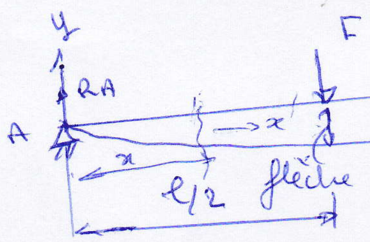
Ch. 2 - Les déplacements des poutres sollicitées en flexion plane (simple)

2.1 objectif :
Déterminer le déplacement ou la flèche de la poutre en un point donné sur la longueur de la poutre.
Il existe plusieurs méthodes ;
- La méthode par double intégration.
- La méthode des paramètres initiaux
- La méthode des moments des aires
- La méthode de superposition.

2.1.1 Méthode par double intégration.

Soit une poutre sur 2 appuis



calcul de R_A et R_B

$\sum F = 0 \Rightarrow R_A - F + R_B = 0$

$\Rightarrow R_A + R_B = F$

$\sum M_{/A} = 0 \Leftrightarrow -F\frac{l}{2} + R_B\, l = 0$

$\Rightarrow R_B = \frac{F}{2}$

$R_A = F - R_B = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}$

Pour déterminer le déplacement de la poutre il faut chercher l'expression de la courbe $y(x)$ décrite par les différents déplacements du pt x, appelé équation différentielle de la ligne élastique ($y(x)$)

d'après la flexion pure nous avec $\frac{1}{R} = \frac{M_f}{EI_{Gz}}$

$\frac{1}{R}$ = courbure de la poutre (courbure de la déformée)
$R \rightarrow$ rayon de courbure

D'après les relations mathématiques d'une courbe nous avons l'équation mathématique suivante.

$$y''(x) = \pm \frac{M_f}{EI_{Gz}}$$

$+ \rightarrow$ si y dirigé vers le haut
$- \rightarrow$ si y " - vers le bas

Il faut calculer M_f, EI_{Gz} étant la rigidité flexionnelle : E = module de Young et I_{Gz} moment d'inertie par rapport à l'axe Gz.

suite de l'exemple :

$0 \le x < \frac{l}{2}$: $M_f = R_A x$ y(x) est divisée en 2 p… $y_1(x)$ et $y_2($…

$$\Rightarrow y_1'' = \frac{M_f}{EI_{Gz}} = \frac{R_A x}{EI_{Gz}}$$

$$y_1' = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_f}{EI_{Gz}}\,dx = \frac{R_A x^2}{2EI_{Gz}} + C_1$$ C_1 cste d'intég…

$$y_1(x) = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \frac{R_A x^3}{6EI_{Gz}} + C_1 x + D_1$$ D_1 cste d'intégrat…

C_1 et D_1 sont déterminés d'après les conditions aux limites :

$$x = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{R_A(0)^3}{6EI_{Gz}} + C_1(0) + D_1 = 0$$

$$\Rightarrow D_1 = 0$$

$x = l \Rightarrow y_2 = 0$ pour $x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_1'(x) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{R\ldots}{2\ldots}$

$C_1 = -\frac{RA\ldots}{8\ldots}$

$\frac{l}{2} < x \le l$: $M_f = R_A x - F(x - \frac{l}{2})$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{R_A x - F(x - \frac{l}{2})}{EI_{Gz}} = \frac{1}{EI_y}\left(R_A x - F(x - \frac{l}{2})\right)$$

$$y_2' = \frac{1}{EI_{Gz}}\left| \frac{R_A x^2}{2} - \frac{Fx^2}{2} + \frac{Fl}{2}x + C_2 \right|$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI_{Gz}}\left(\frac{R_A x^3}{6} - \frac{Fx^3}{6} + \frac{Flx^2}{4} + C_2 x + D_2 \right)$$

il faut déterminer D_2 et C_2 d'après les conditions suivantes : $x = l \Rightarrow y_2 = 0$

$x = \frac{l}{2}$ $y_1 = y_2$ et $y_1' = y_2'$

Pour $x = l$, $y_2 = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{EI_{Gz}}\left(\frac{R_A l^3}{6} - \frac{Fl^3}{6} + \frac{Fl^3}{4} + C_2 l + D_2\right) = 0$$

on doit trouver C_2 et D_2,

on doit noter que pour $x = \frac{l}{2}$, $y_1 = y_2$ et $y_1' = y_2'$

comme F est appliqué au milieu de la poutre nous avons une symetrie $(x = \frac{l}{2})$ $\Rightarrow$ nous avons la même equation pour les 2 partie, comme celle pour $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

Alors Pour $x = \frac{l}{2}$; $y_1' = 0 \Longleftrightarrow \frac{R_A x^2}{2EI_{Gz}} + C_1 = 0$

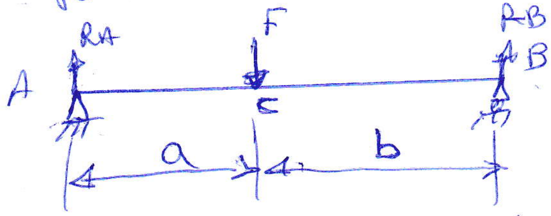
$$\Longleftrightarrow \frac{F\left(\frac{l}{2}\right)^2}{4\, EI_{Gz}} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Fl^2}{16\, EI_{Gz}}$$

Alors $y_1(x) = \frac{1}{EI_{Gz}}\left(\frac{F\, x^3}{12} - \frac{Fl^2\, x}{16}\right)$

Il faut se limiter au calcul de l'expression de $y(x)$ seulement dans la partie gauche . par raison de Symetrie.

Pour le cas ou la charge est appliqué en un point different du milieu dans ce cas, il faut cherche C_2 et D_2 (point d'application) en posant au pt C d'application de F : $y_1(C) = y_2(C)$ et $y_1'(C) = y_2'(C)$

Pour x en C :



$R_A = \frac{Fb}{l}$, $R_B = \frac{Fa}{l}$

on pose pour $0 \leq x < a$ $\quad M_f = \frac{Fb}{l} x \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fb}{l} x$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Fb}{l} \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI\, y(x) = \frac{Fb}{l} \frac{x^3}{6} + C_1 x + D_1 \qquad \text{pour } x = 0, y_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

Dans la region de droite : $a < x < l$

$$M_f = \frac{Fb}{l} x - F(x-a)$$

$$\Rightarrow EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{Fb}{l} x - F(x-a)$$

$$EI_{G2}\frac{dy_2}{dx} = \frac{Fb}{l}\frac{x^2}{2} - \frac{F(x-a)^2}{2} + c_2$$

$$EI\, y_2(x) = \frac{Fb}{l}\frac{x^3}{6} - \frac{F(x-a)^3}{6} + c_2 x + D_2$$

$x = a$ on a : $EI y_1(a) = \frac{Fba^3}{6l} + c_1 a$

$$EI y_2(a) = \frac{Fba^3}{6l} + c_2 a + D_2 \quad \Rightarrow D_2 = 0$$

et $EI y_1'(a) = \frac{Fba^2}{2l} + c_1$

$$EI y_2'(a) = \frac{Fba^2}{2l} + c_2$$

Pour $x = l$ $\quad y_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{Fb}{l}\frac{l^3}{6} - \frac{Fb^3}{6} + c_2 l = 0$ avec $(l-a) = b$

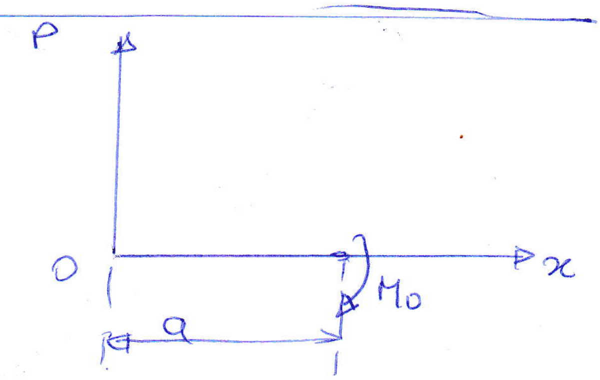
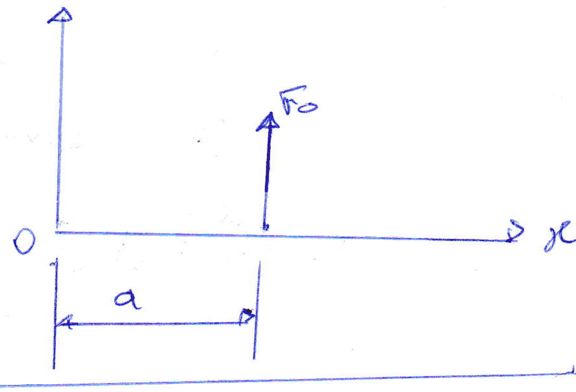
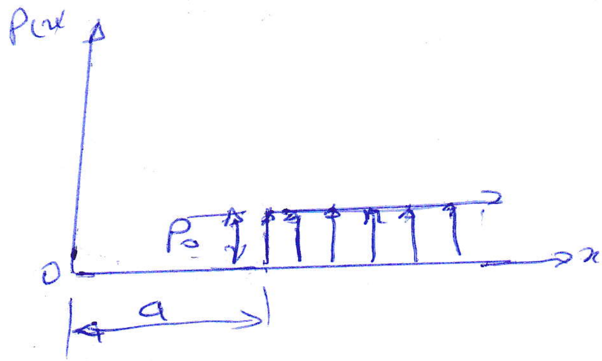
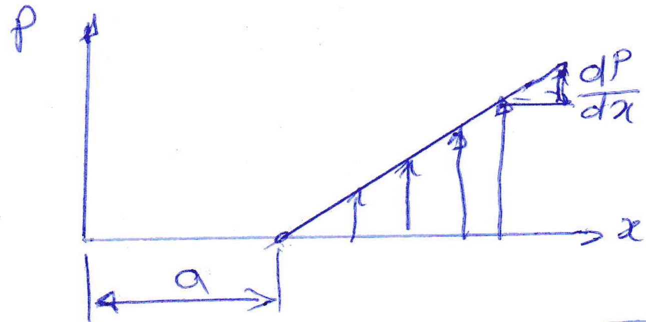
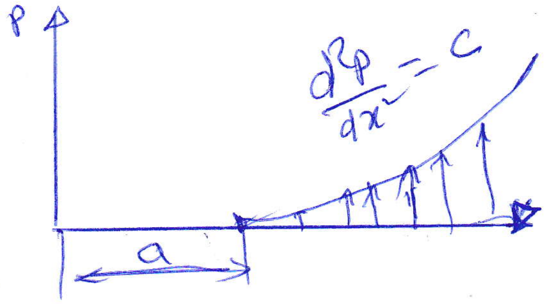
$$\Rightarrow c_2 = \frac{Fb}{6l}(b^2 - l^2)$$

On a alors

Pour $0 < x < a$ $\quad EI_{Gz} y_1(x) = \frac{Fb}{6l}\left[x^3 - (l^2 - b^2)x\right]$

$a < x < l$ $\quad EI_{Gz} y_2(x) = \frac{Fb}{6l}\left[x^3 - \frac{l}{b}(x-a)^3 - (l^2 - b^2)x\right]$

Les deux equations sont nécéssaires pour exprimer la courbe de deflexion de la poutre fléchie. Chaque équation est valable dans la région indiquée.

Type de charge	Fonction de singularité	Représentation graphique
Moment concentré	$P(x) = M_0 \langle x-a \rangle^{-2}$	
Force concentrée (localisée)	$P(x) = F_0 \langle x-a \rangle^{-1}$	
Charge uniformément répartie (fonction à gradin)	$P(x) = P_0 \langle x-a \rangle^{0}$	
Charge variant linéairement	$P(x) = \frac{dP}{dx} \langle x-a \rangle^{1}$	
Charge à variation quadratique	$P(x) = C \frac{\langle x-a \rangle^{2}}{2}$	

Principe de la methode :

En un point quelconque d'une poutre notons P l'intensité de charge, T(x) la force transversale de cisaillement (effort tranchant), M le moment de flexion et y la deflexion (ou fleche).

Pour toute valeur de x, la relation entre la charge $p(x)$ et la force de cisaillement T est :

$$P = \frac{dT}{dx}$$

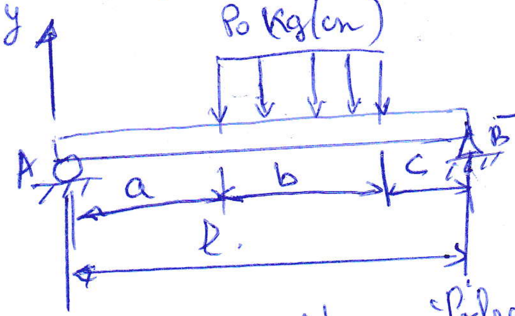
et la relation entre la force de cisaillement et le moment de flexion est :

$$T = \frac{dM}{dx}$$

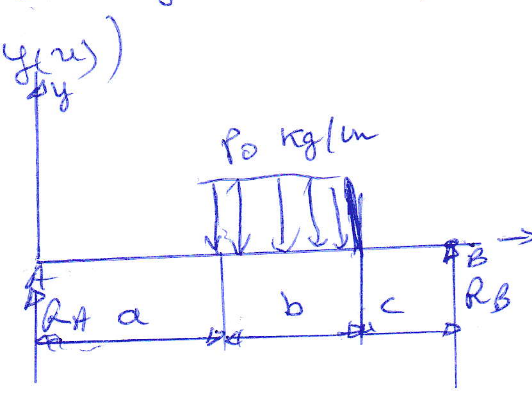
Pour trouver la deformée $y(x)$, il suffit d'écrire une expression de la charge $P(x)$ pour toutes les valeurs de x le long de la poutre et integrer 4 fois l'équation $P(x)$.

Exemple :

Soit la poutre suivante sur 2 appuis portant une charge uniforme sur une partie de la poutre, comme sur la figure. On veut établir à l'aide des fonctions de singularité l'équation de la déformée (courbe de deflexion $y(x)$)



$\Longleftrightarrow$



Les équations de l'équilibre statique $\Sigma F = 0$ et $\Sigma M = 0$

Nous avons $R_A = \frac{P_0 b}{l}\left(\frac{b}{2} + c\right)$ et $R_B = \frac{P_0 b}{l}\left(\frac{b}{2} + a\right)$

La fonction intensité de charge est :

$$P(x) = R_A \langle x - 0\rangle^{-1} - P_0 \langle x - a\rangle^0 + P_0 \langle x - a - b\rangle^0 + R_B \langle x - l\rangle^{-1}$$

$$T(x) = R_A\langle x\rangle^0 - P_0\langle x-a\rangle^1 + P_0\langle x-a-b\rangle^1 + R_B\langle x-l\rangle^0$$

$$M(x) = R_A\langle x\rangle^1 - \frac{P_0}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{P_0}{2}\langle x-a-b\rangle^2 + R_B\langle x-l\rangle^1$$

Ainsi nous avons $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = R_A\langle x\rangle^1 - \frac{P_0}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{P_0}{2}\langle x-a-b\rangle^2 + R_B\langle x-l\rangle^1$

En integrant:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{P_0}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{P_0}{6}\langle x-a-b\rangle^3 + \frac{R_B}{2}\langle x-l\rangle^2 + C_1$$

$$EI\,y(x) = \frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{P_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{P_0}{24}\langle x-a-b\rangle^4 + \frac{R_B}{6}\langle x-l\rangle^3 + Cx + D$$

Les conditions aux limits sont: $y=0$ pour $x=0$ et $x=l$.

En appliquant ces conditions dans les equation précédants: on obtient:

$$C = \frac{P_0}{24l}\left[(l-a)^4 - (l-c)^4 - \frac{P_0 bl}{6}\left(\frac{b}{2}+c\right)\right)$$

$$D = 0$$

L'equation de la deformeé est:

$$EI\,y(x) = \frac{P_0 b}{6l}\left(\frac{b}{2}+c\right)\langle x\rangle^3 - \frac{P_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{P_0}{24}\langle x-a-b\rangle^4 + \left\{\frac{P_0}{24l}\left[(l-a)^4 - (l-c)^4 - \frac{P_0 bl}{2}\left(\frac{b}{2}+c\right)\right]\right\}x.$$

2-1-3 La methode de superposition:

Principe de superposition:

Le principe s'applique de la même maniere à toutes les grandeurs étudiées : actions exercés sur les appuis, efforts tranchants, moments flechissants, contraints et deformations.

Un probleme complexe (avec de nombreuses charges differents peut etre decomposé en la somme de plusieurs problemes simples (faciles à résoudre avec un formulaire) tous en état d'equilibre.

$$T(x) = R_A\langle x\rangle^0 - P_0\langle x-a\rangle^1 + P_0\langle x-a-b\rangle^1 + R_B\langle x-l\rangle^0$$

$$M(x) = R_A\langle x\rangle^1 - \frac{P_0}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{P_0}{2}\langle x-a-b\rangle^2 + R_B\langle x-l\rangle^1$$

Ainsi nous avons $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = M(x) = R_A\langle x\rangle^1 - \dfrac{P_0}{2}\langle x-a\rangle^2 + \dfrac{P_0}{2}\langle x-a-b\rangle^2 + R_B\langle x-l\rangle^1$

En integrant:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{P_0}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{P_0}{6}\langle x-a-b\rangle^3 + \frac{R_B}{2}\langle x-l\rangle^2 + C_1$$

$$EI\,y(x) = \frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{P_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{P_0}{24}\langle x-a-b\rangle^4 + \frac{R_B}{6}\langle x-l\rangle^3 + Cx + D$$

Les conditions aux limits sont: $y = 0$ pour $x = 0$ et $x = l$.
En appliquant ces conditions dans les equation précédants: on obtient:

$$C = \frac{P_0}{24l}\left[(l-a)^4 - (l-c)^4\right] - \frac{P_0 b l}{6}\left(\frac{b}{2} + c\right)$$

$$D = 0$$

L'equation de la deformeé est:

$$EI\,y(x) = \frac{P_0 b}{6l}\left(\frac{b}{2}+c\right)\langle x\rangle^3 - \frac{P_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{P_0}{24}\langle x-a-b\rangle^4 + \left\{\frac{P_0}{24l}\left[(l-a)^4 - (l-c)^4 - \frac{P_0 b l}{2}\left(\frac{b}{2}+c\right)\right]\right\}x$$

2-1-3 La methode de superposition :

principe de superposition:

Le principe s'applique de la même manière à toutes les grandeurs étudiées : actions exercés sur les appuis, efforts tranchants, moments flechissants, contraints et déformations.

Un probleme complexe (avec de nombreuses charges differents peut etre decomposé en la somme de plusieurs problemes simples (faciles à résoudre avec un formulaire) tous en état d'équilibre.