*TD N°2(***Intégrales Impropres***)*

Exercice N° 1: Classer les intégrales impropres suivantes selon leurs espèces et dire si sont –elles convergentes :

$$\int_2^{10} \frac{dx}{(x-2)^2} \; ; \int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \; ; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} \; ; \int_0^1 (x+1)\ln x\,dx$$

Exercice N° 2:

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{3x^4+5x^2+1} \; ; \; \int_2^{+\infty} \frac{x^2-1\,dx}{\sqrt{x^6+16}} \; ; \; \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Exercice N°3 :

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+|\cos x|} \; ; \int_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x+1} \; ; \; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \; ; \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \; ; \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Exercice N°4:

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}\,dx \; ; \; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1}\,dx$$

Exercice N°5:

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \ln x\,dx \; , \int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}} \; ; \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \; , \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx \; , \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

Exercice N° 1: Classer les intégrales impropres suivantes selon leurs espèces et dire si sont –elles convergentes :

$$\int_2^{10} \frac{dx}{(x-2)^2} ; \int_0^{\pi} \frac{1-cosx}{x^2} dx ; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} ; \int_0^1 (x+1)\ln x dx$$

Solution :

1) La fonction $\frac{1}{(x-2)^2}$ n'est pas bornée en $x_0 = 2 \in [2,10]$ alors l'intégrale $\int_2^{10} \frac{dx}{(x-2)^2}$ est impropre de second espèce en $x_0 = 2$, et on a :

$$\int_2^{10} \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{M\to 2} \left|\frac{-1}{(x-2)}\right|_M^{10} = +\infty$$

Alors ***l'intégrale est divergente.***

2) On remarque que $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{2} = \frac{1}{2} (\neq \infty)$, alors $x_0 = 0$ est une fausse singularité, par conséquent $\int_0^{\pi} \frac{1-cosx}{x^2} dx$ est ***une intégrale propre***

3) La fonction $\frac{1}{1+e^x}$ est définie sur $\in [0, +\infty[$ alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$ est impropre de premier espèce, et on fait le changement de variable $t = e^x$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \lim_{M\to +\infty} \left|\ln \frac{t}{(t+1)}\right|_1^M = \ln 2$$

Alors ***l'intégrale est convergente***.

4) La fonction $(x+1)\ln x$ n'est pas bornée en $x_0 = 0 \in [0,1]$ alors l'intégrale $\int_0^1 (x+1)\ln x dx$ est impropre de second espèce en $x_0 = 0$, et intègre par partie on trouve :

$$\int_0^1 (x+1)\ln x dx = \lim_{M\to 0} \left|\ln x \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\right|_M^1 = +\infty$$

Alors ***l'intégrale est divergente.***

Exercice N° 2:

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{3x^4+5x^2+1} ; \int_2^{+\infty} \frac{x^2-1dx}{\sqrt{x^6+16}} ; \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Solution :

1) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{3x^4+5x^2+1}$ est impropre de premier espèce, en utilisant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [0, +\infty[: \lim_{x\to +\infty} x^p \times \frac{x}{3x^4+5x^2+1} = k \quad \left(en\ prenand\ p = 3 > 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \neq \infty\right)$$

Alors ***l'intégrale est convergente.***

2) l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est impropre de premier espèce, en utilisant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [2,+\infty[: \lim_{x\to+\infty} x^p \times \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}} = k \quad (en\ prenand\ p = 1 \Rightarrow k = 1 \neq 0)$$

Alors ***l'intégrale est divergente.***

3) l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{x^2-1dx}{\sqrt{x^6+16}}$ est impropre de premier espèce, en utilisant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [0+\infty[: \lim_{x\to+\infty} x^p \times e^{-x^2} = k \quad (en\ prenand\ p = 2 > 1 \Rightarrow k = 0 \neq \infty)$$

Alors ***l'intégrale est convergente.***

Exercice N°3 :

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+|\cos x|}\ ;\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x+1}\ ;\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx\ ;\ \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ ;\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}} dx$$

Solution :

1) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+|\cos x|}$ est impropre de premier espèce, on a par comparaison :

$$\forall x \in [0,+\infty[: \frac{1}{2+|\cos x|} \geq \frac{1}{3}$$

$$et\ on\ a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{3} = +\infty(\ intégrale\ divrgnte)$$

Alors par comparaison ***l'intégrale*** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+|\cos x|}$ ***est divergente.***

2) l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x+1}$ est impropre de premier espèce, en utilisant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [1,+\infty[: \lim_{x\to+\infty} x^p \times \frac{\ln x}{x+1} = k \quad (en\ prenand\ p = 1 \Rightarrow k = +\infty \neq 0)$$

Alors ***l'intégrale*** $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x+1}$ ***est divergente.***

3) On a

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1-\cos x}{x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx}_{I_2}$$

Pour I_1on fait le changement de variable $y = -x \Longrightarrow I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos y}{y^2} dy = I_2$ par conséquent

$I = I_1 + I_2 = 2I_2$

Et on a aussi : $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2} dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

On a déjà vu d'après l'exercice1 que l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ est une intégrale propre ; et on a

$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ est une intégrale impropre de premier espèce, on a par comparaison :

$$\forall x \in [\pi,+\infty[: 0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

$et\ on\ a \int_{\pi}^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx == \lim_{M\to+\infty} \left|\frac{-2}{x}\right|_{\pi}^{M} = \frac{2}{\pi} (\ intégrale\ convergnte)$

Alors par comparaison ***l'intégrale*** $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1-cosx}{x^2} dx$ ***est convergente alors,*** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-cosx}{x^2} dx$ *est* ***également convergente.***

4) l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est impropre de premier espèce, en utilisant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [1,+\infty[: \lim_{x\to+\infty} x^p \times \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = k \quad (en\ prenand\ p = 2 > 1 \Rightarrow k = 1 \neq \infty)$$

Alors ***l'intégrale*** $\int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ ***est convergente.***

5) $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{sinx}}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale impropre de premier espèce, on a par comparaison :

$$\forall x \in [1,+\infty[: \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^{sinx}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^{+1}}{\sqrt{x}}$$

$$et\ on\ a \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{M\to+\infty} \left|2e^{-1}\sqrt{x}\right|_{1}^{M} = +\infty(\ intégrale\ divergnte)$$

Alors par comparaison ***l'intégrale*** $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{sinx}}{\sqrt{x}} dx$ ***est convergente***

Exercice N°4:

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x} dx \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1} dx$$

Solution :

1) On fait le $changement\ de\ variable\ x = -y$

$$I = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x} dx = \int_{1}^{+\infty} -\frac{e^{-y}}{y} dy$$

On étudié alors la convergence absolue c-à-dire $\int_{1}^{+\infty} \left|-\frac{e^{-y}}{y}\right| dy = \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$

Et en appliquant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [1,+\infty[: \lim_{y\to+\infty} y^p \times \frac{e^{-y}}{y} = k \quad (en\ prenand\ p = 2 > 1 \Rightarrow k = 0 \neq \infty)$$

Alors l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ est convergente ; alors l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} -\frac{e^{-y}}{y} dy$ est absolument convergente par conséquent $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}$ ***dx est convergente.***

2) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3+x^2}{x^4+1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1}\,dx}_{I_2}$$

Pour I_1on fait le changement de variable $y=-x \Rightarrow I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{-y^3+y^2}{y^4+1}dy = \int_0^{+\infty} \frac{-x^3+x^2}{x^4+1}dx$ par conséquent

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{-x^3+x^2}{x^4+1}dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1}\,dx$$

Dont l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1}\,dx$ est impropre de premier espèce, en utilisant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [0,+\infty[: \lim_{x\to+\infty} x^p \times \frac{2x^2}{x^4+1} = k \quad (en\ prenand\ p = 2 > 1 \Rightarrow k = 2 \neq \infty)$$

Alors ***l'intégrale*** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1}$ ***dx est convergente.***

Exercice N°5:

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \ln x\,dx; \int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}\,;\ \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}\ ,\ \int_0^{\pi} \frac{sinx}{x^3}dx\ ,\ \int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}dx$$

Solution :

1) La fonction $\ln x$ n'est pas bornée en $x_0 = 0$lors l'intégrale$\int_0^1 \ln x$; est impropre en$x_0 = 0$, et on intègre par partie on trouve :

$$\int_0^1 \ln x dx = |x \ln x - x|_0^1 = -1$$

Alors l'intégrale $\int_0^1 \ln x\, dx$ ***est convergente.***

2) La fonction$\frac{1}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}$ n'est pas bornée en $x_1 = 0 \notin [2,3]\ et x_2 = 2 \in [2,3]$ alors l'intégrale $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}$ est impropre de second espèce en$x_2 = 2$, et on a :

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}} = \int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-2)^{\frac{2}{3}}(x^2+2x+4)^{\frac{2}{3}}}$$

Et en appliquant le critère de Riemann (pour les intégrales impropres de second espèce) :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} (x-2)^p \times \frac{1}{x^{2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{\substack{> \\ x\to 2}} (x-2)^p \times \frac{1}{x^2(x-2)^{\frac{2}{3}}(x^2+2x+4)^{\frac{2}{3}}} = k$$

$$\left(on\ prend\ p = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow k = \frac{1}{48} \neq \infty\right)$$

Alors l'intégrale $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}$ ***est convergente.***

3) La fonction $\frac{1}{\sqrt{(5-x)}(x-1)}$ n'est pas bornée en $x_1 = 1\ et x_2 = 5$ alors l'intégrale $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}$ est impropre de second espèce à la fois en $x_1 = 1\ et x_2 = 5$, et on a :

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)}(x-1)} = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)}(x-1)}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)}(x-1)}}_{I_2}$$

- Pour I_1 impropre en $x_1 = 1$

Et en appliquant le critère de Riemann (pour les intégrales impropres de second espèce) :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} (x-1)^p \times \frac{1}{\sqrt{(5-x)}(x-1)} = k$$

$$\left(on\ prend\ p = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \neq 0\right)$$

Alors l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)}(x-1)}$ ***est divergente.***

- Pour I_1 impropre en $x_2 = 5$

Et en appliquant le critère de Riemann (pour les intégrales impropres de second espèce) :

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 5}} (5-x)^p \times \frac{1}{\sqrt{(5-x)}(x-1)} = k$$

$$\left(on\ prend\ p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4} \neq \infty\right)$$

Alors l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)}(x-1)}$ ***est convergente, par conséquent l'intégrale*** $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)}(x-1)}$***est divergente.***

4)La fonction $\frac{sinx}{x^3}$ n'est pas bornée en $x_0 = 0$ alors l'intégrale $\int_0^\pi \frac{sinx}{x^3} dx$ est impropre de second espèce en $x_0 = 0$, en appliquant le critère de Riemann (pour les intégrales impropres de second espèce) :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} (x-0)^p \times \frac{sinx}{x^3} = k$$

$$(on\ prend\ p = 2 > 1 \Rightarrow k = 1 \neq 0)$$

Alors *l'intégrale* $\int_0^\pi \frac{sinx}{x^3} dx$ ***est divergente.***

5) Pour l'intégrale $\int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{1-x}} dx$, on remarque $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{lnx}{\sqrt{1-x}} = 0$(x=1 est une fausse singularité), alors La fonction $\frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$ n'est pas bornée seulement en $x_0 = 0$ alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{1-x}} dx$ est impropre de second espèce en $x_0 = 0$, en appliquant le critère de Riemann (pour les intégrales impropres de second espèce) :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} (x-0)^p \times \frac{lnx}{\sqrt{1-x}} = k$$

$$\left(on\ prend\ p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow k = 0 \neq \infty\right)$$

Alors ***l'intégrale*** $\int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$ ***dx est convergente.***