Intégration numérique

Formules simples

Formule du trapèze

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

L'erreur est donnée par

$$\varepsilon = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in [a,b]$$

Formule de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

L'erreur globale est donnée par

$$\varepsilon = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a,b]$$

Formules composites

Si on note $h = (b–a)/n$ et $x_k = a + k * h$ avec $0 \leq k \leq n$. Les formules composites sont :
Méthode des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

Méthode de Simpson :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\right)$$

Résolution d'équations à une variable

Méthode de Bissection

si $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[a,b]$ et si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. Ainsi on decompose l'intervalle $[a,b]$ en deux intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$ et on refait le test sur ces nouveaux intervalles on arrivera à une solution après n itération et l'erreur dans cas est $\varepsilon = \frac{b-a}{2^n}$

Méthode de point fixe

On transforme l'équation $f(x) = 0$ à une équation équivalente $x = g(x)$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = g(x)$$

. On obtient l'algorithme suivant

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

. Cette méthode converge si $|g'(x)| < 1$

Méthode de Newton

c'est une méthode particulière de la méthode de point fixe avec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Équation différentielle

l'équation differetielle du premier ordre

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Méthode d'Euler

Etant donné $y(x_0) = y_0$ et un pas h on aura

$$x_i = x_0 + i.h \qquad y_{i+1} = y_i + h.F(x_i, y_i)$$

Méthode de Taylor d'ordre 2

Etant donné $y(x_0) = y_0$ et un pas h on aura

$$x_i = x_0 + i.h \qquad y_{i+1} = y_i + h.F(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}_{x_i,y_i} + F(x_i, y_i)\frac{\partial F}{\partial y}_{x_i,y_i}\right)$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$x_i = x_0 + i.h \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[F(x_i, y_i) + F\left(x_i + h, y_i + h.F(x_i, y_i)\right)\right]$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$x_i = x_0 + i.h \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1(x_i, y_i) + 2k_2(x_i, y_i) + 2k_3(x_i, y_i) + k_4(x_i, y_i)\right)$$

avec

$$k_1(x_i, y_i) = hF(x_i, y_i) \quad k_2(x_i, y_i) = hF(x + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3(x_i, y_i) = hF(x + h/2, y_i + k_2/2) \quad k_4(x_i, y_i) = hF(x + h, y_i + k_3)$$

```
      PROGRAM TRAPEZE_SIMPSON
      IMPILICIT NONE
! Programme pour calculer la valeur de pi en evaluant l intégrale
!    I=\int_0^1{(1-x*x)^(1/2)dx} par la méthode de trapèze et de Simpson
!

      REAL*8 a,b,s,x,h,f,s2,pi
      INTEGER i,n
      f(x)=4.0d0*dsqrt(1.0d0-x*x) ! la fonction à intégrer
      pi=DACOS(-1.0d0)            ! la valeur exacte de l intégrale
      WRITE(*,*)'donnez les bornes d integrale'
      READ(*,*)a,b
      WRITE(*,*)'donnez  n'
      READ(*,*)n

c methode de trapeze

      s=(f(a)+f(b))/2
      h=(b-a)/n
      DO i=1,n-1
        x=a+i*h
        s=s+f(x)
      ENDDO
      s=h*s

c methode de simpson 1/3

      s2=f(a)+f(b)
      DO i=2,N-1,2       ! les nombres paires
        x=a+i*h
        s2=s2+2*f(x)
      ENDDO
      DO i=1,n-1,2       ! les nombres impaires
        x=a+i*h
        s2=s2+4*f(x)
      ENDDO
      s2=s2*h/3
      WRITE(*,*)'integrale de la fct f est ',s,s2
      WRITE(*,*)'Les erreurs sont  ',DABS(s-pi),DABS(s2-pi)
      END
```

```
      PROGRAM bisection_newton
!-------------------------------------------------------------------------- |
!  Programme pour calculer les racines de equation f(x)=0                   |
!  en utilisant la méthode de bissection et la méthode de Newton            |
!                               N. Baadji                                   |
!__________________________________________________________________________ |
      IMPLICIT NONE
      REAL*8 a,b,f,x,er,er0,fp,x1,x2,c
      INTEGER n,i,nmax
      f(x)=x*x-2.0d0 ! ici on définit la fonction f(x)
      fp(x)=2*x      ! et sa dérivé
      nmax=10000     ! Maximum nombre d iteration

!
! la méthode de bosection
!

      WRITE(*,*)'Donner les borne de intervale [a,b]'
      READ(*,*) a,b
      WRITE(*,*)'Donner erreur voulue er0'
      READ(*,*) er0
      x1=a
      x2=b
      er=dabs(b-a)
      n=0
      DO WHILE (er>=er0)
        c=(x1+x2)/2.0d0
        IF(f(x1)*f(c)<=0.0d0)THEN
          x2=c
        ELSE
          x1=c
        ENDIF
        er=abs(x1-x2)
        n=n+1
        WRITE(*,*) n,dabs(c-dsqrt(2.0d0)),c
        IF(n>=nmax)EXIT
      ENDDO
!
! La méthode de Newton
!

      WRITE(*,*)'Donner la valeur initiale pour la meth. Newton'
      READ(*,*) c
      er=1.0d0
      n=0
      DO WHILE (er>=er0)
        x=c-f(c)/fp(c)
        er=abs(c-x)
        c=x
        n=n+1
        WRITE(*,*) n, c, dabs(c-dsqrt(2.0d0))
        IF(n>=nmax) EXIT
      ENDDO
      END
```

Examen de Méthodes numériques

2^{eme} année physique (1h30m)

Choisir 3 exercices.

M'Sila le : 28/01/2020

Intégration numérique

Exercice 1:

1. Calculer par la méthode de trapèze la valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^{0.25} \sqrt{x}dx$$

- **a.** En divisant l'intervalle en 5 sous-intervalles.
- **b.** En utilisant un pas $h = 0.025$.

2. Calculer la valeur exacte et l'erreur commise dans chaque cas (**a.** et **b.**). Commenter ces erreurs.

Exercice 2:

Pour dériver la Méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ pour le calcul des intégrales, on met

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{n=0}^{2} w_n f(x_n)$$

avec $x_0 = a$ $x_1 = \dfrac{b+a}{2}$ et $x_2 = b$.

Calculer les coefficients w_0 w_1 et w_2[1]

Résolution d'équations à une variable

Exercice 3:

1. Montrer que si $g(x)$ est fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si $g : [a, b] \longrightarrow [c, d] \subset [a, b]$, [2] alors $\exists\ x \in [a, b]$ tel que $x = g(x)$

2. Vérifier que l'équation $x = e^{-x}$ admette un solution dans l'intervalle $[0, 1]$

Exercice 4:

1. Montrer que l'équation $4x\cos(x) - \sin(x) = 0$ est équivalente à l'équation $x = \arctan(4x)$ (équation rencontrée dans les transitions de phase).

2. Montrer que l'équation $x = \arctan(4x)$ admet une solution dans l'intervalle $[1, 2]$

3. Faire 6 iterations de la méthode du point fixe en partant de $x_0 = 1$

[1] Cette approximation est exacte si $f(x)$ est un polynôme d'ordre inférieur ou égal à 2

[2] $g(x)$ est dite *k-lipschitzienne contractante* si $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k\ |x - y|$. avec $k \in]0, 1[$

Équation différentielle

Exercice 5:

Montrer que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est équivalente à la méthode de Taylor d'ordre 2 pour la résolution de l'équation différentielle $y'(x) = F(x, y)$ (développer la fonction $F(x + h, y + h.F)$).

Exercice 6:

On considère le circuit suivante constitue d'une résistance R un condensateur d'une capacité C et un générateur du tension alternative $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

1. Donner l'expression du courant qui circule dans ce circuit sachant que le condensateur était initialement vide.

2. Ecrire un programme en fortran qui résout l'équation différentielle obtenue.

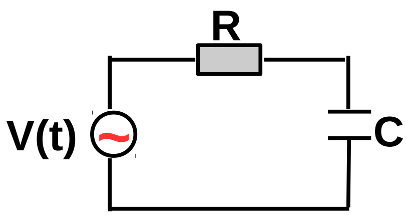

Figure 1: Circuit RC

Bonne Chance

Solution d'examen de Méthodes numériques

2^{eme} année physique (1h30m)

Choisir 3 exercices.

Intégration numérique

Exercice 1: (7 pts)

1. On Calcule par la méthode de trapèze la valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^{0.25} \sqrt{x}dx$$

en utilisant

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

comme $a=0$ $b=0.25$

a. $n=5$ on $h=\dfrac{b-a}{n}=0.05$ avec

$x_0=0$ $x_k=kh \Longleftrightarrow x_1=0.05$ $x_2=0.1$ $x_3=0.15$ $x_4=0.2$ $x_5=b=0.25$ on remplace par ces valeurs on obtient

$$\int_0^{0.25} \sqrt{x}dx \simeq h\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}+\sum_{k=1}^{4}\sqrt{x_k}\right)$$

$$\int_0^{0.25} \sqrt{x}dx \simeq 0.05\left(\frac{\sqrt{0}+\sqrt{0.25}}{2}+\sqrt{0.05}+\sqrt{0.1}+\sqrt{0.15}+\sqrt{0.2}\right)=0.0812$$

b. $h=0.025 \Longrightarrow n=\dfrac{b-a}{h}=10$ de même

$x_0=0$ $x_1=0.025$ $x_2=0.05$ $x_3=0.075$ $x_4=0.1$ $x_5=0.125$ $x_6=0.15$ $x_7=0.175$ $x_8=0.2$ $x_9=0.225$ $x_10=b=0.25$

et

$$\int_0^{0.25} \sqrt{x}dx \simeq h\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}+\sum_{k=1}^{10}\sqrt{x_k}\right)=0.0826$$

2. La valeur exacte est

$$\int_0^{0.25} \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_0^{0.25}=\frac{1}{12}=0.0833$$

et l'erreur commise dans chaque cas

$$\Delta_a=0.0021 \quad \Delta_b=0.0007$$

L'erreur en **b.** est plus petite que celle en **a.** car h est plus petit.

Exercice 2:(7 pts)
Pour dériver la Méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ pour le calcul des intégrales, on met

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{n=0}^{2} w_n f(x_n)$$

avec $x_0 = a \quad x_1 = \dfrac{b+a}{2}$ et $x_2 = b$. et comme cette approximation est exacte si $f(x)$ est un polynôme d'ordre inférieur ou égal à 2 on prend les trois cas $f(x) = 1,\ f(x) = x$ et $f(x) = x^2$ on obtient

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = 1 = w_0 + w_1 + w_2 \tag{1}$$

$$f(x) = x \Longrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b+a}{2} = w_0 a + w_1(\frac{a+b}{2}) + w_2 b \tag{2}$$

$$f(x) = x^2 \Longrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2+a^2+ab}{3} = w_0 a^2 + w_1(\frac{a+b}{2})^2 + w_2 b^2 \tag{3}$$

A partir de ces équations on trouve que $w_0 = w_2 = \dfrac{1}{6},\ \ w_1 = \dfrac{4}{6}$

Résolution d'équations à une variable

Exercice 3:(7 pts)
1. Comme

$$g : [a,b] \longrightarrow [c,d] \subset [a,b]$$

on a alors

$$g(a) \in [c,d] \subset [a,b] \Longrightarrow a \leq g(a)$$

de même

$$g(b) \in [c,d] \subset [a,b] \Longrightarrow g(b) \leq b$$

Si on définit $f(x) = g(x) - x$ et comme $g(x)$ est continue $f(x)$ l'est en plus

$$f(a) = g(a) - a \leq 0 \qquad f(b) = g(b) - b \geq 0$$

donc

$$f(a)f(b) \leq 0 \Longrightarrow \exists x \in [a,b] \text{tel que} f(x) = 0$$

et donc

$$f(a)f(b) \leq 0 \Longrightarrow \exists x \in [a,b] \text{tel que } g(x) = x$$

2. La fonction $g(x) = e^{-x}$ est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,1]$ et en plus $g(0) = 1\ 0 < g(1) = 1/e < 1$ et donc $g : [0,1] \longrightarrow [1/e,1] \subset [0,1]$ et par conséquence $x \in [0,1]$tel que $e^{-x} = x$

Exercice 4:(7 pts)
1.

$$4x\cos(x) - \sin(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x = \tan(x) \Longleftrightarrow x = \arctan(4x)$$

2. Soit $f(x) = x - \arctan(4x)$ $f(1) = -0.3258 < 0 <$ $f(2) = 0.5536 > 0$

$$f(a)f(b) \leq 0 \Longrightarrow \exists x \in [a, b] \text{tel que } f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \arctan(4x)$$

3.

- 1 1.32581
- 2 1.38442
- 3 1.39214
- 4 1.39311
- 5 1.39323
- 6 1.39325

Équation différentielle

Exercice 5: (7 pts) Dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, on a

$$x_i = x_0 + i.h \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[F(x_i, y_i) + F\left(x_i + h, y_i + h.F(x_i, y_i)\right)\right]$$

en développant $F\left(x_i + h, y_i + h.F(x_i, y_i)\right)$ au voisinage de (x_i, y_i) on obtient

$$F\left(x_i + h, y_i + h.F(x_i, y_i)\right) = F\left(x_i, y_i\right) + \frac{\partial F}{\partial x} + F(x_i, y_i)\frac{\partial F}{\partial y}$$

et on obtient la méthode de Taylor d'ordre 2 Etant donné $y(x_0) = y_0$ et un pas h on aura

$$x_i = x_0 + i.h \qquad y_{i+1} = y_i + h.F(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}_{x_i, y_i} + F(x_i, y_i)\frac{\partial F}{\partial y}_{x_i, y_i}\right)$$

Exercice 6:(7 pts)
On applique la loi des mailles pour obtenir

$$V(t) = R.I + \frac{Q}{C} \Longleftrightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{V_0}{R}\cos(\omega t)$$

car $I = \dfrac{dQ}{dt}$. On obtient donc un équation différentielle d'ordre 1 avec la condition initiale $Q(t = 0) = 0$.

2.

- PROGRAM RC
- IMPLICIT NONE
- REAL*8 v0,r,c,w,t,h,k1,k2,k3,k4,q,f
- INTEGER i,n
- f(r,c,v0,w,t,q)=(v0/r)*DCOS(w*t)-q/(r*c)
- WRITE(*,*) 'donner v0,r,c,w,h,n'
- READ(*,*) v0,r,c,w,h,n
- OPEN(2,FILE='charge')
- t=0
- q=0
- DO i=1,n
- k1=h*f(r,c,v0,w,t,q)
- k2=h*f(r,c,v0,w,t+h/2,q+k1/2)
- k3=h*f(r,c,v0,w,t+h/2,q+k2/2)
- k2=h*f(r,c,v0,w,t+h,q+k3)
- q=q+(k1+2*k2+2*K3+K4)/6
- t=t+h
- WRITE(2,*)t,q
- ENDDO
- END PROGRAM
