)donne la continute de S_0 sur $u_1(X_1) \times ... \times u_m(X_m)$ .et admet une extension unique S à $\overline{u_1(X_1)} \times ... \times \overline{u_m(X_m)} = G_1 \times .... \times G_m$;avec

$$G_j := \overline{u_j(X_j)} = L_{p_j}\left(\mu_j\right), 1 \leq j \leq m$$

De plus on a

$$\|S\| = \|S_0\| \leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)}$$

Finalement, $T = S \circ (u_1, ..., u_m)$, où $u_j \in \Pi_{p_j}(X_j; G_j)$,$(1 \leq j \leq m)$, $S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ et

$$\|S\| \prod_{j=1}^{m} \pi_{p_j}(u_j) \leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Bibliographie

[1] J. Cohen. Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

[2] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

[3] S. Geiss. Ideale multilinearer Abbildungen. Diplomarbeit (1984).

[4] A. Grothendieck. Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

[5] M.C. Matos. Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

[6] A. Pietsch. Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.

[7] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals (designs of a theory). In: Proceedings of the Second International conference on operator algebras, ideals, and their applications intheoretical physics (Leipzig, 1983), 185–199, Teubner, Leipzig

[8] I. Sandberg. Multilinear maps and uniform boudedness. IEEE Transactions Circuits and Systems, 32 (1985) 332-336.