فصل 5 :

نظرية جمع العزوم الحركية

1) ربط عزمين حركيين :

α) النظرية الكلاسيكية : لدينا $\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

نعتبر جملة كلاسيكية لعزمين $\vec{J_1}$ و $\vec{J_2}$:

* العزم الكلي $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$

* الإسقاط على $\vec{oz}$: $J_z = J_{1z} + J_{2z}$

طويلة $\vec{J}$: $J^2 = \vec{J}\cdot\vec{J} = J_1^2 + J_2^2 + 2J_1J_2\cos\theta$

إذا $\theta = 0$: $J^2 = (J_1 + J_2)^2$

$\theta = \pi$: $J^2 = (J_1 - J_2)^2$

إذن $|J_1 - J_2| \leq J \leq (J_1 + J_2)$

β) النظرية الكمية : أساس مرتبط وعزم أساس غير مرتبط :

نعتبر جملة متكونة من بروتون ونترون (Deuton) :

$\vec{S_1} = \frac{\vec{1}}{2}$. $\vec{S_2} = \frac{\vec{1}}{2}$

$\vec{J_1} = \vec{S_1} + \vec{L_1}$, $\vec{J_2} = \vec{S_2} + \vec{L_2}$.

$\vec{J} = \vec{S_1} + \vec{S_2} + \vec{L}$ / $\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2}$.

ماهي القيم الممكنة لـ $\vec{J}$ والحالات $|j,m\rangle$

نبدأ بالمسألة البسيطة وهي جمع عزمين حركيين $\vec{J_1}$ و $\vec{J_2}$.

إذا كان تبادل التأثير بين الجزيئات المكونين للجملة يترك المركبات J_1^2 ، J_{1z} ، J_2^2 ، J_{2z} ثوابت للحركة فإننا نستطيع تشكيل المجموعة التالية من المؤثرات المتبادلة (E.C.O.C) : $\{H, J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$

ولتكن الأشعة الذاتية التالية مشتركة بين هذه المؤثرات

$$|\alpha\, j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = \sum_{\beta}\sum_{\gamma} |\beta\, j_1 m_1\rangle |\gamma\, j_2 m_2\rangle$$

فيما يلي نحذف الرمز α.

وحيث :

$$J_1^2 |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$$

$$J_{1z} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$$

$$J_2^2 |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$$

$$J_{2z} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle.$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \in V_{j_1} \otimes V_{j_2}$$ و

بعد الأساس $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$ هو $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

ويسمى هذا الأساس بالأساس غير المترابط (base découplée)

لتكن المجموعة (ECOC) التالية: $\{H, J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$

والأساس المتكون من الأشعة التالية: $\{|(j_1 j_2) j m\rangle\}$.

$$J_1^2 |(j_1 j_2) j m\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |(j_1 j_2) j m\rangle$$
$$J_2^2 |(j_1 j_2) j m\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |(j_1 j_2) j m\rangle$$
$$J^2 |(j_1 j_2) j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |(j_1 j_2) j m\rangle$$
$$J_z |(j_1 j_2) j m\rangle = \hbar m |(j_1 j_2) j m\rangle .$$

ويسمى الأساس $\{|(j_1 j_2) j m\rangle\}$ بالأساس المترابط (base couplée).

2- معاملات Clebsch-Gordon : (C.G).

1) تعريفها: يوجد تحويل أحادي يربط بين أساسين:

$$|(j_1 j_2) j m\rangle = \mathbb{1}_{nc} |(j_1 j_2) j m\rangle$$
$$= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | (j_1 j_2) j m\rangle$$

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum \mathbb{1}_c |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$
$$= \sum_j \sum_{m=-j}^{j} |(j_1 j_2) j m\rangle \langle (j_1 j_2) j m | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

والمعاملات $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | (j_1 j_2) j m\rangle$ و $\langle (j_1 j_2) j m | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ تسمى معاملات Clebsch-Gordon (CG) ونسبها الكتابة:

$$\boxed{CG = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j m\rangle}$$

3) قواعد الإنتقاء (Règle de Selection):

• جمع الفروم المغناطيسية:

$$J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle .$$
$$|jm\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} (CG) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$
$$J_z |jm\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} (CG)(J_{1z} + J_{2z}) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$
$$m\hbar |jm\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} (CG)(m_1+m_2)\hbar |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle .$$

$$\Rightarrow \boxed{m = m_1 + m_2}$$

. القاعدة الثانية : $-j \le m \le j$

$m_{max} = j \quad , \quad m_{1max} = j_1 \quad , \quad m_{2max} = j_2$

إذن من القاعدة الأولى : $j_{max} = j_1 + j_2$

. من أجل j مثبت ، نستطيع تعيين فضاء جزئي V_j من فضاء مطبوق له بعد $(2j+1)$ واتحاد كل الفضاءات الجزئية تقيم ممثلة لـ j يعطي الفضاء V نفسه

$$V = V_{j_1} \otimes V_{j_2}$$
$$= V_{j_{max}} \oplus V_{j_{max}-1} \oplus V_{j_{max}-2} \oplus \dots \oplus V_{j_{min}}$$

إذن :
$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} (2j+1)$$

نكتب :
$$\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} (2j+1) = \sum_{0}^{j_{max}} (2j+1) - \sum_{0}^{j_{min}-1} (2j+1)$$

نستعمل العلاقة التالية :
$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$2\left\{ \sum_{0}^{j_{max}} j - \sum_{0}^{j_{min}-1} j \right\} = 2\left\{ \frac{j_{max}(j_{max}+1)}{2} - \frac{j_{min}(j_{min}-1)}{2} \right\}$$
$$= j_{max}(j_{max}+1) - j_{min}(j_{min}-1)$$

وإذن :
$$\sum_{j_{min}}^{j_{max}} (2j+1) = j_{max}(j_{max}+1) - j_{min}(j_{min}-1) + (j_{max}+1) - j_{min}$$
$$= (j_{max}+1)^2 - j_{min}^2$$

$$(j_{max}+1)^2 - (2j_1+1)(2j_2+1) = j_{min}^2$$

$$(j_1+j_2+1)^2 - (2j_1+1)(2j_2+1) = j_{min}^2$$

$$j_{min}^2 = j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1 + 2j_2 + 2j_1j_2 - 4j_1j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1$$
$$= j_1^2 + j_2^2 - j_1j_2 = (j_1 - j_2)^2$$

إذن : $j_{min} = |j_1 - j_2|$

$$\boxed{|j_1 + j_2| \le j \le (j_1 + j_2)}$$

مثال : الدوتون : Le Deuton

$$(p,n) \longrightarrow \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

من قواعد الانتقاء : $|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2$

$$m = m_1 + m_2$$

بما أن $S_1 = 1/2$ ، $S_2 = 1/2$ فإن : $0 \leq S \leq 1$

$\Leftarrow$ $S = 0 \to m_s = 0$ و $S = 1 \to m_s = -1,\ m_s = 0,\ m_s = 1$

إذن الأشعة الذاتية المكلفة هي :

$S = 0 \Leftarrow$ $|S, m_s\rangle = |0, 0\rangle$ (وحيد Singlet).

$S = 1 \Leftarrow$ $|S, m_s\rangle = |1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,+1\rangle$ (ثلاثية triplet)

نستعمل الآن معاملات (CG) كتابة الأشعة $|S m_s\rangle$ بدلالة حالات السبين للبروتون والنترون.

$$|S, m_s\rangle = \mathbb{1}\, |S, m_s\rangle$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle \langle s_1 m_1 s_2 m_2 | S m_s\rangle$$

$$|S, m_s\rangle = \sum_{m_1 = \pm 1/2} \sum_{m_2 = \pm 1/2} (CG)\, |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle \quad \Big|\ m_1 + m_2 = 0$$

حيث $CG = \langle s_1 m_1 s_2 m_2 | S m_s\rangle$

$$|0,0\rangle = \sum_{m_1 = \pm 1/2} \sum_{m_2 = \pm 1/2} \langle \tfrac{1}{2} m_1 \tfrac{1}{2} m_2 | 0 0\rangle \, |\tfrac{1}{2} m_1 \tfrac{1}{2} m_2\rangle \cdot \delta_{m_1, -m_2} \quad \Big/ \begin{matrix} m_1 + m_2 = 0 \\ m_1 = -m_2 \end{matrix}$$

$$= \sum_{m_1 = \pm 1/2} \langle \tfrac{1}{2} m_1 \tfrac{1}{2}, -m_1 | 0 0\rangle \, |\tfrac{1}{2} m_1 \tfrac{1}{2}, -m_1\rangle$$

$$= \underbrace{\langle \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} | 0 0\rangle}_{CG} |\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2}\rangle + \underbrace{\langle \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} | 0 0\rangle}_{CG} |\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2}\rangle$$

يبقى حساب :

$$(CG)_1 = \langle \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} | 0 0\rangle$$

$$(CG)_2 = \langle \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} | 0 0\rangle$$

* نعرف أن $\{|S m_s\rangle\}$ هو أساس (مترابط)

- $\langle S, m_s' | S, m_s\rangle = \delta_{m_s' m_s}$
- $\sum_{m_s} |S m_s\rangle \langle S m_s| = \mathbb{1}$

* نعرف كذلك أن $\{|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle\}$ يشكل أساسا (غير مترابط)

- $\langle s_1 m_1' s_2 m_2' | s_1 m_1 s_2 m_2\rangle = \delta_{m_1' m_1} \cdot \delta_{m_2' m_2}$
- $\sum_{m_1 m_2} |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle \langle s_1 m_1 s_2 m_2| = \mathbb{1}$.

ولدينا: $x_m = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$

نكتب: علاقة معاملات من أجل J_-:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sqrt{(j\pm m)(j\mp m+1)}\,\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j\, m\mp 1\rangle = \\ &\sqrt{(j_1\mp m_1)(j_1\pm m_1+1)}\,\langle j_1, m_1\pm 1, j_2 m_2 | j\, m\rangle \\ &\mp\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\,\langle j_1 m_1, j_2, m_2\pm 1 | j\, m\rangle.\end{aligned}}$$

تمرين: نعتبر جسيم له عزم سبيني مداري $\vec{L}^2$ و سبين $\vec{S}=\frac{1}{2}$ ونريد حساب معاملات (CG) التي تمكن من العبور من الأساس المرتبط $\{|jm\rangle\}$ الى الأساس غير المرتبط $\{|l\, m_l\, \frac{1}{2}\, m_s\rangle\}$.

تطبيق: $l=1$

الحل:

$$|jm\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l, m_l, \tfrac{1}{2}\, m_s | j\, m\rangle\, |l\, m_l, \tfrac{1}{2}\, m_s\rangle \quad \text{---}①$$

$m_l + m_s = m$

نأخذ $m_s = \frac{1}{2}$. لدينا كذلك:

$$|l\, m_l, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{jm} \langle jm | l\, m_l\, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle\, |jm\rangle \quad \text{---}②$$

نضع: $J_+|jm\rangle = x_m|j, m+1\rangle$ / $L_+|l m_l, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = x_{m_l}|l, m_l+1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$S_+|l, m_l, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = 0.$

اذن:

$$J_+|jm\rangle = \sum_{m_l} \langle l m_l, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2} | jm\rangle (L_+ + S_+)\,|l m_l, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \sum_{m_l} \langle l m_l\, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2} | jm\rangle\, [x_{m_l}|l\, m_l+1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle].$$

$$\boxed{x_m |j, m+1\rangle = \sum_{m_l} x_{m_l} \langle l m_l, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2} | jm\rangle\, |l, m_l+1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle} \quad \text{---}③$$

ولدينا من ②

$$\boxed{x_{m_l} |l, m_l+1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{jm} x_m \langle jm | l m_l, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\, |j, m+1\rangle} \quad \text{---}④$$

نضرب طرفي ④ في $\langle l+\frac{1}{2}, m_l+\frac{3}{2}|$

$$x_{m_l}\langle l+\tfrac{1}{2}, m_l+\tfrac{3}{2} | l\, m_l+1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle =$$

$$\sum_{jm} x_m \langle jm | l\, m_l, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle \langle l+\tfrac{1}{2}, m_l+\tfrac{3}{2} | j, m+1\rangle =$$

$$\sum_{jm} x_m \langle jm | l\, m_l, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\, \delta_{j, l+\frac{1}{2}} \cdot \delta_{m+1, j+\frac{3}{2}}$$

تابع: 2/ أعد نفس التمرين من أجل $m_s = -\frac{1}{2}$

* علاقات تعامد معاملات (CG): المعاملات (CG) هي معاملات تحويل أحادي ومنه تتحقق علاقات التعامد:

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \{ j_1 j_2 j \}$$

حيث:

$$\{ j_1 j_2 j \} = \begin{cases} 1 & |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \\ 0 & \end{cases}$$

هناك علاقة تعامد ثانية:

$$\sum_{jm} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j m | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

المعاملات (3jm) لـ Wigner:

$$(3jm) = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \frac{\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle}{\sqrt{2 j_3 + 1}}$$

بعض خواص المعاملات (3jm):

① : $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ ② صمود في تبديل دوري للأعمدة.

③ نضرب في $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$ عندما نبدل عمودين.

④ " " " إشارات العزوم المغناطيسية m_1, m_2, m_3

⑤ $(j_1 + j_2 + j_3)$ و $(j_i \pm m_i)$ هي أعداد صحيحة.

العلاقات التالية محققة في آن واحد.

$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ $\qquad$ $|j_2 - j_3| \leq j_1 \leq j_3 + j_2$

$|j_1 - j_3| \leq j_2 \leq j_1 + j_3$

تمرين: برهن على الخواص (b)، (c) و (d)

علاقة تعامد المعاملات (3jm).

$$\sum_{m_1 m_2} \Big(\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \end{matrix}$$