Formulaire de dérivation - Fonctions usuelles

1 Dérivation

u, v, f et g désignent des fonctions dérivables, a, b, α des réels, $n \in \mathbb{N}$

Expression de F	Expression de F'	Expression de F	Expression de F'
a	0	$ax+b$	a
x^2	$2x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^n	nx^{n-1}	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$-\frac{1}{nx\sqrt[n]{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{argch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{argsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{th}(x)$	$1-\mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{argth}(x)$	$\frac{1}{1-t^2}$

Expression de F	Expression de F'	Expression de F	Expression de F'
au	au'	$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f \circ g$	$g'.(f' \circ g)$	u^n	$n.u'.u^{n-1}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\frac{u}{v^n}$	$\frac{u'}{v^n} - \frac{nuv'}{v^{n+1}} = \frac{u'v-nuv'}{v^{n+1}}$	$\frac{u}{v^\alpha}$	$\frac{u'}{v^\alpha} - \frac{\alpha uv'}{v^{\alpha+1}} = \frac{u'v-\alpha uv'}{v^{\alpha+1}}$
u^2	$2u'.u$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}$	$-\frac{u'}{2u\sqrt{u}}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	$\arcsin(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	$\arccos(u)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\tan(u)$	$u'(1+\tan^2(u))$	$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\exp(u)$	$u'\exp(u)$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\mathrm{ch}(u)$	$u'\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{argch}(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$\mathrm{sh}(u)$	$u'\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{argsh}(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$\mathrm{th}(u)$	$u'(1-\mathrm{th}^2(u))$	$\mathrm{argth}(u)$	$\frac{u'}{1-u^2}$

Théorème 1. *Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective et dérivable. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$.*
Alors :

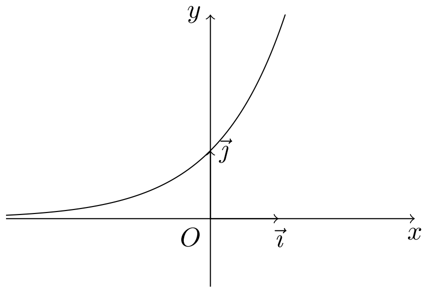
1. *Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*
2. *Si $f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$.*

2 Fonctions usuelles

Nom : Exponentielle
Notation : exp, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
Définition : $\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$
Domaine d'arrivée : $\mathbb{R}^{+*}$
Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivée : $\exp'(x) = \exp(x)$
Propriétés particulières :

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
2. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
3. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

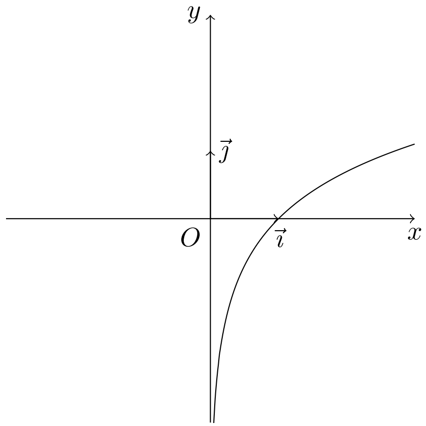
Allure :



Nom : Logarithme népérien
Notation : ln
Définition : Réciproque de exp
Domaine de définition : $\mathbb{R}^{+*}$
Domaine d'arrivée : $\mathbb{R}$
Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}^{+*}$
Dérivée : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
Propriétés particulières :

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3. $\ln(x^n) = n\ln(x)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exp(\ln(x)) = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x$

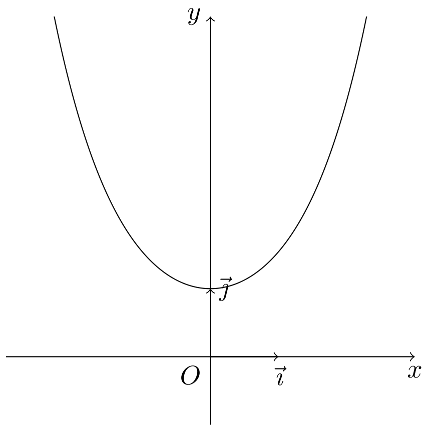
Allure :



Nom : Cosinus hyperbolique
Notation : ch
Définition : $\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$
Domaine d'arrivée : $[1, +\infty[$
Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivée : $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$
Propriétés particulières :

1. Partie paire de exp
2. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ (non exigible)

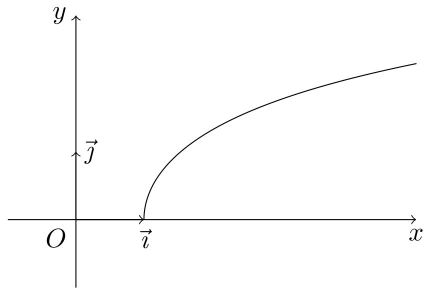
Allure :



Nom : Argument cosinus hyperbolique
Notation : argch
Définition : Réciproque de $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}^+}$
Domaine de définition : $[1, +\infty[$
Domaine d'arrivée : $\mathbb{R}^+$
Domaine de dérivabilité : $]1, +\infty[$
Dérivée : $\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Propriétés particulières :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x)) = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^- \quad \mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x)) = -x$
3. $\forall x \in [1, +\infty[\quad \mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x)) = x$
4. $\mathrm{ch}(x) = y \iff (x = \mathrm{argch}(y)$ ou $x = -\mathrm{argch}(y))$

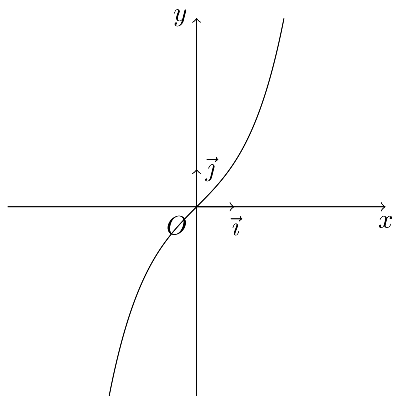
Allure :



Nom : Sinus hyperbolique
Notation : sh
Définition : $\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$
Domaine d'arrivée : $\mathbb{R}$
Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$
Dérivée : $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$
Propriétés particulières :

1. Partie impaire de exp
2. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)$ (non exigible)

Allure :



Nom : Argument sinus hyperbolique

Notation : argsh

Définition : Réciproque de sh

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Domaine d'arrivée : $\mathbb{R}$

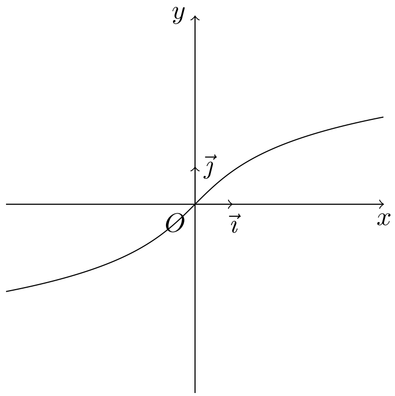
Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivée : $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Propriétés particulières :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)) = x$
3. $\operatorname{sh}(x) = y \iff x = \operatorname{argsh}(y)$

Allure :



Nom : Arc cosinus

Notation : arccos

Définition : Réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$

Domaine de définition : $[-1,1]$

Domaine d'arrivée : $[0,\pi]$

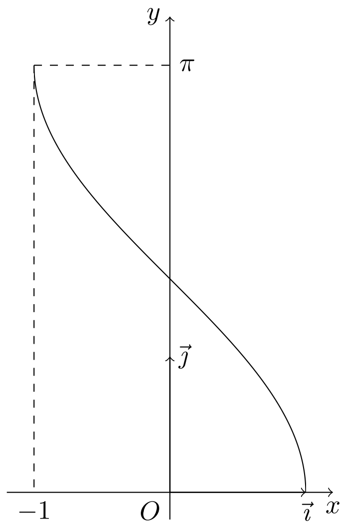
Domaine de dérivabilité : $]-1,1[$

Dérivée : $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Propriétés particulières :

1. $\forall x \in [0,\pi] \quad \arccos(\cos(x)) = x$
2. $\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arccos(x)) = x$
3. $\cos(x) = y \iff (x = \arccos(y)[2\pi]$ ou $x = -\arccos(y)[2\pi])$
4. $\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Allure :



Nom : Arc sinus

Notation : arcsin

Définition : Réciproque de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

Domaine de définition : $[-1,1]$

Domaine d'arrivée : $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

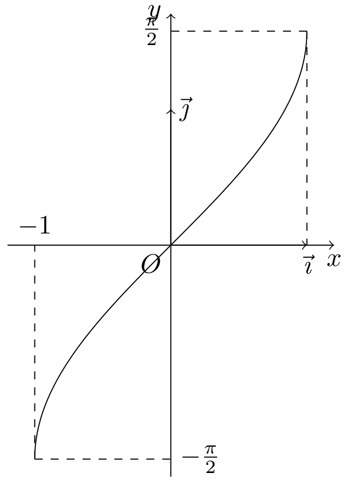
Domaine de dérivabilité : $]-1,1[$

Dérivée : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Propriétés particulières :

1. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \quad \arcsin(\sin(x)) = x$
2. $\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\arcsin(x)) = x$
3. $\sin(x) = y \iff (x = \arcsin(y)[2\pi]$ ou $x = \pi - \arcsin(y)[2\pi])$
4. $\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
5. $\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

Allure :



Nom : Arc tangente

Notation : arctan

Définition : Réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Domaine d'arrivée : $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivée : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Propriétés particulières :

1. arctan est impaire.
2. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\quad \arctan(\tan(x)) = x$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan(x)) = x$
4. $\tan(x) = y \iff x = \arctan(y)[\pi]$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
6. $\forall x \in \mathbb{R}^{-*} \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$
7. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
8. $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

Allure :