فصل 1: نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن

1- المسألة: البحث عن حلول معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن.

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

نعتبر هاملتوني من الشكل

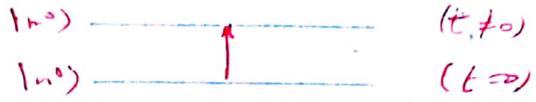
$$H = H_0 + H_1(t)$$

$H_1(t)$ متعلق بالزمن. H_0 مستقل عن الزمن ونعرف حلول

عند اللحظة $t=0$ نفرض أن الجملة موجودة في الحالة $|n^0\rangle$ حيث

$$H_0|n^0\rangle = E_{n^0}|n^0\rangle$$

- ما هي احتمال إيجاد الجملة عند لحظة $t\neq 0$ في الحالة $|m^0\rangle$ حيث $n^0 \neq m^0$



2- الرتبة واحدة لنظرية الاضطرابات:

$H_1(t)$ اضطراب متعلق بالزمن.

لنكتب حالة الجملة بالحالة:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)|n^0\rangle$$

* $H_1(t)=0$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar\sum_n \dot{C}_n(t)|n^0\rangle$$

$$H_0|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)E_{n^0}|n^0\rangle$$

إذن $i\hbar \dot{C}_n(t) = C_n(t)E_{n^0}$

(*) ومنه $C_n(t) = C_n(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t} \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}|n^0\rangle$

* $H_1(t)\neq 0$: في مكان الثابت نقترح العلاقة التالية:

$$C_n(t) = d_n(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_n d_n(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}|n^0\rangle$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar\sum_n\left[\dot{d}_n(t) - \frac{i}{\hbar}E_{n^0}d_n\right]e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}|n^0\rangle$$

$$H(t)|\psi(t)\rangle = (H_0 + H_1(t))|\psi(t)\rangle$$

$$= \sum_n d_n(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}E_{n^0}|n^0\rangle + \sum_n d_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}H_1(t)|n^0\rangle$$

إذن:

$$i\hbar\sum_n \dot{d}_n(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}|n^0\rangle = \sum_n d_n(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}H_1(t)|n^0\rangle$$

بضرب الطرفين في $\langle m^0|e^{\frac{i}{\hbar}E_{m^0}t}$

$$i\hbar\sum_n \dot{d}_n\langle m^0|e^{\frac{i}{\hbar}(E_{m^0}-E_{n^0})t}|n^0\rangle = \sum_n d_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_{m^0}-E_{n^0})t}\langle m^0|H_1(t)|n^0\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \dot{d}_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_{m^0}-E_{n^0})t}\delta_{mn} = \sum_n d_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_{m^0}-E_{n^0})t}\langle m^0|H_1(t)|n^0\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \dot{d}_m(t) = \sum_n d_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_{m^0}-E_{n^0})t}\langle m^0|H_1(t)|n^0\rangle} \quad \ldots (**)$$

نعرف تردد بوهر :

$$\omega_{mn} = \frac{E_{m^0}-E_{n^0}}{\hbar}$$

عند اللحظة $t=0$ الجملة موجودة في الحالة $|i^0\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n d_n(0)|n^0\rangle = |i^0\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{d_n(0) = \delta_{n,i}}$$

نريد البحث عن $d_n(t\neq 0)$:

نقترح الحل التالي :

$$d_m(t) = d_m^{(0)}(t) + d_m^{(1)}(t) + \dots$$

$$d_m(t) = \sum_{r=0}^{\infty} d_m^{(r)}(t)$$

نعوض في العلاقة $(**)$ نجد :

$$\boxed{i\hbar \dot{d}_m^{(r)}(t) = \sum_n \langle m^0|H_1(t)|n^0\rangle e^{i\omega_{mn}t} d_n^{(r-1)}(t)}$$

الرتبة 1 : $r=1 \Rightarrow$ الرتبة 1

$$i\hbar \dot{d}_m^{(1)}(t) = \sum_n \langle m^0|H_1(t)|n^0\rangle e^{i\omega_{mn}t} d_n^{(0)}(t)$$

والرتبة (0) تعني غياب الاضطراب :

$$d_n^{(0)}(t) = d_n(0) = \delta_{n,i}$$

$$i\hbar \dot{d}_n^{(1)}(t) = \sum_n \langle m^0|H_1(t)|n^0\rangle e^{i\omega_{mn}t}\,\delta_{n,i}$$

$$i\hbar \dot{d}_n^{(1)}(t) = \cancel{\sum_n}\langle m^0|H_1(t)|i\rangle e^{i\omega_{mi}t}$$

$$d_n^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar}\int_0^t \langle m^0|H_1(t)|i\rangle e^{i\omega_{mi}t'}dt'$$

إذن نعوض $|m^0\rangle = |f\rangle$:

$$\boxed{d_f(t) = \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle f|H_1(t)|i\rangle e^{i\omega_{fi}t}dt}$$

ومنه نجد التابع الموجي :

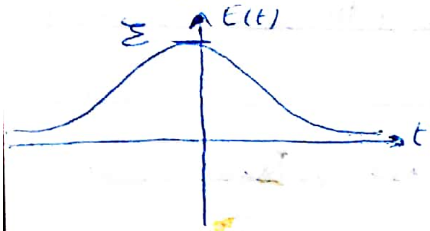
$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_n \left[\delta_{n,i} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt\,\langle n|H_1(t)|i\rangle e^{i\omega_{ni}t}\right] e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n^0}t}|n^0\rangle}$$

تطبيق :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E} x\, e^{-t^2/\tau^2}$$

الحقل الكهربائي هو : $E(t) = \mathcal{E}\, e^{-t^2/\tau^2}$

$$\lim_{t\to\pm\infty} E(t) = 0 \quad , \quad \lim_{\tau\to\pm\infty} E(t) = \mathcal{E}$$



$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$H_1(t) = -q\mathcal{E} x\, e^{-t^2/\tau^2}$$

نفرض أن الجملة عند اللحظة $t=-\infty$ الموجودة في الحالة 0 للهزاز التوافقي

$$H_0|0\rangle = E_0|0\rangle \quad / \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\omega_{n0} = \frac{E_{n0}-E_0}{\hbar} = \frac{\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) - \hbar\omega/2}{\hbar} \Rightarrow \omega_{n0} = \omega n$$

نحسب $d_n(\infty)$:

$$d_n(\infty) = \delta_{n,0} - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle n^0|H_1(t)|0\rangle\, e^{in\omega t}\, dt$$

$$d_n(\infty) = +\frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle n^0|x|0\rangle\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2} + in\omega t}\, dt$$

نكتب x بدلالة a, a^+ :

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)$$

$$x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle$$

$$\langle n^0|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n^0|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\delta_{n1}$$

إذن : $d_n(\infty) = +\frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \delta_{n1}\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2} + in\omega t}$

$$d_n(\infty) = \frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t}$$

$$, \quad -\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t = -\frac{1}{\tau^2}\left(t - \frac{i\omega\tau^2}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2\tau^2}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t} = \tau\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$

$$d_n(\infty) = \frac{iq\mathcal{E}\tau}{\hbar}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2m\omega}}\, e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$

$d_n(\infty)$ تمثل سعة الانتقال من الحالة $|0\rangle$ للهزاز التوافقي عند اللحظة $t=-\infty$ إلى الحالة $|n\rangle$ للهزاز التوافقي عند $t=+\infty$

احتمال الانتقال هو :

$$P_{01}(-\infty,+\infty) = |d_n(\infty)|^2 = \frac{q^2\mathcal{E}^2\tau^2\pi}{2m\omega\hbar}\, e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}}$$

عندما $\tau = 0$ وجدنا أن الحقل الكهربائي المتغير بالزمن يصبح ثابت وهذا يعطي إحتمال انتقال مساويا للصفر

تمرين: نعتبر ذرة الهيدروجين في الحالة الأساسية $|100\rangle$ عند اللحظة $t=-\infty$. نطبق حقل كهربائي:

$$\vec{E}(t) = (\hat{k}\mathcal{E})\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$$

حتى اللحظة $t=+\infty$. برهن أن إحتمال إيجاد ذرة الهيدروجين في إحدى الحالات $n=2$ ($|2lm\rangle$) هو:

$$P_{0\to 2}(-\infty,+\infty) = \left(\frac{e\mathcal{E}}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{2^{15}a_0^2}{3^{10}}\right) \pi \tau^2 e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}}$$

حيث:

$$\omega = \frac{1}{\hbar}\left(E_{2lm} - E_{100}\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(-\frac{me^4}{2\hbar^2(4)} + \frac{me^4}{2\hbar^2}\right) \Rightarrow \omega = \frac{3me^4}{8\hbar^3}$$

الاضطراب الكظيمي :

نعتبر هاملتونيان يتغير ببطء من $H(0)$ الى $H(\tau)$.
اذا كانت الجملة عند اللحظة $t=0$ في الحالة الذاتية $|n(0)\rangle$ لـ $H(0)$
ما هي حالتها عند اللحظة $t=\tau$ عندما تكون موصوفة بالهاملتوني $H(\tau)$ ؟ . تنص النظرية الكظيمية انه اذا كانت الجملة في الحالة $|n(0)\rangle$ عند $t=0$ فانها تتطور نحو الحالة الذاتية $|n(\tau)\rangle$ لـ $H(\tau)$.

$$H(0)\,|n(0)\rangle = E_{n(0)}\,|n(0)\rangle$$

$\Big\downarrow$ تطور بطيء

$$H(\tau)\,|n(\tau)\rangle = E_{n(\tau)}\,|n(\tau)\rangle$$

نأخذ مثال جسيم موجود داخل علبة طولها $L(0)$ ، نفرض أن عرض العلبة دالة للزمن ويتغير ببطء حتى يصبح $L(\tau)$
كيف نميز هذا التغير ببطء ؟

• اعتبارات شبه كلاسيكية :

$$p \simeq \frac{\hbar}{L} \quad , \quad L \simeq vT$$

$$T \simeq \frac{L}{v} = \frac{mL}{mv} = \frac{mL}{p} = \frac{mL^2}{pL} = \frac{mL^2}{\hbar}$$

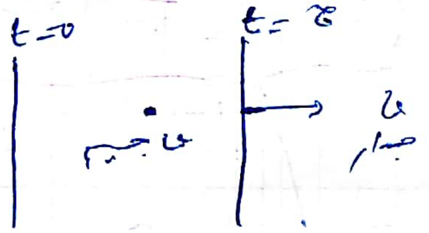
تمدد العلبة

$$\delta(\Delta L) = \frac{\Delta L}{\Delta T}\cdot\Delta T = \frac{dL}{dt}\,T = \frac{dL}{dt}\cdot\frac{mL^2}{\hbar}$$

نميز التغير ببطء عندما : $\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \ll 1$

لدينا ، $\frac{dL}{dt} = v_{\text{الجدار}}$, $\frac{mL}{\hbar} = \frac{1}{v_{\text{جسيم}}}$

$$\boxed{\left|\frac{v_{\text{جدار}}}{v_{\text{جسيم}}}\right| \ll 1}$$



ونكتب المعيار السابق كما يلي : $T \simeq \frac{1}{\omega_{min}}$ حيث $\boxed{\omega_{min} = \min \frac{E_f^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}}$

• نبرهن على العلاقة السابقة

$$H(t) = H_0 + H_1(t)$$

H_0 : الجسيم داخل علبة جدرانها ثابتة .
H_1 : يعبر عن تمدد جدار العلبة ببطء .

اذا ، $E_n^{(0)} = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \Longleftarrow E_f^{(0)} - E_i^{(0)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(f^2 - i^2)$

$$\omega_{min} \simeq \left(\frac{mL^2}{\hbar}\right)^{-1} \Longrightarrow \boxed{T \simeq \frac{mL^2}{\hbar}}$$

مثال: هزاز توافقي داخل حقل كهربائي :

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - e\xi x e^{-t^2/\tau^2} \qquad -\infty < t < \infty$$

إذا كانت الجملة تتغير بشكل طفيف فإن العلاقة : $P_{0\to1}$ أي معدوم

البرهان: لنحسب ω_{min} $\qquad \omega_{min} \sim \frac{E_1^{(0)} - E_0^{(0)}}{\hbar}$

$$= \frac{\hbar\omega(1+\frac{1}{2}) - \hbar\omega(0+\frac{1}{2})}{\hbar} = \omega$$

الهزاز توافقي ($\omega_{min} \sim \omega$)

تطور طفيف مميز بالعلاقة . $T \sim \frac{1}{\omega}$

عندما تقوم بدورة كاملة . $\qquad H(t) = H_0 - e\xi x . e^{-\frac{1}{(\omega\tau)^2}}$

$= H_0 - e\xi x .$ $\qquad$ أي $\quad \omega\tau \to \infty \Rightarrow P_{0\to1} \to 0$

* الاضطراب الدوري

$$H(t) = H_0 + H_1(t) \quad , \quad H_1(t) = H_1 e^{-i\omega t}$$

$$d_f(t) = \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle f^0 | H_1(t) | i^0 \rangle e^{i\omega_{fi} t'} dt'$$

$$= \frac{-i}{\hbar}\int_0^t \langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'} dt'$$

$$= \frac{-i}{\hbar}\langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle \int_0^t e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'} dt'$$

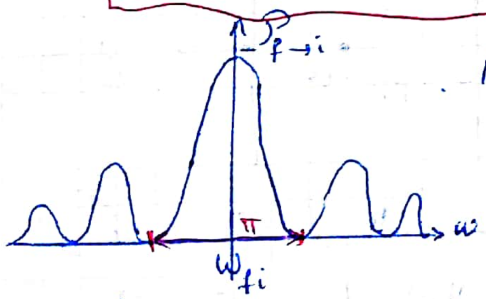
$$= \frac{-i}{\hbar}\langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle \frac{1}{i(\omega_{fi}-\omega)}\left(e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} - 1\right)$$

$$d_f(t) = \frac{-1}{\hbar(\omega_{fi}-\omega)}\langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle \left(e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} - 1\right)$$

. إحتمال الإنتقال من الحالة $i \to f$

$$P_{f\to i}(t) = |d_f(t)|^2$$

$$\boxed{P_{f\to i} = \frac{1}{\hbar^2}|\langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle|^2 \left[\frac{\sin(\omega_{fi}-\omega)\frac{t}{2}}{(\omega_{fi}-\omega)\frac{t}{2}}\right]^2 t^2}$$



هذه العلاقة تسمى بالقاعدة الذهبية لـ Fermi .

الدالة $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ لها قيم معتبرة بجوار x

ولها عرض $\Delta x \simeq \pi$

إذن :

$$|(\omega_{fi}-\omega)\frac{t}{2}| \leq \pi$$

$$E_f^{(0)} t = (E_i^0 t + \hbar\omega t) \pm 2\hbar\pi$$

$$E_f^{(0)} - E_i^{(0)} = \hbar\omega \pm \frac{2\hbar\pi}{t} = \hbar\omega\left(1 \pm \frac{2\pi}{\omega t}\right)$$

نعتبر الآن فترة زمنية طويلة $\omega t \gg 2\pi$.

$$* \quad d_f(t) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_{-T/2}^{T/2} \langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle \, e^{i(\omega_{fi} - \omega)t'} dt' \quad \text{---} \circledast$$

$$= -\frac{2\pi i}{\hbar} \langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle \, \delta(\omega_{fi} - \omega)$$

$$P_{i\to f} = |d_f(t)|^2 = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)^2 |\langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle|^2 \, (\delta(\omega_{fi} - \omega))^2 \; ?$$

حيث δ^2 دالة غير معرفة لأن δ هو توزيع وليس دالة.

لحل المسألة نرجع إلى العلاقة $\circledast$.

$$\delta^2(\omega_{fi} - \omega) = \delta(\omega_{fi} - \omega) . \delta(\omega_{fi} - \omega)$$

$$= \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{(\omega_{fi} - \omega)t} dt\right) \delta(\omega_{fi} - \omega)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt \qquad (\omega_{fi} = \omega)$$

$$\delta^2(\omega_{fi} - \omega) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{T}{2\pi}\right)$$

إذن:

$$P_{i\to f} = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi T}{\hbar^2} |\langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle|^2$$

نحسب احتمال الانتقال المتوسط (في وحدة الزمن).

$$\boxed{R_{i\to f} = \frac{P_{i\to f}}{T} \qquad R_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle|^2 \, \delta(E_f^0 - E_i^{(0)} - \hbar\omega)}$$

$R_{i\to f}$ يعبر عن عدد الانتقالات بين الحالتين i و f في دورة واحدة

تمارين:

تمرين 1: هزاز توافقي موجود بالحالة الأساسية لـ $H = H_0 - fx$

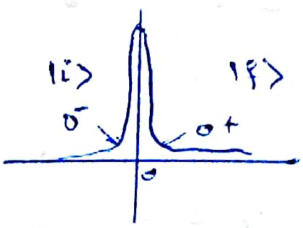
إذا حذفنا H_1 بشكل مفاجئ عند اللحظة $t=0$. برهن أن:

$$P_{0\to n} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad \text{poisson توزيع} \qquad \lambda = \frac{f^2}{2m\omega^2\hbar} \qquad \text{برهن}$$

للحساب استعمل علاقة BCH.

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \qquad \begin{pmatrix} [A,[A,B]] = 0 \\ [B,[A,B]] = 0 \end{pmatrix}$$

تمرين 2: نأخذ $H_1(t) = H_1 . \delta(t)$



برهن أن: $d_f = \frac{-i}{\hbar} \langle f^0 | H_1 | i^0 \rangle$

* الاضطرابات عند رتب حلب :

أ) تمثيل شرودينغر (Schrodinger picture).

$$|\psi(t)\rangle \longrightarrow |\psi_s(t)\rangle$$

كل الفيزياء في هذا التمثيل محصورة في العنصر المصفوفي $\langle \omega_s|\psi_s(t)\rangle$ الذي يعطينا الاحتمال :

$$P(\omega, t) = |\langle \omega_s|\psi_s(t)\rangle|^2$$

حيث القيم الحقيقية لها معينة لمعادلة القيم الذاتية التالية.

$$\Omega_s(X, P)|\omega_s\rangle = \omega_s|\omega_s\rangle$$

حيث $\{|\omega_s\rangle\}$ تشكل أساس متعامد.

بما أن X_s و P_s مستقلان عن الزمن فإن Ω_s و $|\omega_s\rangle$ مستقلان كذلك عن الزمن.

وتطور $|\psi_s(t)\rangle$ مع الزمن معطى بمعادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi_s(t)\rangle = H_s|\psi_s(t)\rangle$$

$$= (H_s^0 + V_s(t))|\psi_s(t)\rangle.$$

من نظرية اهرنفست لدينا :

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle \Omega_s\rangle = \langle [\Omega_s, H_s]\rangle.$$

نعرف الآن المنشر (propagateur) من الحالة $|\psi_s(t_0)\rangle$ إلى الحالة $|\psi_s(t)\rangle$.

$$|\psi_s(t)\rangle = U_s(t, t_0)|\psi_s(0)\rangle$$

لنحسب $U_s(t, t_0)$.

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_s(t, t_0)\rangle = i\hbar \frac{dU_s(t, t_0)}{dt}|\psi_s(t_0)\rangle$$

$$= H_s U_s(t, t_0)|\psi_s(t_0)\rangle.$$

إذن بما أن $|\psi_s(t_0)\rangle$ حالة كيفية.

$$i\hbar \frac{dU_s}{dt} = H_s U_s$$

خواص U_s :

- $U_s^+ U_s = U_s U_s^+ = 1$
- $U_s(t_3, t_2)\, U_s(t_2, t_1) = U_s(t_3, t_1)$
- $U_s(t, t) = \mathbb{1}$
- $U^+(t_2, t_1) = U(t_1, t_2)$

14) تمثيل Heisenberg : (Heisenberg picture)

لنفرض أن $V_s(t)=0$ ونرمز للمنشر في هذه الحالة بـ $U_s^0(t,t_0)$

$$i\hbar \frac{dU_s^0}{dt} = H_s^0 U_s^0 = H_s^0 U_s^0$$

H_s^0 مستقل عن الزمن – إذن :

$$U_s^0(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_s^0(t-t_0)}$$

نعرف الآن شعاع جديد بـ :

$$\boxed{|\psi_I(t)\rangle = [U_s^0(t,t_0)]^+ |\psi_s(t)\rangle}$$

عندما $t=t_0$:

$$|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi_s(t_0)\rangle$$

نحسب $\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{dU_s^{0+}}{dt}|\psi_s(t)\rangle + i\hbar U_s^{0+}\frac{d}{dt}|\psi_s(t)\rangle$$

$$= -U_s^{0+}H_s^0|\psi_s(t)\rangle + U_s^{0+}(H_s^0+V_s(t))|\psi_s(t)\rangle$$

$$= U_s^{0+}V_s(t)|\psi_s(t)\rangle$$

$$= U_s^{0+}V_s(t)\,U_s^0 U_s^{0+}|\psi_s(t)\rangle$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = U_s^{0+}V_s\,U_s^0|\psi_I(t)\rangle$$

ليكن $V_I(t) = [U_s^0(t,t_0)]^+ \cdot V_s(t) \cdot [U_s^0(t,t_0)]$

ومنه :

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = V_I(t)\,|\psi_I(t)\rangle}$$

هذه المعادلة تعطي التطور في الزمن للشعاع $|\psi_I(t)\rangle$ فقط بدلالة الطاقة الكامنة لتبادل التأثير $V_I(t)$ ، ونسمي أحيانا هذا التمثيل تمثيل تبادل التأثير. (Interaction picture)

* نبين أن تمثيل شرودينغر و تمثيل تبادل التأثير متكافئين.

$$P(\omega,t) = |\langle\omega_s|\psi_s(t)\rangle|^2$$

$$= |\langle\omega_s|U_s^0(t,t_0)|\psi_I(t)\rangle|^2$$

$$P(\omega,t) = |\langle\omega_I(t)|\psi_I(t)\rangle|^2$$

. نرجع الآن إلى مسألة الإضطرابات.

نعرف المنشر $U_I(t,t_0)$ في تمثيل تبادل التأثير.

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t,t_0)\,|\psi_I(t_0)\rangle$$

المعادلة التي يحققها U_I :

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{U}_I \,|\psi_I(t_0)\rangle$$

$$V_I(t)\,|\psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{d\mathcal{U}_I}{dt}|\psi_I(t_0)\rangle$$

$$V_I(t)\,.\,\mathcal{U}_I\,|\psi(t_0)\rangle = i\hbar \frac{d\mathcal{U}_I}{dt}|\psi_I(t_0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d\,\mathcal{U}_I(t,t_0)}{dt} = V_I(t)\,\mathcal{U}_I(t,t_0)$$

والحل هو :

$$\mathcal{U}_I(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(\tau)\,d\tau}$$

وهذا الحل صحيح إلا في حالة $[V_I(\tau), V_I(\tau')] = 0$.

لنبحث عن الحل العام بطريقة أخرى :

$$d\mathcal{U}_I(t,t_0) = \frac{-i}{\hbar} V_I(t)\,\mathcal{U}_I(t,t_0)\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t} d\mathcal{U}_I(\tau,t_0) = \frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(\tau)\,\mathcal{U}_I(\tau,t_0)\,d\tau$$

$$\mathcal{U}_I(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t_1)\,\mathcal{U}_I(t_1,t_0)\,dt_1.$$

نكتب $\mathcal{U}_I(t_1,t_0)$ بدلالة $\mathcal{U}_I(t_2,t_0)$.

$$\mathcal{U}_I(t_1,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} V_I(t_2)\,.\,\mathcal{U}_I(t_2,t_0)\,dt_2.$$

$$\mathcal{U}_I(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t_1)\,dt_1 + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1)\,V_I(t_2)\,\mathcal{U}_I(t_2,t_0)\,dt_1\,dt_2$$

حيث $t_0 < t_2 < t_1 < t$.

نستطيع تعميم هذه العلاقة على النحو التالي :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{U}_I(t,t_0) = \mathbb{1} &+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t} V_I(t_1)\,\cancel{\mathcal{U}_I(t_1,t_0)}\,dt_1 \\ &+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1)\,V_I(t_2)\,\cancel{\mathcal{U}_I(t_2,t_0)}\,dt_1\,dt_2 \\ &+ \left(\frac{i}{\hbar}\right)^3\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} V_I(t_1)\,V_I(t_2)\,V_I(t_3)\,\cancel{\mathcal{U}_I}\,dt_1\,dt_2\,dt_3 \\ &+ \cdots\end{aligned}}$$

حيث $0 \leq \cdots \leq t_3 \leq t_2 \leq t_1 \leq t$.

$$[V_I(t'), V_I(t'')] \neq 0.$$

$$i\hbar \cancel{\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle} = i\hbar \cancel{\frac{d}{dt} U_I \cdot |\psi_I(t_0)\rangle}$$

ولدينا :

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t,t_0)|\psi_I(t_0)\rangle = U_I(t,t_0)|\psi_S(t_0)\rangle$$

ولدينا :

$$|\psi_I(t)\rangle = [U_S^0(t,t_0)]^+ |\psi_S(t)\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_S(t)\rangle = U_S^0(t,t_0)|\psi_I(t)\rangle$$

$$= U_S^0(t,t_0)\, U_I(t,t_0)|\psi_S(t_0)\rangle$$

$$\boxed{|\psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_S^0(t-t_0)}\, U_I(t,t_0)|\psi_S(t_0)\rangle}$$

نعتبر الرتبة الثانية من $U_I(t,t_0)$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1)V_I(t_2)\,dt_1\,dt_2 = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, V_I(t_1)V_I(t_2)$$

$$= \frac{1}{2!}\Big\{ \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2\, \theta(t_1-t_2)\, V_I(t_1)V_I(t_2)$$

$$+ \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1\, \theta(t_2-t_1)\, V_I(t_2)V_I(t_1)\Big\}$$

$$= \frac{1}{2!}\hat{T}\Big[\int_{t_0}^{t} d\tau\, V_I(\tau)\Big]^2$$

وبنفس الطريقة :

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3\, V_I(t_1)V_I(t_2)V_I(t_3) = \frac{1}{3!}\hat{T}\Big[\int_0^t d\tau\, V_I(\tau)\Big]^3$$

حيث $\hat{T}$ هو مؤشر ترتيب الزمن time ordering operator

$$\hat{T}(\hat{f}(t_1)\hat{f}(t_2)) = \hat{f}(t_1)\hat{f}(t_2) \qquad t_1 \geq t_2$$

$$= \hat{f}(t_2)\hat{f}(t_1) \qquad t_2 \geq t_1$$

إذن باستعمال العلاقة :

$$\exp(\hat{T}\{\ldots\}) = \hat{T}\exp(\{\ldots\})$$

نحصل على :

$$\boxed{U_I(t,t_0) = \hat{T}\exp\Big[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau\, V_I(\tau)\Big]}$$

تمرين : نضع جسيم داخل علبة عرضها L ونطبق بداخلها حقل كهربائي متعلق بالزمن

$$H_I(t) = -q\mathcal{E}x\, e^{(-\frac{t}{\tau})^2} \qquad (\alpha$$

$$H_I(t) = -q\cdot\mathcal{E}x\, e^{-i\omega t} \qquad (\beta$$

أحسب في الحالتين الانتقال من الحالة الأساسية إلى الحالة n .

تمرين 2: نعتبر هزاز توافقي تحت تأثير الاضطرابات التالية

a) $H_I(t) = -\beta x^2 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$ ، b) $H_I(t) = -\beta x^2 e^{-i\omega t}$

- أحسب $P_{n \to n'}(t)$.

تمرين 3: باستعمال طريقة WKB أحسب مستويات الطاقة لجسيم داخل الكمون $V(x) = \alpha \cos x$ عندما $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

باستعمال طريقة WKB أوجد التوابع الموجية لجسيم داخل الكمون $V(x) = \frac{g}{4!} x^4$ ،