Table des matières

0.1 Introduction

Dans cas d'un polynôme P de degré n, la connaissance de la valeur de P et de ses dérivées jusqu'a l'ordre n en un point a permet déterminer P en tout point $(x = a + h) \in \mathbb{R}$, cette propriétés n'est plus vérifiée pour une fonction quelconque. la connaissance de la valeur de f et de ses dérivées jusqu' à l'ordre n en un point a permet seulement de connaitre une approximation de la valeur de $f(a+h)$ a l'ordre n en a (on verra une définition précise de cette expression plus loin), en la confondant avec la valeur en d'un polynôme P_n appelé "partie régulière" de sa formule de Taylor. En analyse la formule de Taylor-Lagrange, de nom du Mathématicien Brook-Taylor (1685-1731), qui l'établir en 1712 donne une approximation d'une fonction plusieurs fois dérivables au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendant uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Dans notre mémoire on va commencer par la théorie de comparaison des fonctions au voisinage d'un point et notation de Landau, et après on présente la formule de Taylor et ses concepts différents, le deuxième chapitre contient le concept de développements limités(DL), et la formule de Taylor-Young avec les (DL) de quelques fonctions usuelles et en fin on va présenter quelques applications des (DL)..

Chapitre 1

Formule de Taylor

1.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Dans ce qui suit, D désigne toujours une partie infinie de $\mathbb{R}$,et a un point d'accumulation de D dans $\bar{\mathbb{R}}(a \in \bar{\mathbb{R}})$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,et f et g des fonctions définies au voisinage de a dans D , à valeurs respectivment dans K^N et dans $K^{N'}$

a)On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a (ou que f est au plus de l'ordre de voisinage de a) ssi il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et un voisinage V de a ,de définition pour f et g tels que:

$$\forall x \in D \cap V \quad v(f(x)) \leq Mv'(g(x)), \quad v \text{ et } v' \text{ sont les normes associes}$$

On écrit alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\leq} g(x), \text{ou } f \underset{a}{\leq} g$$

b)On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a (ou que f est infiniment petite devant g au voisinage de a) ssi: pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de a tel que f et g soient définies sur $D \cap V$ et vérifient

$$(\forall x \in D \cap V) \;\; v(fx)) \leq \varepsilon v'(g(x))$$

On écrit alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x), \text{ou } \; f \underset{a}{\ll} g$$

1.1.1 Notation de Landau

On note par $\mathcal{F}_D(a, K^N)$ l'ensemble des fonctions f à valeurs dans K^N et définies sur un ensemble de la forme $V \cap D$ où V est la voisinage de a dans $\overline{\mathbb{R}}$

Dans la définition 1, fixons $N, N\prime$ et g.L'ensemble des $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$ qui sont au plus de l'ordre de g (resp.infiniment petites devant g) au voisinage de a est désigné par $O_a(g)$ (resp. $o_a(g)$),ou plus brièvement si aucune confusion n'est possible par $O(g)$ (resp.$o(g)$).

Grace à cette notation (due à landau), la relation $f \leq g$ s'écrit:

$f \in O_a(g)$,ou $f \underset{a}{\in} O(g)$, ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\in} O(g(x))$. De même la relation $f \underset{a}{\ll} g$ s'écrit:

$$f \in o_a(g), \text{ou } f \underset{a}{\in} o(g), \text{ou encore } f(x) \underset{x \to a}{\in} o(g(x)).$$

Bien que l'ensemble $O_a(g)$ dépende de N ,l'écriture $f \in O_a(g)$ ne laisse aucun doute sur l'ensemble dont il sàgit car on sait bien quel est l'espace des valeur pour f.

On rencontre fréquemment l'abus d'écriture consistant à remplacer le signe $\in$ par le signe $=$ dans $f \in O_a(g)$.

Méme si c'est parfois commode nous recommandons d'éviter cet abus car il est bien évident qu'il ne s'agit pas d'une égalite au sens habituel et cela risque déntrainer des erreurs.

1.1.2 Opérations élémentaires concernant o et O

Les assertions ci-aprés se vérifient toutes sans aucune difficulté à partir de la définition 1

1- si $g \in \mathcal{F}_D(a, K^{N'})$ est fixée,ainsi que N, on a: $o_a(g) \subset O_a(g)$.

2-fixons $g \in \mathcal{F}_D(a, K^{N'})$.pour $f_1$et f_2 dans $\mathcal{F}_D(a, K^N)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$:

Si $f_1 \in \underset{a}{O(g)}$ et $f_2 \in \underset{a}{O(g)}$ alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \underset{a}{O(g)}$

Si $f_1 \in \underset{a}{o(g)}$ et $f_2 \in \underset{a}{o(g)}$ alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \underset{a}{o(g)}$

3-pour f, g, et h à valeurs respectivement dans K^N, $K^{N'}, K^{N"}$ et définies au voisinage de a dans D

Si $f \underset{a}{\in} O(g)$ et $g \underset{a}{\in} O(h)$ alors $f \underset{a}{\in} O(h)$

Si $f \underset{a}{\in} O(g)$ et $g \underset{a}{\in} o(h)$ alors $f \underset{a}{\in} o(h)$

Si $f \underset{a}{\in} o(g)$ et $g \underset{a}{\in} O(h)$ alors $f \underset{a}{\in} o(h)$

4- soit f et$g$ valeurs dans K^N et $K^{N'}$ definies dans un voisinage de a supposons que g ne s'annule jamais ou voisinage de a et soit v' une norme standard de $K^{N'}$

(de sorte que $\frac{1}{v'(g)}$est définie au voisinage de a dans D),on a :$f \underset{a}{\in} O(g)$ ssi $\frac{1}{v'(g)}f$ est bornée au voisinage de a.

et $f \underset{a}{\in} O(g)$ ssi $\frac{1}{v'(g(x))}f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

En particulier, pour $N\prime = 1$. ces relations signifient respectivement que $\frac{f(x)}{|g(x)|}$ est bornée au voisinage de a et que$\frac{f(x)}{|g(x)|} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

En notant 1 toute fonction constante égale à 1 , on écrit:

$f \underset{a}{\in} O(1)$ ssi f est bornée au voisinage de a:

$f \underset{a}{\in} O(1)$ ssi $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

5-soit $f_i \in \mathcal{F}_D(a, K)$ et $g_i \in \mathcal{F}_D(a, K)$

avec $i \in \{1, 2\}$si $f_1 \underset{a}{\in} O(f_2)$ et $g_2{\underset{a}{\in}}O(g_2)$, alors $f_1 g_2{\underset{a}{\in}}O(f_2 g_2)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} O(f_2)$ et $g_2 \underset{a}{\in} O(g_2)$, alors $f_1 g_2 \underset{a}{\in} O(f_2 g_2)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} o(f_2)$ et $g_1 \underset{a}{\in} O(g_2)$, alors $f_1 g_1 \underset{a}{\in} o(f_2 g_2)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} O(f_2)$ et $g_1 \underset{a}{\in} o(g_2)$, alors $f_1 g_1 \underset{a}{\in} o(f_2 g_2)$

6-(Composition à droite) Soit $\triangle$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation de $\triangle$ et $\varphi : \triangle \to D$ telle que $\varphi(t) \underset{t\to a}{\to} a$

Si $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$ et $g \in \mathcal{F}_D(a, K^{N/'})$, alors

$$\left(f \underset{a}{\in} O(g)\right) \Rightarrow \left(fo\varphi \underset{a}{\in} O(go\varphi)\right);$$
$$\text{et } \left(f \underset{a}{\in} o(g)\right) \Rightarrow \left(fo\varphi \underset{a}{\in} o(go\varphi)\right)$$

1.L'étude au voisinage de $+\infty$ des fonctions exp,log et $x \to x^\alpha$ nous donne:

Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\in} o(e^x)$ et $\log(x) \underset{x\to+\infty}{\in} o(x^\alpha)$ d'ou en utilisant (**6**) avec $\varphi(t) = \frac{1}{t}$

$\frac{1}{t^\alpha} \underset{t\overset{>}{\to}0}{\in} o(\exp(\frac{1}{t}))$ et $\log(t\ ) \underset{t\overset{>}{\to}0}{\in} o(\frac{1}{t^\alpha})$

2) On a $x^2 \underset{x\to0}{=} o(x), x^3 \underset{x\to0}{=} o'(x^2)$et plus généralement, si $n > p$, alors $x^n \underset{x\to0}{=} o(x^p)$.

En effet, si $n > p$, alors $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^n}{x^p} = \lim\limits_{x\to0} x^{n-p} = 0$

3)Pour tout $\alpha > 0$, on a $\ln x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ x^\alpha e^{-x}) = 0$.

Nous nous intéresserons surtout à des fonctions f négligeables devant x^n

quand x tend vers 0, avec $n \in \mathbb{N}$. On écrira

$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ ou simplement $f(x) = o(x^n)$

Pour$n = 0$, on a$x^0 = 1$, d'où les équivalences :

$f \underset{x\to 0}{=} o(x^n) \Longleftrightarrow f \underset{x\to 0}{=} o(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0. Posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ si $x \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$. Si $f'(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, alors par définition, $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(0) = 0$ Puisque $\varepsilon(0) = 0$.

La fonction ε est continue en 0. Et l'on a l'égalité $f(x) = x^n\ \varepsilon(x)$ pour

tout $x \neq 0$. On en déduit la formulation suivante.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)\text{si et seulement si} \left\{ \begin{array}{c} f(x) = x^n\varepsilon(x) \\ \text{avec } \varepsilon \text{ continue en } 0 \\ \text{et } \varepsilon(0) = 0 \end{array} \right\}$$

1.1.3 Les fontions équivalentes

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de $a \in IR$, sauf éventuellement en a On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a et on écrit $f \sim g$, si g est non nulle au voisinage de a (sauf éventuellement en$a$) et si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Attention

Le fait que $f(a) = g(a)$ n'implique pas que $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1\right)$, un contre-exemple trivial est donné par

$f(x) = x^2, g(x) = x,$

alors $f(0) = g(0)$ et pourtant $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

D'après cette définition, aucune fonction n'est équivalente à la fonction nulle.

L'exemple ci-dessus montre aussi que la relation $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1\right)$ n'est pas équivalente à $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[\omega_0, +\infty[$.

On dit que f et g sont équivalentes quand $x \to +\infty$ (équivalentes au voisinage de l'infini) et on écrit$f \underset{\infty}{\sim} g$ si

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Cette définition n'implique pas que les limites de $f(x)$ et $g(x)$ soient définies

Donnons un contre exemple

$$f(x) = x + 1, \text{ et } g(x) = x$$

alors $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \to 1$ quand $x \to +\infty$

et pourtant ni f ni g n'a de limite quand $x \to +\infty$. Même remarque concernant la définition précédente.

1.2 Formule de Taylor

1.2.1 Théoréme de Rolle

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si f est d´erivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f\prime(c) = 0$.

Preuve. Nous savons que $f([a, b])$, l'image de $[a, b]$ par f, est un intervalle $[m, M]$.

De plus, il existe $x_m \in [a, b]$ et $x_M \in [a, b]$ tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$.

Nous allons distinguer le cas où $m = M$ du cas où $m < M$

Si $m = M$, f est constante sur $[a, b]$ et $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Si $m < M$, nous avons soit $m < f(a) = f(b) \leq M$ soit $m \leq f(a) = f(b) < M$.

Lorsque $m = f(x_m) < f(a) = f(b) \leq M$, x_m est un minimum de f dans $[a, b]$ et $x_m \in]a, b[$. Donc $f\prime(x_m) = 0$.

Lorsque $m \leq f(a) = f(b) < M = f(x_M)$, x_M est un maximum de f dans$[a, b]$ et $x_M \in]a, b[$. Donc $f\prime(x_M) = 0$. ■

1.2.2 Théoreme des accroissements finis

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable dans $]a, b[$.

Alors il existe (au moins) un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f\prime(c)(b - a).$$

Preuve. La démonstration repose sur le théoréme de Rolle. A partir de la fonction f, nous définissons une fonction g telle que $g(a) = g(b)$. Posons $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$

Il est évident que $g(a) = g(b)$, g est continue sur $[a, b]$, et g est d´erivable dans $]a, b[$.

De plus, $g\prime(x) = f\prime(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

pour tout $x \in]a, b[$. D'aprés le théoréme de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $0 = g\prime(c) = f\prime(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, Le théoréme est donc démontré ■

Fonctions réciproques des fonctions strictement monotones

Soit f une fonction continue d'un intervalle$I \subset \mathbb{R}$ dans R, d´erivable sur I.

1.$f\prime(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, si et seulement si f est croissante sur$I$.

2.$f\prime(x) \leq 0$pour tout $x \in I$, si et seulement si f est décroissante sur$I$.

3. $f\prime(x) = 0$ pour tout$x \in I$, si et seulement si f est constante sur$I$.

4. Si $f\prime > 0$ à l'intérieur de I, alors f est strictement croissante sur I.

5. Si $f\prime < 0$ à l'intérieur de I, alors f est strictement décroissante sur$I$.

Preuve. (1) Supposons que $f\prime(x) \geq 0$ pour tout$x \in I$. Si x_1 etx_2 sont deux points de I tels que $x_1 < x_2$, en appliquant le théoréme des accroissements finis sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, nous avons $f(x_2) - f(x_1) = f\prime(c)(x_2 - x_1) \geq 0$ avec $c \in]x_1, x_2[$ (l'inégalité découle du fait que $f\prime(c) \geq 0$).

Réciproquement, si f est dérivable sur I et croissante, alors pour tout $x_0 \in I$ et tout $x \in I$, avec $x \neq x_0$, nous avons

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

(Il suffit d'utiliser la croissance de f et de distinguer les cas $x < x_0$ et $x > x_0$). Donc par passage à la limite quand $x \to x_0$, nous récupérons $f\prime(x_0) \geq 0$.

(**2**) La deuxiéme équivalence se démontre de maniére analogue.

(**3**) Si $f\prime > 0$ à l'intérieur de I, alors

$f(x_2) - f(x_1) = f\prime(c)(x_2 - x_1) > 0$

pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. Donc f est strictement croissante sur$I$.

Le dernier énonce se démontre de manière analogue.

Nous pouvons étendre les énoncés 4 et 5 de la proposition précédente au cas où f s'annule en un nombre fini de points. ■

Soit f une application dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Si $f\prime(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, (respectivement $f\prime(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$) et si $f\prime$ s'annule une seule fois en $c \in]a, b[$ alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Le résultat peut être étendu au cas d'une fonction qui s'annule un nombre fini de fois sur l'intervalle $]a, b[$.

Preuve. On traite le premier cas. Supposons que f ne soit pas strictement croissante. Alors il existe$x, y \in]a, b[$, $x < y$ tel que $f(x) = f(y)$. La fonction f étant croissante, on a $f(t) = f(y)$ pour tout $t \in [x, y]$. Or f est dérivable dans $]x, y[$. Donc de la proposition précédente, nous déduisons que $f\prime = 0$ dans $]x, y[$. Mais cela contredit le fait que $f\prime$ ne s'annule qu'une fois. ■

Soit $I =]a, b[$ et f une fonction réelle définie dans I et dérivable dans$I$. Si $f\prime(x) > 0$(respectivement $f\prime(x) < 0$) pour tout $x \in I$, alors

(**i**) f admet une limite à droite en a dans $\overline{\mathbb{R}}$ (notée α) et une limite a gauche en b dans $\overline{R}$ (notée β),

(**ii**) f est une bijection de I sur $J =]\alpha, \beta[$ (respectivement sur $J =]\beta, \alpha[$),

(**iii**) la bijection r´eciproque de f, not´ee f^{-1}, est d´erivable sur J et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ avec } y = f(x)$$

En particulier, f^{-1} est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) et nous avons

$$\lim_{y \to \alpha} f^{-1}(y) = a \text{ (respectivement } \lim_{x \to \alpha} f^{-1}(y) = b)$$

et

$$\lim_{y \to \beta} f^{-1}(y) = b \text{ (respectivement } \lim_{x \to \beta} f^{-1}(y) = a)$$

Preuve. Traitons le cas où $f\prime(x) > 0$ pour tout $x \in I$, l'autre cas se traite de manière analogue. Nous savons que f est strictement croissante sur I, donc la limite de f à droite en a existe et elle est éventuellement égale à $-\infty$. Notons-la α. De même la limite de f à gauche en b existe, notons-la β. Si $a < x_1 < x_2 < b$, nous avons $f(x_1) < f(x_2)$, donc f est injective. Montrons que f est surjective de I sur J. Soit $y \in J$. Etant donné que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha < y < \lim_{x \to b^-} f(x) = \beta$.Il existe a_1 et b_1 tels que $a < a_1 < b_1 < b$ et $\alpha < f(a_1) < y < f(b_1) < \beta$. D'aprѐs le théoréme des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a_1, b_1[$ tel que $f(c) = y$. Donc f est une bijection de I sur J. Il existe donc une fonction réciproque g de J dans$I$. Il est facile de montrer que g est continue dans J et $\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))}$. Pour tout $y\in J$, $y_0\in J$, $y\neq y_0$. En passant à la limite, nous obtenons $\lim\limits_{y\longrightarrow y_0}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim\limits_{y\longrightarrow y_0}\dfrac{1}{\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}}=\dfrac{1}{f'(g(y_0))}$. La fonction $g=f^{-1}$ est donc dérivable sur J et lèxpression de la dérivée est établie ■

1.2.3 Régle de l'Hospital

Proposition 1.2.1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I telles que $f(a)=g(a)=0$ avec $a\in I$. Si f et g sont dérivables en a et si $g\prime(a)\neq 0$,

Alors la limite de $f\diagup g$ existe en a et

$$\lim_{x\longrightarrow a}\tfrac{f(x)}{g(x)}=\tfrac{f'(a)}{g'(a)}$$

Preuve. Etant donné que $g(a)=0$ et $g\prime(a)\neq 0$, il existe un intervalle $[a-\alpha,a+\alpha]\subset I$, avec $\alpha>0$, sur lequel g ne s'annule qu'au point a (cela découle du développement $g(x)=(g\prime(a)+\varepsilon_g(x-a))(x-a)$ avec $lim_0\varepsilon_g=0$). Nous avons $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$, pour tout $x\in[a-\alpha,a+\alpha]$, $x\neq a$. En passant à la limite nous obtenons. $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$. ■

1.2.4 Polynôme de Taylor d'ordre n en un point

Définition 1.2.1 *Considérons une fonction$f$: $I\rightarrow K^N(N\in\mathbb{N}^*)$, où I est un intervalle non trivial de IR. Soit $a\in I$, n un entier ≥ 1 et supposons que f admette au point a une dérivée $n^{ième}$ (cela suppose l'existence des dérivées $k^{ièmes}$ de f au voisinage de a pour $k\leq n-1$).*

Nous appellerons alors polynôme de Taylor d'ordre n en a de f la fonction polynomiale, à coefficients dans $\mathbb{R}_n^N$, notée $T_{n,f,a}$ définie par :

$$I\rightarrow\mathbb{R}^N, x\rightarrow T_{n,f,a}(x)=f(a)+\sum_{K=1}^{n}\tfrac{1}{K!}(x-a)^Kf^{(K)}(a)$$

Par convention$T_{0,f,a}$ est la fonction constante de valeur $f(a)$ sur I. La fonction $T_{n,f,a}$ est évidemment de classe C^∞ sur I, et l'on a $T^{(K)}_{n,f,a}(a) = f^{(K)}(a)$

Si $k \leq n$ et$T^{(K)}_{n,f,a}(a) = 0$ si $k > n$. C'est la seule fonction polynomiale de degré $\leq n$ (à coefficients dans $\mathbb{R}^N$) vérifiant ces conditions.

Lorsque$n \geq 1$, les hypothèses faites sur$f$ entraînent que f' admet en a une dérivée$(n-l)^{ième}$, et l'on constate que, pour tout $x \in I$:

$$T_{n-1,f',a}(x) = T'_{n,f,a}(x)$$

Le polynôme de Taylor d'ordre n en a de I étant destiné à fournir une

approximation de f nous appellerons la fonction $R_{n,f,a}$:$I \to K^N$, $x \to f(x) - T_{n,f,a}(x)$ reste d'ordre n de f au point a. Nous allons donner ci-dessous plusieurs expressions de $R_{n,f,a}$ dépendant de l'usage qu'on veut en faire (expression valable sur tout un intervalle de longueur finie, ou seulement au voisinage de a) en laissant pour le l'expression de

$R_{n,f,a}$ sous forme d'intégrale.

Formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions numériques

Théorème 1.2.1 *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$une fonction de classe (C^n sur I et $n+1$ fois dérivable sur $Int(I)$. Pour tous a et b dans I, il existe c strictement compris entre a et b tel que*

$$R_{n,f,a}=\tfrac{(b-a)^{n+l}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \text{ soit}$$

$$f(b) = \left(\sum_{K=1}^{n} \frac{(b-a)^K}{K!} f^{(K)}(a)\right) + \frac{(b-a)^{n+l}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{2}$$

Preuve. Si $a = b$, l'égalité (2) est évidente.

Si $b < a$, on remplace la fonction$f$ par$f_1 : x \longmapsto f(-x)$ qui vérifie les mêmes hypothèses que f sur le symétrique I_1 de I par rapport à l'origine, et pour laquelle on a :

$\frac{1}{k!}((-b)-(-a))^k f_1^k(-a) = \frac{1}{k!}(b-a)^k f^{(k)}(a)$ pour tout $k \leq n$. Il suffit donc de prouver le théorème avec $a < b$. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{K=1}^{n} \frac{(b-x)^K}{K!} f^{(K)}(x) - \frac{(b-x)^{n+l}}{(n+1)!} A$$

où la constante A est choisie pour que $(\varphi(a) = 0 = \varphi(b))$, de sorte que $\varphi(x)$ vérifie sur $[a, b]$ toutes les conditions du théorème de Rolle, ce qui permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi\prime(c) = 0$. Or le calcul de $\varphi\prime$ donne comme résultat $\varphi\prime(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A$ les autres termes s'étant réduits deux à deux, et comme $c \neq b$, il vient $A = f^{(n+1)}(c)$. En portant dans $\varphi(a) = 0$ on obtient exactement la formule (2) ■

Définition 1.2.2 *Le reste $R_{n,f,a}$ ainsi obtenu est appelé* ***le reste de Lagrange****. En posant $b = a + h$, la formule (2) devient*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{K=1}^{n} \frac{h^K}{k!} f^{(K)}(a) + \frac{h^{n+l}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \tag{3}$$

où θ désigne un nombre réel tel que $0 < \theta < 1$.

Lorsque $a = 0$ et $b = x$, on retient la formule (2) sous sa nouvelle forme connue sous le nom de formule de **Mac-Laurin**) qui s'écrit

$$f(x) = f(0) + \sum_{K=1}^{n} \frac{x^K}{k!} f^{(K)}(0) + \frac{x^{n+l}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \tag{4}$$

1.Le réel c figurant dans la formule (2) (resp. θ figurant dans (3) ou dans (4)) n'est en général pas unique. De plus l'ensemble des valeurs c vérifiant (2) (resp. θ vérifiant (3)) dépend non seulement de f mais

également de a et b.

2.On n'était pas obligé de prendre le dernier terme de $\varphi(x)$ sous la forme $-\frac{(b-x)^{n+l}}{(n+1)!} A$.

On aurait pu choisir la fonction auxiliaire ψ:

$$[a, b] \to \mathbb{R},\ x \longmapsto f(b) + \sum_{K=1}^{n} \frac{(b-x)^K}{k!} f^{(K)}(x) + \frac{(b-x)^{p+l}}{n!(p+1)!} A,$$

où p est un entier naturel que l'on choisit à sa guise et où A est choisie pour que $\psi(a) = 0$. On a alors :

$$\psi^{'}(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{^{(n+1)}}(x) + \frac{(b-x)^p}{n!} A$$

et l'application du théorème de Rolle donne$A = (b-c)^{n-p}f^{(n+1)}(c)$. Bien sûr,

Pour $p = n$, on retrouve le reste de Lagrange ; mais pour $p = 0$ on obtient le reste de Cauchy$R_{n,f,a} = \frac{(b-a)(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$ (avec un c différent de celui de Lagrange). Les autres valeurs de p ne sont guère utilisées.

3. Si f est une fonction polynomiale on retrouve évidemment les formules de Mac-Laurin et de Taylor étudiées en Algèbre. En particulier si le polynôme associé à f a un degré$\leq n$, le reste de Lagrange est identiquement nul.

Comme en général on n'a pas de renseignement précis sur l'emplacement de c, la formule (2) ne présente un intérêt majeur que si l'on connaît le comportement global de $f^{(n+1)}$ sur I (penser par exemple à des fonctions

telles que$f(x) = sin(x)$ ou $f(x) = e^x$). De manière précise :

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de

classe C^n sur I et$n+1$ fois dérivable dans Int (I). Supposons

$f^{(n+1)}$ bornée sur I Alors, pour tous a et b dans I :

$$\mid f(b) - T_{n,f,a} \mid \leq \frac{|b-a|}{(n+1)!} \overset{sup}{\underset{x\in int(I)}{sup}} \mid f^{(n+1)}(x) \mid \tag{5}$$

Sous cette forme affaiblie, on peut étendre le théorème de Taylor aux

fonctions vectorielles (à valeurs dansk^N, avec $N \geq 1$

Théorème 1.2.2 ***(Inégalité de Taylor-Lagrange)***

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \to K^N$une fonction de classe C^n ën sur I et $n+1$ fois dérivable dans Int (I). Supposons la dérivée $f^{(n+1)}$ bornée sur I. Alors, pour tous a et$b$ dans I et pour toute norme standard $v$sur$K^{N,}$ on a :

$$v[f(b) - T_{n,f,a}(b)] \leq \frac{\mid b-a \mid^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in int(I)} v(f^{(n+1)}(x)) \tag{6}$$

Preuve. Fixons a et b. Soit $g : I \to K^N, x \to f(x) - \sum\limits_{K=0}^{n} \frac{(b-x)^K}{K!} f^{(K)}(x)$; g est continue sur$I$, dérivable dans Int (I) et l'on vérifie que : $(\forall x \in int(I))$ $g\prime(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}$ $(\forall x \in int(I))$ d'où $v(g\prime(x)) \leq M_{n+1} \frac{|b-x|^n}{n!}$ avec $M_{n+1} = \underset{x \in int(I)}{sup} \nu(f^{(n+1)}(x))$. Mais le membre de droite est la dérivée de la fonction

$h: \ I \to K^{N,}$

$x \mapsto M_{n+1}.\frac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$si $x \geq b, x \mapsto \frac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$ si $x \leq b,$qui est de classeC^1sur$I$.

Le théorème des accroissements finis s'appliquent donc à g et h entre a et b, d'où : $\nu(g(b) - g(a)) \leq \mid h(b) - h(a) \mid = M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ soit $v(f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)) \leq M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

■

Les formules (2), (5) et (6) fournissent une estimation globale du reste d'ordre n en un point. Par exemple, elles mettent bien en évidence le fait que f est polynomiale de degré $\leq n$ sur I ssi sa dérivée $(n+1)$-ième est nulle

sur I

Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur un intervalle non trivial I et supposons f convexe (c'est-à-dire, $\forall x \in I$, $f''(x) \geq 0$). Pour a et x dans I, écrivons la formule de Taylor-Lagrange

$$(\exists c \text{ entre } a \text{ et } x \text{ tel que } f(x) - f(a) - (x-a)f(a) = \tfrac{1}{2}\ (x-a)^2\ f"(c)).$$

Il vient: $f(x) \geq f(a) + (x-a)f\prime(a)$ et l'on retrouve ainsi le fait que le graphe Γ_f de f est au-dessus de toute tangente à ce graphe.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ et I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ stable par addition, par exemple $[0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$ tout entier.

Soit S le $\mathbb{R}$-ev des fonctions numériques n fois dérivables sur I. On donne deux réels M_0 et M_n et soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de S formé des

$f \in S$ telles que $|f(x)| \leq M_0$ et $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ pour tout $x \in I$. Montrons qu'il existe des réels $M_1, ..., M_{n-1} \geq 0$ tels que

$(\forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in I) \mid f^{(k)}(x) \mid \leq M_k$ pour $1 \leq k \leq n-1$

Si P est une fonction polynome de degré $d \in \mathbb{N}$, définie par

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_d x^d \ (a_d \neq 0), \text{ alors} P^{(d+1)} = 0, \text{ et}$$
$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{x^k}{k!} p^{(k)}(0)$$

En particulier nous avons $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

Formule de Mac-Laurin Soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un ouvert I

Si $0 \in I$, alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f"(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $\theta \in]0,1[$ (θ dépend de x).

1)La fonction e^x admet, quel que soit n, une dérivée d'ordre n toujours égale à e^x. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \theta \in]0,1[$, $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

2) La fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$ est dérivable et les dérivées s'écrivent

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, , f"(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$(f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$
$$\forall k \in \mathbb{R}^* ,f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\ k = 1, 2, \ . \ . \ .$$

D'où, pour $x = 0$,

$f(0) = 0, f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ Ceci nous conduit au développement de Taylor-Lagrange pour $\ln(1+x)$

3) Les dérivées de $\cos x$ s'écrivent :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p)}(x) = (-1)^p \cos x, f^{(2p+1)}(x) = (-1)^{p+1} \sin(x),$$

De sorte que

$$f^{(2p)}(0) = (-1)^p, f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

Comme nous pouvons développer à un ordre pair ou impair, nous allons obtenir deux expressions de ce développement. Développons tout d'abord à un ordre pair $n = 2p$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[, \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sin(\theta x) \quad (7)$$

Développons maintenant $\cos x$ à un ordre impair $n = 2p + 1$. Comme la dernière contribution non nulle à la partie régulière du développement est obtenue pour l'ordre $2p$,

nous obtenons cette fois-ci :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[, \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \cos(\theta x) \quad (8)$$

On notera que les parties régulières des formules (7) et (8) sont identiques.

La façon d'écrire le reste dépend de l'ordre. Les dérivées de $\sin x$ s'écrivent :

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin x, \text{et } f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos x,$$

de sorte que

$$f^{(2p)}(0) = 0, \ f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p.$$

Nous pouvons développer $\sin x$, tout comme $\cos x$ précédemment, à un ordre pair ou impair et obtenir ainsi deux expressions de ce développement.

Développons tout d'abord $\sin x$ jusqu'a un ordre impair $n = 2p - 1$:

$$\sin(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{p-1} \tfrac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + (-1)^p \tfrac{x^{2p}}{(2p)!} \sin(\theta x)$$

Développons maintenant $\sin x$ jusqu'a un ordre pair $n = 2p$:

$$\sin(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{p-1} \tfrac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + (-1)^p \tfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \cos(\theta x)$$

Soit la fonction $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

Commençons par $\alpha = m \in \mathbb{N}$,

$$f^{(p)}(0) = m(m-1) \cdots (m-p+1), 0 \leq p \leq m,$$
$$f^{(p)}(0) = 0, m + 1 \leq p.$$

Ceci nous conduit aux développements suivants pour $(1 + x)^m$

Si $0 \leq p \leq m - 1$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \tfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + ... + \tfrac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!} x^p + \tfrac{m(m-1)\cdots(m-p)}{(p+1)!} x^{p+1} (1 + \theta x)^{m-p-1}$$

Si $m \leq p$, il vient (et on reconnaît la formule du binôme de Newton)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + x^m.$$

Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(1+x)^\alpha$ est définie (pour $x > -1$) par : $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$
On voit ainsi (le calculer) que les dérivées s'écrivent :

$$f\prime(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f\text{"}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$f^{(p)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p}.$$

D'où, pour $x = 0$,

$$f^{(p)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1).$$

Ceci nous conduit au développement suivant pour $(1+x)$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p + \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-p)}{(p+1)!}x^{p+1}(1+\theta x)^{\alpha-p-1}$$

La formule de Taylor-Young

Corollaire 1.2.1 *(Formule de Taylor-Young)*

Soit I un intervalle ouvert contenant x_0, et soit f une fonction n fois d´erivable dans I telle que$f^{(n)}$ soit continue en x_0

(cette hypothèse est vérifiée si $f^{(n+1)}(x_0)$ existe). Alors il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, telle que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f\prime(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

Preuve. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n, nous avons $f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{(x_0+h-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x_0+h-x_0)^2}{2!}f'^{(2)}(x_0) + ... + \frac{(x_0+h-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f'^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}f'^{(n)}(x_0 + \theta h)$ avec $\theta_h \in]0,1[$ (nous utilisons la notation θ_h pour bien indiquer que θ_h dépend de h). Posons $\varepsilon(h) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0+\theta_h) - f^{(n)}(x_0))$ $\lim_{h\to 0}(x_0+\theta_h) = x_0$ et $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ car $f^{(n)}$ est continue en x_0 le orollaire est donc démontré ■

Chapitre 2

Développements limités(D.L.)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$contenant 0.

Nous dirons qu'un polynôme$P$ de degré inférieur ou égal à n est un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 (en abrégé « DL. d'ordre n en 0 ») de la fonction f si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x^n} = 0.$$

De maniére équivalente, un polynome P de degré inférieur ou égal à n est un (d.l.) d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de f s'il existe une fonction ε définie sur$I$ telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

et

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 et $n \in \mathbb{N}$ Alors f a au plus un d.l. d'ordre n en 0.

Si P est un polynome de degré$n \in \mathbb{N}^*$ et si $k \in \{0, 1, ..., n\}$, avec

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, la troncature de P au degré k est le polynome $T_k(P)$ défini par

$$T_k(P)(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i.$$

Si P est le d.l. d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en zéro d'une fonction f, alors, pour $0 \leq k < n$, le polynome $T_k(P)$ (la troncature de P au degré k) est le d´eveloppement

limité d'ordre k en zéro de$f$.

Définition 2.0.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset R$, et soit $x_0 \in I$. Un polynome P est un développement limité d'ordre n en x_0 (en abrégé un (d.l). d'ordre n en x_0) de f s'il existe une fonction ε telle que*

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour qu'une fonction f admette un d.l. d'ordre 0 en 0 il faut et il suffit que f soit continue en 0. On a alors

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x), avec \lim_{0} \varepsilon = 0$$

Pour qu'une fonction f admette un d.l. d'ordre 1 en 0 il faut et il suffit que f soit dérivable en 0. On a alors

$$f(x) = f(0) + xf\prime(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{0} \varepsilon = 0$$

2.1 Unicité du développement limité

Proposition 2.1.1 *Le développement limité à un ordre n donné, s'il existe, est unique.*

Preuve. Supposons que f admette un autre développement $f(a+h) = \beta_0 + \beta_1 h + \cdots + \beta_n h^n + h^n \overline{\varepsilon}(h)$, alors par différence nous aurions $0 = \alpha_0 - \beta_0 + (\alpha_1 - \beta_1)h + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)h^n + h^n(\varepsilon(h) - \overline{\varepsilon}(h))$. En prenant la limite quand $h \to 0$, nous trouvons $0 = \alpha_0 - \beta_0$ et donc peut se récrire, en divisant par $h (\neq 0)$, $0 = \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_2 - \beta_2)h + ... + (\alpha_n - \beta_n)h^{n-1} + h^{n-1}(\varepsilon(h) - \overline{\varepsilon}(h))$. Mais en prenant à nouveau la limite quand $h \to 0$ nous trouvons $\alpha_1 = \beta_1$. Ainsi de proche en proche nos aboutissons à $0 = \alpha_n - \beta_n + \varepsilon(h) - \overline{\varepsilon}(h)$, Ce qui, en prenant la limite quand $h \to 0$, donne $\alpha_n = \beta_n$, d'où finalement $0 = \varepsilon(h) - \overline{\varepsilon}(h)$, ce qui montre bien que $\varepsilon(h) = \overline{\varepsilon}(h)$

■

Proposition 2.1.2 *La partie régulière du développement limité, au voisinage de 0, d'une fonction paire (resp.impaire) ne contient que des termes pairs (resp. impairs). Mais attention, ceci ne prouve pas que pour une fonction paire un développement limité à l'ordre $2n$ s'étend toujours à l'ordre $(2n + 1)$ avec un dernier coefficient nul. La fonction $f(x) = x^2\sqrt{|x|}$,par exemple est paire, admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (avec partie régulière nulle) mais n'admet pas en 0 de développement limité à l'ordre 3.*

2.2 Développements limités usuels

Rappelons que la formule de Taylor-Young permet de déterminer le développement limité d'une fonction

Si f est une fonction n fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset R$ contenant x_0 et si $f(n)$ est continue en x_0 alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \tfrac{h}{1!}f^1(x_0) + \tfrac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + ... + \tfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h)$$

ou'ε est une fonction définie sur un voisinage de 0 et telle que $\lim\limits_{h\to 0}.\varepsilon(h) = 0$

Nous allons maintenant donner les développements limités des fonctions usuelles en0

1 Fonction exponentielle

La fonction exp est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, et, pour tout entier n,$\exp^{(n)} = ex$

Nous avons donc

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...\frac{x^N}{n!} + x^n\varepsilon(x),\text{avec}, \lim_0 \varepsilon = 0$$

2 Sinus et cosinus

Les fonctions 'sinus' et 'cosinus' sont indéfiniment dérivables dans$\mathbb{R}$,
$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$et $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

pour tout entier n. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x), \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0 \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x), \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0
\end{aligned}$$

La fonction *cosinus* est paire. Nous remarquons que les d.l. de cette fonction ne contient que des monômes d'exposant pair. De mème, la fonction '*sinus*' est impaire et ses (d.l) ne contiennent que des monômes d'exposant impair.

Si f est une fonction paire d´efinie dans un intervalle ouvert I

contenant0, dérivable jusqu''a l'ordre$n$ dans I, alors $f^{(2k+1)}(0) = 0$ si $2k+1 \leq n$, et

$$f(x) = f(0) + \tfrac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + ... + \tfrac{x^{2k}}{2k!}f^{(2K)}(0) + x^{2k+1}\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0 \text{ et } 2k+1 \leq n.$$

Si f est une fonction impaire définie dans un intervalle ouvert I contenant 0, dérivable jusquà l'ordre$n$ dans I, alors $f^{(2k)}(0) = 0$ si$2k \leq n$, et

$$f(x) = \tfrac{x}{1!}f^{(1)}(0) + \tfrac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + ... + \tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}f^{(2K-1)}(0) + x^{2k}\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{0}\varepsilon = 0 \text{et} 2k \leq n$$

3. cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Les fonctions ch et sh sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}$, ch est paire, sh est impaire, $ch^{(2k)} = ch$ et $sh^{(2k+1)} = ch$. Nous avons

$$\begin{aligned} ch(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x), \text{avec} \lim_{0}\varepsilon = 0 \\ sh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x), \text{avec} \lim_{0}\varepsilon = 0 \end{aligned}$$

4. **La fonction $(\mathbf{1}+\mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}$**

La fonction$x \longmapsto (1+x)^\alpha$, ou'$\alpha \in \mathbb{R}$, est indéfiniment dérivable dans $]-1,+\infty[$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons α

$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

Nous en déduisons

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + ... + \frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-n+1)x^n}{n!} + x^n, avec \lim_{0}\varepsilon = 0$$

Pour $\alpha = -1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec}, \lim_{0}\varepsilon = 0 \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } x \in]-1,+\infty[, \lim_{0}\varepsilon = 0 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1/2$, nous avons

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\times 4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1.3.....(2n-3)}{2.4.....(2n)}x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec,} \lim_{0}\varepsilon = 0$$

5. La fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$est indéfiniment dérivable dans$]-1,+\infty[$, et la fonction$x \mapsto \ln(1-x)$ est indéfiniment dérivable dans$]-\infty,1[$. Nous avons les d.l. en 0 suivants

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+....+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) \text{ avec}, \lim_{0}\varepsilon=0\\ \ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-....-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) \text{ avec}, \lim_{0}\varepsilon=0\end{aligned}$$

Exemples de D.L. au voisinage de $a \neq 0$

(**i**) A' l'aide de

$$\sin(a+x)=\sin(a)\cos(x)+\cos(a)\sin(x),$$

on obtient

$$\sin(a+x)=\sin(a)(1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}....+(-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!})+\cos(a)(x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}+(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\text{avec}, \varepsilon\lim_{0}\varepsilon=0$$

(**ii**) Avec $(a+x)^\alpha=a^\alpha(1+\frac{x}{a})^\alpha$ lorsque $a\neq 0$ nous avons $(a+x)^\alpha=(1+\frac{\alpha}{1!}\frac{x}{a}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\frac{x^2}{a^2}+ ..... +\frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}\frac{x^n}{a^n})+x^n\varepsilon(x)$ avec, $\varepsilon\lim_{0}\varepsilon=0$

2.3 Opérations sur les développements limités

Dans ce paragraphe, f et g sont deux fonctions admettant chacune un (d.l). d'ordre n en 0

$$f(x)=P(x)+x^n\varepsilon_{f(x)},g(x)=Q(x)+x^n\varepsilon g(x), \text{ avec } \lim_{0}\varepsilon_f=0, \lim_{0}\varepsilon_g=0,$$
$$P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n, \text{ et } Q(x)=b_0+b_1x+...+b^nx^n.$$

Développement limité d'une combinaison linéaire de f et g

Proposition 2.3.1

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha P+\beta Q$ est le (d.l). d'ordre n en 0 de $\alpha f+\beta g$.

Développement limité du produit de f et g

Proposition 2.3.2 *Le polynôme $T_n(P \times Q)$ (la troncature du polynôme $P \times Q$ au degré n) est le (d.l). d'ordre n en 0 de $f \times g$.*

Exemple 2.3.1 .

1. Déterminons le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $\cos(x)/(1-x)$.
Nous avons
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$ et$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$, avec $\lim\limits_0 \varepsilon_1 = \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0$.
Nous obtenons
$\frac{\cos(x)}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$

2 . Déterminons le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $\cos(x)\sin(x)$. En utilisant les d.l. des fonctions sinus et cosinus, nous obtenons
$\cos(x)\sin(x) = x - \frac{2x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$.

Développement limité de la composée de f et g

La composition des développements limités est délicate.

Proposition 2.3.3 *Nous supposons que f est une fonction d'un intervalle ouvert I contenant 0, et que f est à valeurs dans un intervalle ouvert J contenant 0. Nous supposons que la fonction g est définie sur l'intervalle J. (Comme précédemment). Nous supposons que P est le d.l. d'ordre n en 0 de f et que Q est le d.l. d'ordre n en 0 de g.) Si $f(0) = 0$ alors le polynome $T_n(Q \circ P)$ (la troncature du polynome $Q \circ P$ au degré n) est le d.l. d'ordre n en 0 de $g \circ f$.*

1. Déterminons le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $\exp(\sin(x))$.
Nous avons $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \exp(x)$, et $f(0) = 0$. Avec les notations de la proposition, $P(x) = x, Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $Q \circ P(x) = Q(x) = 1 + x + x^2 = T_2(Q \circ P)$.
2. Déterminons le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $\cos(\sin(x))$.
Ici $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x), f(0) = 0, P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $Q(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$,

$$Q \circ P(x) = 1 - \frac{(x-\frac{x^3}{3!})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{x^3}{3!})^4}{4!},$$

et $T_4(Q \circ P)(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5X^4}{24}$.

Développement limité du quotient de f par g

Le (D.L) de f / g, s'il existe, est défini via le quotient de la division d'un polynome par un autre suivant les puissances croissantes. Cette notion est introduite à la section suivante.

Si $g(0) \neq 0$, le quotient, de la division suivant les puissances croissantes d'ordre n, de P par Q est le (d.l) d'ordre n en 0 de f / g.

Division d'un polynome par un autre suivant les puissances croissantes

Soient A et B deux polynômes, et soit n un entier naturel. Si $B(0) \neq 0$ alors il existe un couple unique (Q_n, R_n) de deux polynomes tel que

(**i**) Q_n est de degré inférieur ou égal à n,

(**ii**) $A(x) = B(x)Q_n(x) + x^{n+1}R^n(x)$.

Le polynôme Q_n est appelé quotient de la division, suivant les puissances croissantes d'ordre n, de A p.ar B

2.4 Développement limité au voisinage de l'infini

Si f est une fonction définie sur $]a, +\infty[$, il est parfois possible d'écrire

$$f(x) = P(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{1}{x^n}\varepsilon(x) \text{ avec, } \varepsilon \lim_{\infty} \varepsilon = 0$$

et P est un polynôme de degré n. Un tel développement est appelé développement limité de f au voisinage de $+\infty$. Un exemple est donné en section 5.4. Mais, suivant

les fonctions considérées, il existe d'autres développements possibles, par exemple en fonction de $\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, à la place de $\dfrac{1}{x}$ C'est la raison pour laquelle nous n'aborderons pas cette notion de fa¸con g´en´erale.

Chapitre 3

Applications des dévelopements limités (D.L.)

3.1 Calcul de limites par développements limités:

Si on a les formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$. Une autre forme indéterminée est 1^{∞} (prenant son logarithme, on retrouve la forme $0 \times \infty$).

Pour lever l'indétermination de la forme $\infty - \infty$, on met en facteur l'un des deux termes, généralement "le plus grand", et on ramène au cas $\frac{\infty}{\infty}$, qui n'est autre que$\frac{0}{0}$

écrit d'une autre façon, puis éventuellement au cas $0 \times \infty$, qui se ramène encore au cas$\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination de cette dernière forme, un moyen efficace consiste à mettre en

évidence les parties principales des infiniment petits au numérateur et dénominateur.

Ceci s'obtient bien souvent en utilisant les développements limités, comme on e verra dans l'exempe suivant.

Soit à déterminer

$$\lim_{x \to 0} \tfrac{x - \arctan x}{x^2 \sin x},$$

qui est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Calculant le développement limité de la fonction arctan à l'ordre 3, nous obtenons pour le numérateur

$$x - \arctan x = \tfrac{x^3}{3}(1 + \varepsilon_1(x)),$$

tandis que le dénominateur s'écrit, à partir du développement de $\sin x$:

$$x^2 \sin x = x^3(1 + \varepsilon_2(x)).$$

D'où le résultat, en simplifiant par x^3 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{3}$$

3.2 Etude locale d'une courbe

L'équation de la tangente en x_0 à la courbe (C), d'équation $y = f(x)$, est donnée par

$$y = y_0 + f\prime(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f\prime(x_0)(x - x_0).$$

Pour situer la courbe par rapport à cette tangente, nous devons donc estimer la différence

$$D = f(x) - (f(x_0) + f\prime(x_0)(x - x_0)),$$

pour les x proches de x_0. Or, la formule de Taylor-Young donne :

$$D = \frac{(x-x_0)^2}{2} f"(x_0) + (x - x_0)^2 \varepsilon(x - x_0) = (x - x_0)^2 (\frac{f^{//}(x_0)}{2} + \varepsilon(x - x_0)).$$

Distinguons plusieurs cas:

a/ $f"(x_0) > 0$. Pour x suffisamment proche de x_0, D est strictement positif : la courbe est située au dessus de la tangente (elle est convexe dans un voisinage de

x_0).

b/ $f"(x_0) < 0$. La courbe est au-dessous de sa tangente.

c/ $f"(x_0) = 0$. Supposons $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, on écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 3, et l'on voit sans difficulté que D change de signe quand x approche x_0 d'abord par valeurs plus petites puis par valeurs plus grandes que x_0. La courbe traverse sa tangente au point x_0. On a un point d'inflexion.

Le développement de Taylor Young permet également d'étudier les extrema, on a vu qu'une condition nécessaire est que $f'^{/}(x_0) = 0$. On a alors $D = f(x) - f(x_0)$

a/ Si $f"(x_0) > 0$. Pour x suffisamment proche de x_0, D est strictement positif, x_0 réalise un minimum local.

b/ Si $f"(x_0) < 0$, x_0 réalise un maximum local.

c/ Si $f"(x_0) = 0$ et $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, on a un point d'inflexion, donc pas d'extremum.

3.3 Etude des branches infinies d'une courbe

Considérons comme exemple, le cas : $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

1. Si $\frac{f(x)}{x}$tend vers l'infini quand x tend vers l'infini on a une branche parabolique de direction asymptotique $0y$.

2. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on a une branche parabolique de direction asymptotique $0x$.

3. Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha \neq 0$, la droite $y = \alpha x$ est la direction asymptotique de la courbe,

et on doit encore distinguer deux cas :

– Si $f(x) - \alpha x$ tend vers ∞ quand $x \to \infty$, on a encore une branche parabolique.

– Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$, la courbe admet la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ comme asymptote. Sa position par rapport à cette asymptote dépend du signe de l'infiniment

petit $D = f(x) - (\alpha x + \beta)$ quand x tend vers l'infini.

Pour faire l'étude dans le cas 3. il suffit d'avoir un développement limté au voisinage de l'infini de la fonction $\frac{f(x)}{x}$. En effet si on a

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } a_2 \neq 0$$

On trouve alors

$$\alpha = a_0, \beta = a_1 \text{ et } D = f(x) - a_0 x - a_1 = \frac{1}{x}\left(a_2 + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Pour x grand, $a_2 + \varepsilon(\frac{1}{x})$ a le signe de a_2, on en déduit donc la position de la courbe par rapport à l'asymptote d'équation $y = a_0 x + a_1$.

Si $a_2 = 0$, il faut trouver le premier terme non nul après a_2 dans le développement de $\frac{f(x)}{x}$ et faire un raisonnement similaire.

Chapitre 4

Conclusion

Les développements limités nous permettent de construire une approximation d'une fonction réelle en un point donné ou l'infini.

Les développements limités sont utilisés dans le calcul des limites (formes indéterminées) dans la construction de la courbe représentative d'une fonction, notamment pour préciser la position relative de la courbe et d'une asymptote.

Bibliographie

[1] Charles Cassidy et Marie Louis Lavert; Introduction à l'anayse; Presses de 'université Laval Québec; 1994.

[2] J-Pierre Dédieu, et J.P.Raymond; Analyse; fonction d'une variabe réelle; Univ, Paul Sabatier; Toulouse.

[3] Jaques abelle et Armel Mercier; Introduction à l'analyse réelle Modulo; Monréal;1993.

[4] J.M Arnaudiès et H Fraysse; Cours de mathématiques 2, Bordas, Paris; 1993.

[5] Walter Rudin; Principe d'analyse Mathématiques; Ediscieuse Paris 1995.