Université de M'sila 2020/2021
Département des Sciences Techniques
1[ière]année ST

Série d'exercices N°03(Math1),(Les fonctions réelles d'une variable réelle)

Exercice 01

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin px}{\sin qx}\right);\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\right);\quad \lim_{x\to \pi}\left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right);\quad \lim_{x\to 0}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

Exercic 02

Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 0\\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x>0\end{cases},$$

$$h(x)=\begin{cases} 1-\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Exercice 03

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ \alpha x+2 & \text{si } 1<x\leq 2\end{cases}$

1. Déterminer la valeur α pour que f soit continue au point $x_0=1$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition (pour la valeur de α trouvée)

Exercice04

1. Montrer que:

a) $\arg\cosh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, pour tout $x\geq 1$,

b) $\arg\tanh(x)=\frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, pour tout $x\in\,]-1,1[$.

c) $\forall x\in\,]-1,1[\,:\cos(\arcsin(x))=\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$.

2 Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle $f(x)=\arcsin\left(2x^2\right)$, puis trouver $f^{/}(x)$.

Exercice06

1. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes (quand $x\to 0$):
$$\frac{x}{(1+x^n)-1},\qquad \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}},\qquad \frac{1-\cos x}{\tan x}.$$
2. Calculer les limites suivantes en utilisant le développement limité

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x},\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sinh x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice07

Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes

1. $(1+\arctan x)(e^x+2\sin x)$ (ordre 3)
2. $(1+2\cos(2x))(x-\ln(1+x)$ (ordre 5)
3. $\dfrac{1+\arctan x}{x^{\cos x}}$ (ordre 4)
4. $\dfrac{x^{\cos x}}{e^x-1}$ (ordre 5)
5. $\dfrac{\ln(1+x^3)}{x-\sin x}$ (ordre 3)
6. $\sqrt{1+2\cos x}$ (ordre 2)
7. $e^{\sqrt{1+2\cos x}}$ (ordre 2)
8. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (ordre 2)
9. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ (ordre 4)
10. $\sqrt[3]{1+\ln(1+x)}$ (ordre 3)
11. $\cos(e^{\frac{x}{\cos x}})$ (ordre 4)

Exercice08

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction f définie par

$$f(x)=(1+x)^{\dfrac{1}{\sin x}}$$

Exercice09

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{e^{e^x}-e^{e^{-x}}}{\ln(1+x)}$$

Exercice10

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{e^{(\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{x^2}{\sin x})}-e}{\ln(1+x)}$$

Exercice11

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{4}$de la fonction $f(x)=(\tan x)^{\tan(2x)}$