Université de M'sila. 2019/2020
Département des Sciences Techniques
$1^{\text{ière}}$année ST

Série d'exercices N°02(Maths1)

a/ Théorie des ensembles

Exercice 01

Soit E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E.Montrer que

1. $A \subset B \Longleftrightarrow B_E^c \subset A_E^c$
2. $A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A \subset B_E^c$
3. $(A \cap B)_E^c = A_E^c \cup B_E^c$
4. $A \cup (A_E^c \cap B) = A \cup B$

Exercice 02

Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que:

$$(a)\ (A \setminus B)^c = A^c \cup (A \cap B); \qquad (b)\ A \cap B = A \setminus (A \setminus B)\,;$$
$$(c)\ A \cap B = \phi \Longleftrightarrow B_E^c \cap (A \cup B) = A; \qquad (d)\ A_E^c \vartriangle B_E^c = A \vartriangle B.$$

Exercice 03

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. Donner l'ensemble E^2
2. Trouver l'ensemble $F \subset E^2$ définit par la relation $(y : x)$ y devise x

b/ Les applications

Exercice 01

Soient E_1, et E_2 deux ensembles, A_1, A_2 deux sous-ensembles de E_1 et B_1, B_2 deux sous-ensembles de E_2, et soit f une application de E_1 dans E_2. Montrer que:

1. $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ et $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ si f est injective.
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f(B_2)$

Exercice 02

Soient les deux applications suivantes

$$\begin{cases} f :]2,\infty[\longrightarrow]2,\infty[\\ x \longrightarrow f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2} \end{cases}, \begin{cases} g :]2,\infty[\longrightarrow]2,\infty[\\ x \longrightarrow g(x) = x^2 - 2 \end{cases}$$

1. Déterminer $g(]3,4])$, et $g^{-1}(]4,5])$
2. Montrer que f et g sont bijectives.
3. Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles bijectives?
4. Déterminer f^{-1}, g^{-1}, $(g \circ f)^{-1}$, $(f \circ g)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$, $g^{-1} \circ f^{-1}$.
5. Que remarquez-vous?

c/Relations binaires

Exercice 01

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et soit S une relation dans $\mathbb{R}$ définie par

$$xSy \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

1. Montrer que S est une relation d'équivalence
2. Discuter selon la valeur de m la classe d'équivalence de m.

Exercice 02

Soit $\Re$ une relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x, y) \Re (x', y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre. (est ce qu'il est total?).
2. Donner $\sup A$, $\inf A$, et $\max A$, $\min A$ où $A = \{(1,2)\,,\ (3,1)\}$
3. L'ensemble A est-il majoré, minoré?

Exercice 03

Soit T une relation binaire sur $\mathbb{R}^*$, définie par: $xTy \Longleftrightarrow x.y > 0$

1. Montrer que T est une relation d'équivalence.

2 Trouver les classes d'équivalence de cette relation