فصل 4: الجمل ذات N درجة حرية. الجسيمات المتشابهة

في هذا الفصل سنقوم بدراسة جملة مكونة من N جسيمات في بعد واحد. ونعتبر الحالة البسيطة $N=2$:

1) **فضاء هلبرت**: نعتبر المؤثرات القانونية للجسيمين: $(X_1,P_1),(X_2,P_2)$.

$$[X_i,P_j]=i\hbar\{x_i,p_j\}=i\hbar\delta_{ij}$$
$$[X_i,X_j]=i\hbar\{x_i,x_j\}=0$$
$$[P_i,P_j]=i\hbar\{p_i,p_j\}=0$$

نعتبر الأساس $\{|x_1x_2\rangle\}$

$$X_i|x_1x_2\rangle=x_i|x_1x_2\rangle$$
$$\langle x_1'x_2'|x_1x_2\rangle=\delta(x_1'-x_1)\,\delta(x_2'-x_2)$$
$$\iint dx_1dx_2\,|x_1x_2\rangle\langle x_1x_2|=\mathbb{1}$$

ليكن $|\psi\rangle$ شعاع من فضاء Hilbert

$$|\psi\rangle=\mathbb{1}|\psi\rangle$$
$$=\iint dx_1dx_2\,|x_1x_2\rangle\langle x_1x_2|\psi\rangle$$
$$=\iint dx_1dx_2\,\psi(x_1,x_2)\,|x_1x_2\rangle$$

نرمز لفضاء Hilbert للجملة المكونة من جسيمين بـ $V_{1\otimes2}$.

ليكن V_1 فضاء Hilbert للجسيم 1 و V_2 فضاء Hilbert للجسيم 2.

$$|x_1x_2\rangle=|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle$$

ويسمى هذا الجداء بالجداء المباشر.

- الجداء المباشر خطي.

$$(\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle)\otimes|\gamma\rangle=\alpha|x\rangle\otimes|\gamma\rangle+\beta|y\rangle\otimes|\gamma\rangle$$

- $|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle\in V_{1\otimes2}=V_1\otimes V_2$

حيث $|x_1\rangle\in V_1$ و $|x_2\rangle\in V_2$

لكن لا نستطيع كتابة كل عنصر من $V_{1\otimes2}$ على شكل جداء مباشر

$$|\psi\rangle=|x_1'\rangle\otimes|x_2'\rangle+|x_1''\rangle\otimes|x_2''\rangle$$
$$\neq|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle$$

حيث $\psi_1\in V_1$ و $|\psi_2\rangle\in V_2$

- الجداء السلمي داخل $V_{1\otimes2}$:

$$\langle x_1'x_2'|x_1x_2\rangle=(\langle x_1'|\otimes\langle x_2'|)(|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle)$$
$$=\langle x_1'|x_1\rangle\cdot\langle x_2'|x_2\rangle$$
$$=\delta(x_1'-x_1)\cdot\delta(x_2'-x_2)$$

- نعتبر الآن مؤثر الوضعية $X_1^{1\otimes2}$ للجسيم 1

$$X_1^{1\otimes2}|x_1x_2\rangle=X_1^{1\otimes2}|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle$$
$$=x_1|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle$$
$$=x_1|x_1x_2\rangle$$

$$X_2^{1\otimes2}|x_1x_2\rangle=X_2^{1\otimes2}|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle$$
$$=|x_1\rangle\otimes(X_2^{1\otimes2}|x_2\rangle)$$

$$X_2^{1\otimes 2}|x_1x_2\rangle = |x_1\rangle \otimes (X_2|x_2\rangle)$$
$$= x_2|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle$$
$$= x_2|x_1x_2\rangle .$$

ونكتب كذلك:

$$X_1^{1\otimes 2}|x_1x_2\rangle = |X_1^{(1)}x_1\rangle \otimes |I^{(2)}x_2\rangle$$
$$X_2^{1\otimes 2}|x_1x_2\rangle = |I^{(1)}x_1\rangle \otimes |X_2^{(2)}x_2\rangle$$

وهذا يكافئ:

$$X_1^{1\otimes 2} = X_1^{(1)} \otimes I^{(2)}$$
$$X_2^{1\otimes 2} = I^{(1)} \otimes X_2^{(2)}$$

نعتبر الآن المؤثرين $W_1^{(1)}$ و $Z_2^{(2)}$

$$(W_1^{(1)} \otimes Z_2^{(2)})|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle =$$
$$(W_1^{(1)}|v_1\rangle) \otimes (Z_2^{(2)}|v_2\rangle)$$
$$= |W_1^{(1)}v_1\rangle \otimes |Z_2^{(2)}v_2\rangle$$

• **تمرين**: برهن أن:

1. $[\Omega_1^{(1)} \otimes I^{(2)}, I^{(1)} \otimes \Lambda_2^{(2)}] = 0$ $\quad \forall\ \Omega_1^{(1)}, \Lambda_2^{(2)}$

2. إذا $[\Omega_1^{(1)}, \Lambda_1^{(1)}] = \Gamma_1^{(1)}$ فإن: $[\Omega_1^{1\otimes 2}, \Lambda_1^{1\otimes 2}] = \Gamma_1^{(1)} \otimes I^{(2)}$

3. $(\Omega_1^{1\otimes 2} + \Omega_2^{1\otimes 2})^2 = (\Omega_1^2)^{(1)} \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes (\Omega_2^2)^{(2)} + 2\,\Omega_1^{(1)} \otimes \Omega_2^{(2)}$

• **تمرين**: نعتبر عالم فيزيائي يكون فيه فضاء Hilbert ذو بعدين للجسيم واحد ويمثلنا الأساس $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. لنعتبر المؤثرين $\sigma_1^{(1)}$ و $\sigma_2^{(2)}$ على التوالي من V_1 و V_2.

$$\sigma_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(2)} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

- نعتبر الفضاء $V_{1\otimes 2}$:

1) أعط أشعة أساس $V_{1\otimes 2}$. ما هو بعد هذا الفضاء.

2) أعط تمثيل المصفوفة $\sigma_1^{1\otimes 2}$ في هذا الأساس.

3) نفس السؤال لـ $\sigma_2^{1\otimes 2}$

نفس السؤال لـ $\sigma_1^{(1)} \otimes \sigma_2^{(2)}$

2) تطور شعاع الحالة للجسيمين:

شعاع الحالة $|\psi\rangle$ هو عنصر من $V_{1\otimes 2}$ يخضع لمعادلة Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \left[\frac{1}{2m_1}P_1^2 + \frac{1}{2m_2}P_2^2 + V(X_1, X_2)\right]|\psi\rangle$$

لدينا حالتين:

* الهاملتوني قابل للفصل $H = H_1^{(1)} + H_2^{(2)}$ أي $V(X_1, X_2) = V_1^{(1)}(X_1) + V_2^{(2)}(X_2)$.

* الهاملتوني غير قابل للفصل: أي $H \neq H_1^{(1)} + H_2^{(2)}$:

$$V(X_1, X_2) \neq V_1(X_1) + V_2(X_2)$$

• **دراسة الصنف الأول**:

$$H_1^{(1)}|E_1\rangle = E_1|E_1\rangle$$
$$H_2^{(2)}|E_2\rangle = E_2|E_2\rangle$$
$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

أو أن

$$(H_1^{(1)} + H_2^{(2)})|E\rangle = E|E\rangle .$$

بما أن: $[H_1^{(1)}, H_2^{(2)}] = 0$

نستطيع إيجاد أساس من الأشعة المشتركة بين $H_1^{(1)}$ و $H_2^{(2)}$ وهو
$\{|E_1\rangle \otimes |E_2\rangle\}$

$$(H_1^{(1)}+H_2^{(2)})|E_1\rangle\otimes|E_2\rangle$$
$$= H_1^{(1)}|E_1\rangle\otimes|E_2\rangle + H_2^{(2)}|E_1\rangle\otimes|E_2\rangle$$
$$= E_1|E_1\rangle\otimes|E_2\rangle + E_2|E_1\rangle\otimes|E_2\rangle$$
$$= (E_1+E_2)|E_1\rangle\otimes|E_2\rangle$$

ولدينا:

$$(H_1^{(1)}+H_2^{(2)})|E\rangle = E|E\rangle$$

نستنتج أن:

$$|E\rangle = |E_1\rangle\otimes|E_2\rangle$$
$$E = E_1+E_2 .$$

نعتبر الآن: $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = |\psi\rangle e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$
$$= |E\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$
$$= |E_1\rangle\otimes|E_2\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1+E_2)t}$$
$$= |E_1\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}\otimes|E_2\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}$$
$$= |\psi_1(t)\rangle\otimes|\psi_2(t)\rangle$$

• تمرين: نستعمل تمثيل الإحداثيات $\{|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle\}$.

برهن أن: $\psi_E(x_1,x_2)=\psi_{E_1}(x_1)\,\psi_{E_2}(x_2)$

حيث $\psi_E(y)=\langle y|E\rangle$.

- دراسة الصنف الثاني:

$$V(x_1,x_2) \neq V_1^{(1)}(x_1)+V_2^{(2)}(x_2)$$

نعتبر المثال التالي.

$$V(x_1,x_2) = V(x_1-x_2).$$

• تمرين:

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}m\omega^2\left[x_1^2+x_2^2+(x_1-x_2)^2\right]$$

* نعتبر الإحداثيات التالية

$$x_{I,II}=\frac{x_1\pm x_2}{\sqrt{2}}$$
$$p_{I,II}=\frac{p_1\pm p_2}{\sqrt{2}}$$

1) أكتب H بدلالة الإحداثيات الجديدة وبين أنها قانونية.

2) حل المسألة.

3) تم تحل المسألة مباشرة من x_1, p_1 و x_2, p_2 ثم انتقل إلى x_I, p_I و x_{II}, p_{II}.

- ما هو الفرق بين الطريقتين.

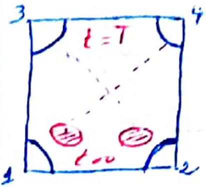
• تمرين: I

نعتبر حركة جسيم داخل علبة في فضاء 3D. باستعمال تمثيل الإحداثيات الكارتيزية، أوجد التوابع الموجية ومستويات الطاقة.

3) الجسيمات المتشابهة : Identical particles

- الحالة الكلاسيكية :

نعتبر طاولة بيار (Table de billard) بأربع ثقوب وكرتين متشابهتين تماما ولدينا فيزيائيين يتوقعان بالتنبؤات التالية:



$$\left.\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 4 \end{array}\right\} f_1 ,\ t=T$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array}\right\} f_2 ,\ t=T$$

في النظرية الكلاسيكية يمكن التمييز بين الكرتين لأنهما تتبع مسارين مختلفين للوصول إلى الثقبة 3 و4 وبالتالي فإن تشكيليتين (Configurations) ناتجة عن تبادل تبديل للكرتين المتشابهتين ليست متكافئة فيزيائيا. أما في النظرية الكمية، أين مفهوم المسار غير موجود فليست هناك قاعدة فيزيائية تمكننا من التمييز بين الكرتين

جملة لجسيمين : الحالات المتناظرة وضد المتناظرة.

نفرض أنه لدينا جملة متكونة من جسيمين ① و ② وأن قياسه على هذه الجملة يعطي الجسيم ① عند الوضعية $x=a$ و الجسيم ② عند الوضعية $x=b$ وتكون الحالة الفيزيائية مباشرة بعد القياس هي :

$$|\psi\rangle = |x_1=a, x_2=b\rangle$$
$$= |ab\rangle$$

بما أن الجسيمين متشابهين نكتب كذلك $|\psi\rangle = |ba\rangle$

نفرض الآن أننا نعيد التجربة لجسيمين متشابهين عند الوضعيتين $x=a$ و $x=b$ ، هل الحالة بعد القياس $|ab\rangle$ أم $|ba\rangle$ ، والإجابة هي كلاهما ، نعرف من الفقرة السابقة أن التشكيلتين متشابهتين ومنه

$$|\psi(a,b)\rangle = \alpha|\psi(b,a)\rangle$$

نكتب:

$$|\psi(a,b)\rangle = \beta|ab\rangle + \gamma|ba\rangle$$
$$|\psi(b,a)\rangle = \beta|b,a\rangle + \gamma|ab\rangle$$
$$\beta|ab\rangle + \gamma|ba\rangle = \alpha\beta|ba\rangle + \alpha\gamma|ab\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta = \alpha\gamma \\ \gamma = \alpha\beta\end{cases} \Rightarrow \beta = \beta\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

اذن لدينا الحالتين $\beta = \gamma$ أو $\gamma = -\beta$ إذن:

$$|\psi(a,b)\rangle = \beta(|ab\rangle + |ba\rangle)$$
$$|\psi(a,b)\rangle = \beta(|ab\rangle - |ba\rangle)$$

4) بوزونات وفرميونات :

بما أن الحالتين A و S متساويتان فيزيائيا لأنهما تحقق عدم التمييز بين الجسيمات. للبحث عن كيفية اختيار جسيمات الحالة المتناظرة S والحالة ضد المتناظرة A

- نعتبر تماثل مؤثر هيرميتي Ω وأن علاقة القياس بعد ... |

نرمز للناتج بـ w_1 و w_2 ونرمز إلى الحالة بعد عملية القياس بـ $|w_1, w_2, S\rangle$ أو $|w_1, w_2, A\rangle$.

نعتبر العكس وليكن فضاء Hilbert لحالة من الجسمين متكون من الأشعة التالية:
$$|\psi\rangle = \alpha|w_1, w_2, S\rangle + \beta|w_1, w_2, A\rangle$$
$|\psi\rangle$ ليست متناظرة ولا ضد متناظرة.

جسيمات مثل الفوتونات، البيونات (Pions)، الغرافيتونات تحتل دائما حالات متناظرة وتسمى بوزونات وجسيمات مثل الإلكترونات والبروتونات والنيترونات تحتل دائما حالات ضد متناظرة.

- نعتبر بوزون أول في الحالة $x=a$ وبوزون ثان عند الحالة $x=b$ وحالة الجملة بعد القياس هي:
$$|\psi\rangle = |ab\rangle + |ba\rangle = |ab, S\rangle$$
إذا كانت الجملة تحتوي على فرميونين فإن:
$$|\psi\rangle = |ab\rangle - |ba\rangle = |ab, A\rangle$$
- نعتبر جملة متكونة من فرميونين ونقوم بقياس المؤثر Ω
$$|\psi\rangle = |w_1 w_2\rangle - |w_2 w_1\rangle = |w_1 w_2, A\rangle$$
إذا $w_1 = w_2$:
$$|\psi\rangle = |ww, A\rangle = 0$$
وهذه النتيجة تشكل مبدأ الاستبعاد لباولي (Pauli exclusion principle) الذي ينص على أن فرميونين متشابهين لا يستطيعان المكوث في نفس الحالة.

5 - فضاءات Hilbert البوزونية $\mathbb{V}_S$ والفرميونية $\mathbb{V}_A$

- الفضاء $\mathbb{V}_{1\otimes 2}$ المتكون من الأشعة $|w_1 w_2\rangle = |w_1\rangle \otimes |w_2\rangle$

كل زوج $\{|w_1 = a, w_2 = b\rangle, |w_1 = b, w_2 = a\rangle\}$ يقابله شعاع غير معنون بوزوني يكتب $|w_1 = a, w_2 = b\rangle + |w_1 = b, w_2 = a\rangle$

وشعاع غير معنون فرميوني يكتب $|w_1 = a, w_2 = b\rangle - |w_1 = b, w_2 = a\rangle$

إذا $a = b$ فإن الشعاع $|w_1 = a, w_2 = a\rangle$ متناظر ويمثل الشعاع البوزوني أما الشعاع الفرميوني فينتفي.

نلاحظ إذن أن الفضاء $\mathbb{V}_{1\otimes 2}$ يحتوي ما هو كاف من الأشعة لكتابة $\mathbb{V}_{1\otimes 2} = \mathbb{V}_S \oplus \mathbb{V}_A$ وبعد $\mathbb{V}_S$ أكبر من بعد $\mathbb{V}_A$.

نعتبر عملية التشفير داخل $\mathbb{V}_S$.

$$|\omega_1\omega_2, S\rangle = \alpha_1|\omega_1\omega_2\rangle + \alpha_2|\omega_2\omega_1\rangle$$

$$\left\| |\omega_1\omega_2, S\rangle \right|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$$

لأن $\{|\omega_1\omega_2\rangle, |\omega_2\omega_1\rangle\}$ أساس متعامد إذن: $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن

$$\boxed{|\omega_1\omega_2, S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\omega_1\omega_2\rangle + |\omega_2\omega_1\rangle\right]}$$

وبنفس الطريقة:

$$\boxed{|\omega_1\omega_2, A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\omega_1\omega_2\rangle - |\omega_2\omega_1\rangle\right]}$$

وكل شعاع $|\psi_S\rangle$ ينتمي إلى V_S يمكن نشره على الأساس $\{|\omega_1\omega_2, S\rangle\}$ وبالتالي نستطيع تعيين الاحتمال المطلق لإيجاد الجسيم في الحالة $|\omega_1\omega_2\rangle$

$$|\psi_S\rangle = \sum_{\omega_1', \omega_2'} C(\omega_1', \omega_2')|\omega_1'\omega_2', S\rangle$$

$$P_S(\omega_1, \omega_2) = |\langle\omega_1\omega_2, S|\psi_S\rangle|^2 = \left|\sum_{\omega_1', \omega_2'} C(\omega_1', \omega_2')\langle\omega_1\omega_2, S|\omega_1'\omega_2', S\rangle\right|^2$$

$$= \left|\sum_{\omega_1', \omega_2'} C(\omega_1', \omega_2')\,\delta_{\omega_1\omega_1'}\,\delta_{\omega_2\omega_2'}\right|^2 = |C(\omega_1, \omega_2)|^2$$

لدينا $\Omega = X$:

$$|x_1x_2, S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|x_1x_2\rangle + |x_2x_1\rangle\right]$$

$$P_S(x_1, x_2) = |\langle x_1, x_2, S|\psi_S\rangle|^2$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P_S(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$$

نستعمل الآن التابع الموجي المركب:

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x_1 x_2, S|\psi_S\rangle$$

إذن $|\psi_S(x_1, x_2)|^2 = \frac{1}{2}|\langle x_1 x_2, S|\psi_S\rangle|^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, |\psi_S(x_1, x_2)|^2 = 1$$

ومنه $P_S(x_1, x_2) = 2|\psi_S(x_1, x_2)|^2$

مثال: نعتبر طاقة جسيمين لهما سلم مرتفع l و إيجادهما في الحالتين $n = 3$ و $n = 4$.

① الجسيمين هما بوزونين:

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|34\rangle + |4, 3\rangle\right]$$

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x_1 x_2, S|\psi_S\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\langle x_1x_2| + \langle x_2x_1|\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|34\rangle + |43\rangle\right]$$

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \langle x_1 x_2 | 34 \rangle + \langle x_1 x_2 | 43 \rangle + \langle x_2 x_1 | 34 \rangle + \langle x_2 x_1 | 43 \rangle \}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \psi_3(x_1)\psi_4(x_2) + \psi_4(x_1)\psi_3(x_2) + \psi_3(x_2)\psi_4(x_1) + \psi_4(x_2)\psi_3(x_1) \}$$

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_3(x_1)\psi_4(x_2) + \psi_4(x_1)\psi_3(x_2) \}$$

② الجسيمين الغافر ميونية :

$$\psi_A(x_1 x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_1 x_2, A | \psi_A \rangle$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \langle x_1 x_2 | 3,4 \rangle - \langle x_1 x_2 | 43 \rangle - \langle x_2 x_1 | 34 \rangle + \langle x_2 x_1 | 43 \rangle \}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \psi_3(x_1)\psi_4(x_2) - \psi_4(x_1)\psi_3(x_2) - \psi_3(x_2)\psi_4(x_1) + \psi_4(x_2)\psi_3(x_1) \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_3(x_1)\psi_4(x_2) - \psi_4(x_1)\psi_3(x_2) \}.$$

$$\psi_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_3(x_1) & \psi_4(x_1) \\ \psi_3(x_2) & \psi_4(x_2) \end{vmatrix}$$

تمرين : أعد التمرين السابق في حالة جملة متكونة من ثلاثة فرميونات و الحالات $n = 3, 4, 5$

6. مؤثرات التبديل : (permutation operators)

نعتبر جسيمين غير متشابهين الأول في الفضاء V_1 والثاني في الفضاء V_2 لدينا الفضاء $V = V_1 \otimes V_2$ والأساس المتكون من الأشعة $|1, \omega_i; 2, \omega_j\rangle$:

$$|1, \omega_i; 2\omega_j\rangle = |1, \omega_i\rangle \otimes |2, \omega_j\rangle$$

$$= |2, \omega_j\rangle \otimes |1, \omega_i\rangle$$

$$= |2, \omega_j; 1, \omega_i\rangle$$

$$=$$

نعتبر المؤثر P_{21} المعرف بالعلاقة التالية :

$$P_{21} |1, \omega_i; 2\omega_j\rangle = |2, \omega_i; 1, \omega_j\rangle = |1, \omega_j; 2, \omega_i\rangle$$

خواص P_{21} :

$$P_{21}^2 |1, \omega_i; 2, \omega_j\rangle = P_{21}(P_{21} |1, \omega_i; 2\omega_j\rangle) \quad : \quad P_{21}^2 = 1 \quad *$$

$$= P_{21}(|1, \omega_j; 2, \omega_i\rangle)$$

$$= |2, \omega_j; 1, \omega_i\rangle$$

$$= |1, \omega_i; 2, \omega_j\rangle$$

إذن مقلوب P_{21} هو نفسه P_{21} .

P_{21} هرميتي : $P_{21}^+ \cdot P_{21} = 1$ *

$$P_{21}^{+} P_{21} = 1 \Rightarrow P_{21} P_{21} = 1 \Rightarrow P_{21} = P_{21}^{+}$$

- القيم الذاتية لـ P_{21} حقيقية

* P_{21} أحادي : $P_{21}^{+} = P_{21} = P_{21}^{-1}$

. أشعة متناظرة وضد متناظرة :

من الخواص السابقة تكون القيم الذاتية للمؤثر P_{21} هي ± 1.

$$P_{21}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$$P_{21}^{2}|\lambda\rangle = \lambda^{2}|\lambda\rangle = |\lambda\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda^{2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

* $\lambda = 1$ ← أشعة ذاتية متناظرة $|1\rangle = |\psi_S\rangle$
* $\lambda = -1$ ← أشعة ذاتية ضد متناظرة $|-1\rangle = |\psi_A\rangle$

نعرف المؤثرين : $S = \frac{1}{2}(1 + P_{21})$, $A = \frac{1}{2}(1 - P_{21})$

$\Rightarrow \cancel{A+S=}$

• خواص S و A :

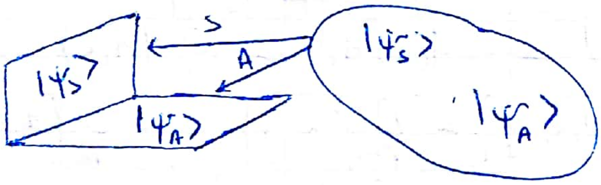
$$S^{2} = \frac{1}{4}(1 + 2P_{21} + 1) = S$$

$$A^{2} = \frac{1}{4}(1 - 2P_{21} + 1) = A$$

$$A.S = \frac{1}{4}(1 - P_{21}^{2}) = 0 = S.A$$

$$A + S = 1$$

نستنتج أن S و A هما مؤثرا إسقاط فضائين جزئيين متعامدين.



ليكن $|\psi\rangle \in V$:

$$P_{21}(S|\psi\rangle) = S|\psi\rangle$$

$$P_{21}(A|\psi\rangle) = A|\psi\rangle$$

نستنتج أن : $S|\psi\rangle$ شعاع متناظر

$A|\psi\rangle$ شعاع ضد متناظر.

• كيفية تحول المؤثرات تحت تأثير P_{21} : نعتبر الملاحظة $\Omega(1)$ حيث

$\Omega(1)|\omega_i\rangle = \omega_i|\omega_i\rangle$ و $\Omega(2)|\omega_j\rangle = \omega_j|\omega_j\rangle$.

$$P_{21}\,\Omega(1)\,P_{21}^{+}|1,\omega_i,2,\omega_j\rangle = P_{21}\,\Omega(1)\,P_{21}|1,\omega_i,2,\omega_j\rangle$$

$$= P_{21}\,\Omega_1|2,\omega_i,1,\omega_j\rangle$$

$$= P_{21}\,\Omega_1|1,\omega_j,2,\omega_i\rangle$$

$$P_{21}\Omega(1)P_{21}^{+}|1\omega_i, 2\omega_j\rangle = \omega_j P_{21}|1\omega_j, 2\omega_i\rangle$$
$$= \omega_j |2\omega_j, 1\omega_i\rangle$$
$$= \omega_j |1\omega_i, 2\omega_j\rangle$$
$$= \Omega(2)|1\omega_i, 2\omega_j\rangle$$

إذن :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{21}\Omega(1)P_{21}^{+} = \Omega(2) \\ P_{21}^{+}\Omega(2)P_{21} = \Omega(1) \end{array}}$$

نعتبر الآن جداء الملاحظتين $\Omega(1)\Lambda(2)$:

$$P_{21}\Omega(1)\Lambda(2)P_{21} = P_{21}\Omega(1)P_{21}P_{21}\Lambda(2)P_{21}$$
$$= \Omega(2)\Lambda(1)$$

نستطيع تعميم هذه النتيجة إلى أي ملاحظة $O(1,2)$:

$$P_{21}O(1,2)P_{21} = O(2,1)$$

نقول أن $O(1,2)$ ملاحظة متناظرة إذا :

$$O(1,2) = O(2,1) = O_S(1,2).$$

إذن :

$$P_{21}O_S(1,2)P_{21} = O_S(2,1) = O_S(1,2)$$
$$P_{21}O_S(1,2) = O_S(1,2)P_{21} \Rightarrow \boxed{[P_{21}, O_S(1,2)] = 0}$$

نقول أن $O(1,2)$ ملاحظة ضد متناظرة إذا :

$$O(1,2) = -O(2,1) = O_A(1,2)$$
$$P_{21}O_A(1,2)P_{21} = O_A(2,1) = -O_A(1,2)$$
$$P_{21}O_A(1,2) = -O_A(1,2)P_{21} \Longrightarrow \boxed{\{P_{21}, O_A(1,2)\} = 0}$$

* نعتبر الآن صنف من مؤثرات التبديل دورها هو تبديل جسيمين دون الاهتمام بالجسيمات الأخرى، ولتكن جملة تحتوي على 3 جسيمات

$$\underbrace{P_{321}} \qquad \underbrace{P_{213}} \qquad \underbrace{P_{132}}$$

ونستطيع تفكيك هذه المؤثرات إلى جداء مؤثرين :

$$P_{312} = \underbrace{P_{321}}\,\underbrace{P_{213}} = \underbrace{P_{213}}\,\underbrace{P_{132}} = \underbrace{P_{132}}\,\underbrace{P_{321}}$$

ملاحظة: مؤثرات التبديل ليست متبادلة من أجل عدد الجسيمات أكبر من 2، وبالتالي لا نستطيع تشكيل أساس من الأشعة

الذاتية المشتركة لهذه المؤثرات.

ليكن المؤثر P_α حيث α هو تبديل للأعداد $\{1,2,\dots,N\}$.

$$P_\alpha|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle$$
$$P_\alpha|\psi_A\rangle = \varepsilon_\alpha|\psi_A\rangle$$

حيث: $\varepsilon_\alpha = 1$ إذا كان التبديل زوجيا.

$\varepsilon_\alpha = -1$ إذا كان التبديل فردي.

ونعرف المؤثرين S و A بـ:

$$S=\frac{1}{N!}\sum_\alpha P_\alpha \quad , \quad A=\frac{1}{N!}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha P_\alpha$$

• برهن أن: $A^2=A$ ، $S^2=S$ ، $A.S=0$ ، $A+S=1$

S يسقط على الفضاء الجزئي للبوزونات.

A يسقط على الفضاء الجزئي للفرميونات.

• تمرين: نعتبر جملة متكونة من 3 جسيمات. وأساس من الفضاء $V=V_1\otimes V_2\otimes V_3$ متكون من الأشعة $\{|1,\omega_i;2,\omega_j;3,\omega_k\rangle\}$

ليكن P_{xpq} (حيث $\{xpq\}$ هو تبديل لـ $\{123\}$)

$$P_{xpq}|1,\omega_i;2,\omega_j;3,\omega_k\rangle = |x,\omega_i;p,\omega_j;q,\omega_k\rangle$$

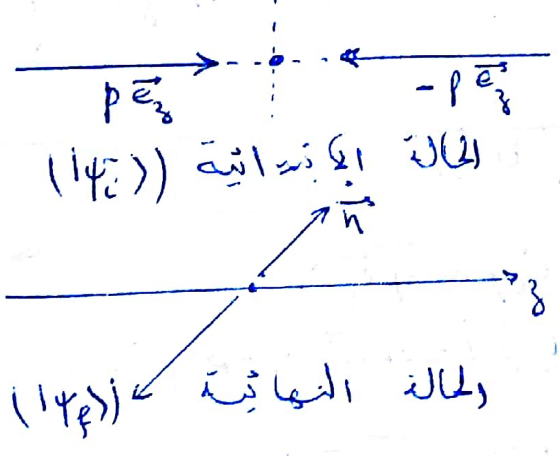
• برهن أن المؤثرات P_{xpq} تشكل زمرة.

• أحسب المؤثرات S و A وتأكد أنها مؤثرات إسقاط.

هل $V=V_S\oplus V_A$ ؟

• تطبيق: " تصادم جسيمين متشابهين (مهم جدا)

في هذه الحالة $N=2$



أساس من فضاء Hilbert.

$\{|1,p\vec e_z;2,-p\vec e_z\rangle, |1,-p\vec e_z;2,p\vec e_z\rangle\}$

$$|\psi_i\rangle_S=\frac{1}{\sqrt2}\{|1,p\vec e_z;2,-p\vec e_z\rangle+|1,-p\vec e_z;2,p\vec e_z\rangle\}$$

$$|\psi_i\rangle_A=\frac{1}{\sqrt2}\{|1,p\vec e_z;2,-p\vec e_z\rangle-|1,-p\vec e_z;2,p\vec e_z\rangle\}$$

بما أننا لا نعرف هل الجسيمين بوزونين أو فرميونين نكتب $|\psi_i\rangle$ على شكل عبارة موحدة للحالتين.

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})|1, p\vec{e_3}; 2, -p\vec{e_3}\rangle$$

تطور الجملة في الزمن :

$$|\psi_i\rangle = |\psi(t_i)\rangle$$

$$|\psi_f\rangle = |\psi(t_f)\rangle$$

$$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i)|\psi(t_i)\rangle \qquad = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f - t_i)}$$

لدينا H متناظر .

$$H(1,2) = \frac{\vec{P}_1^2}{2m} + \frac{\vec{P}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

$$2 \longleftrightarrow 1$$

$$H(1,2) = H(2,1)$$

أي $P_{21} H P_{21} = H \Rightarrow [H, P_{21}] = 0$

$$\Rightarrow [U(t_f, t_i), P_{21}] = 0$$

إذن :

$$|\psi(t_f)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} U(t_f, t_i)(1+\varepsilon P_{21})|1, p\vec{e_3}; 2, -p\vec{e_3}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21}) U(t_f, t_i)|1, p\vec{e_3}; 2, -p\vec{e_3}\rangle$$

$$|\psi(t_f)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})|1, p\vec{n}; 2, -p\vec{n}\rangle$$

سعة احتمال التصادم :

$$\langle\psi(t_f)|\psi(t_1)\rangle = \langle\psi_f|U(t_f, t_i)|\psi_i\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle 1, p\vec{n}; 2, -p\vec{n}|\left[(1+\varepsilon P_{21}^{+})U(t_1, t_i)(1+\varepsilon P_{21})\right] \times |1, p\vec{e_3}; 2, -p\vec{e_3}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle 1, p\vec{n}; 2, -p\vec{n}|\left[U(t_1,t_i) + \varepsilon P_{21} U(t_1,t_i) + \varepsilon P_{21}^{+} U(t_1,t_i) + \varepsilon^2 P_{21}^{+} U(t_1,t_i) P_{21}\right] \times |1, p\vec{e_3}, 2, -p\vec{e_3}\rangle$$

لدينا :

$$[U, P_{21}] = 0$$

$$\Rightarrow U P_{21} = P_{21} U$$

$$U = P_{21} U P_{21} \Rightarrow U = P_{21}^{+} U P_{21}$$

إذن :

$$\langle\psi_f|\psi(t_1)\rangle = \langle 1, p\vec{n}; 2, -p\vec{n}|U(t_1, t_i)|1, p\vec{e_3}; 2, -p\vec{e_3}\rangle + \varepsilon\langle 1, p\vec{n}; 2, -p\vec{n}|P_{21} U(t_1, t_i)|1, p\vec{e_3}, 2, -p\vec{e_3}\rangle .$$

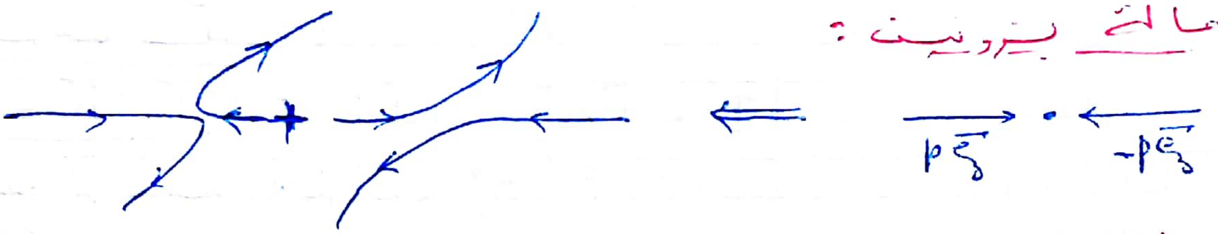
لدينا : $P_{21} U|1, p\vec{e_3}; 2, -p\vec{e_3}\rangle = U P_{21}|1, p\vec{e_3}; 2, -p\vec{e_3}\rangle$

$$= U|2, p\vec{e_3}; 1, -p\vec{e_3}\rangle$$

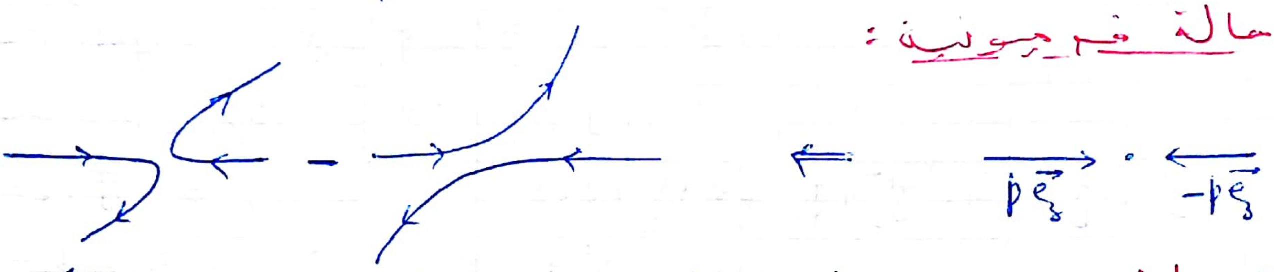
Scanné avec CamScanner

$$\langle \psi(t_3) | \psi(t_1) \rangle = \langle 1, p\vec{n}\,; 2, -p\vec{n} | \mathcal{U}(t_3, t_1) | 1, p\vec{e_3}\,; 2, -p\vec{e_3} \rangle$$
$$+ \, \varepsilon \langle 2, p\vec{n}\,; 1, -p\vec{n} | \mathcal{U}(t_3, t_1) | 1, p\vec{e_3}\,; 2, -p\vec{e_3} \rangle .$$

* حالة بيزونين :



* حالة فرميونين :



ملاحظة : نستنتج أن إحتمال وقوع تصادم بيزونين أكبر من إحتمال وقوع تصادم فرميونين