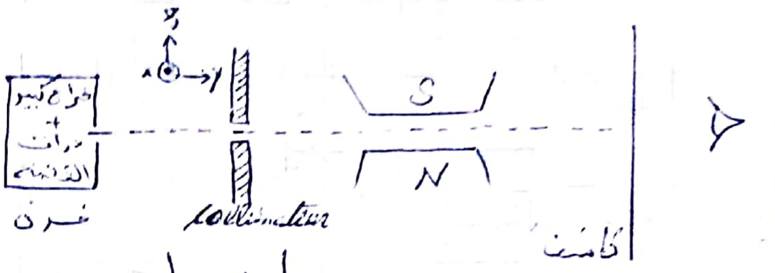
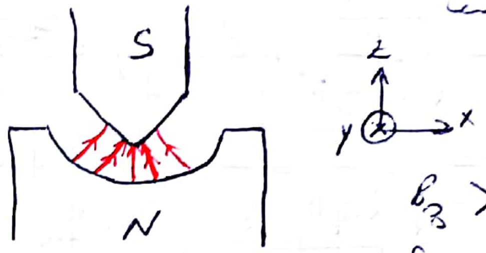
فصل 3: السبين والعزم المغناطيسي

1. تجربة Stern Gerlach (1922):

الهدف من هذه التجربة هو قياس العزم المغناطيسي لذرات الفضة





$B_z \gg B_x$

$B_y = 0$

$B_x = 0$ عند المركز.

نسمح بين القطبية N و S مسار ذرة من الفضة لها عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$.

كلاسيكيا: الطاقة المغناطيسية لهذه الذرة هي:

$$E_m = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

$\vec{\mu}$: العزم المغناطيسي.

القوة المغناطيسية الناتجة عن هذه الطاقة هي:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_m = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$$

$$= \vec{\nabla}(\mu_x B_x + \mu_z B_z)$$

$$= \mu_x \vec{\nabla}B_x + \mu_z \vec{\nabla}B_z$$

$$\vec{F} \simeq \mu_z\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\vec{k}\right)$$

ولدينا:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} \ll \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} \ll \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$F = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$ إذن

ومنه نجد:

- $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$ ← ينحرف مسار ذرة الفضة نحو الأعلى إذا $\mu_z > 0$
- $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$ ← ينحرف مسار ذرة الفضة نحو الأسفل إذا $\mu_z < 0$.

هذا يعني أن ذرات الفضة ستتوزع على الكاشف. لكن التجربة بينت ظهور بقعتين مختلفتين على الكاشف واحدة نحو الأعلى والأخرى نحو الأسفل وكأن μ_z يأخذ فقط قيمتين مختلفتين وتناظر البقعتين توحي أن $\mu_z = \pm a$ وتبين التجربة كذلك أن إسقاط العزم المغناطيسي على إتجاه الحقل المغناطيسي مكمم. كل التجارب التي أجريت فيما بعد باستعمال ذرات أخرى بينت أن إسقاط $\vec{\mu}$ على $\vec{B}$ مكمم. لكن القيم الممكنة لـ μ_z ليست دائما ...

إستنتاج:

قيم μ_z متقطعة $\xleftarrow{\text{نموذج كميا}}$ مخالف.. الحالات [illegible]

الدوران في بعدين :

كلاسيكيا : نعتبر دوران حول المحور $\vec{k}$ بزاوية φ_0

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1$$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{P}_x \\ \bar{P}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$$

نضع :

$$R(\varphi_0 \vec{k}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$$

كميا :

ليكن $U[R(\varphi_0\vec{k})]$ المؤثر المرافق للدوران $R(\varphi_0\vec{k})$ إذن :

$$|\psi\rangle \xrightarrow[R(\varphi_0\vec{k})]{} |\psi_R\rangle = U|\psi\rangle$$

نعتبر القيمة المتوسطة

$$\langle\psi|X|\psi\rangle \xrightarrow[R]{} \langle\psi_R|X|\psi_R\rangle$$

$$= \langle\psi|U^+XU|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\bar{X}|\psi\rangle$$

$$= \langle\bar{X}\rangle$$

$$= \langle X\rangle_{\psi_R}$$

إذن

$$\langle X\rangle_R = \langle\bar{X}\rangle = \langle X\rangle\cos\varphi_0 - \langle Y\rangle\sin\varphi_0$$

$$\langle Y\rangle_R = \langle\bar{Y}\rangle = \langle X\rangle\sin\varphi_0 + \langle Y\rangle\cos\varphi_0$$

حيث :

$$\bar{X} = U^+XU$$

$$\bar{Y} = U^+YU$$

نعرف الآن تأثير $U[R]$ على أشعة الوضعية

$$\langle\psi|U^+[R]|x,y\rangle = \langle\psi_R|x,y\rangle$$

$$|\psi_R\rangle = U[R]|\psi\rangle$$

$$\langle\psi_R|\psi_R\rangle = \langle\psi|U^+[R]U[R]|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dx\,dy\,\langle\psi|x,y\rangle\langle x,y|\psi\rangle$$

$$\langle\psi_R|\psi_R\rangle = \int d\bar{x}\,d\bar{y}\,\langle\psi_R|\bar{x},\bar{y}\rangle\langle\bar{x},\bar{y},\psi_R\rangle$$

$$= \int dx\,dy\,\delta(\bar{x},\bar{y},x,y)\langle\psi_R|\bar{x},\bar{y}\rangle \cdot \langle\bar{x},\bar{y},\psi_R\rangle$$

$$\langle\psi|x,y\rangle = \langle\psi_R|\bar{x},\bar{y}\rangle$$

$$= \langle\psi|U^+[R]|\bar{x},\bar{y}\rangle$$

$$|x,y\rangle = U^+[R]|\bar{x},\bar{y}\rangle$$

$$|\bar{x},\bar{y}\rangle = U[R]|x,y\rangle$$

$$= |x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0, x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0\rangle$$

$$\boxed{|\bar{x},\bar{y}\rangle = |x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0, x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0\rangle}$$

تشكيل المؤثر $U[R]$:

نعتبر دوران صغير جدا $\varepsilon\vec{k}$ حول المحور $\vec{k}$ ونفرض أن $U[R(\varepsilon\vec{k})]$ نكتب :

$$U[R(\varepsilon\vec{k})] = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\vec{k}\cdot\vec{A}}$$ (افتراضنا A مؤثرات)

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon A_z}$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon A_z + O(\varepsilon^2)$$

لا أخادي يجب أن يكون A_z هرميتي . لدينا :

$$U[R]|x,y\rangle = |x\cos\varepsilon_0 - y\sin\varepsilon_0 ,\ x\sin\varepsilon_0 + y\cos\varepsilon_0\rangle /_{\varepsilon \ll}$$

$$= |x - y\varepsilon_0 ,\ x\varepsilon_0 + y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle x,y|U^{\dagger}[R] = \langle x - y\varepsilon ,\ x\varepsilon + y|$$

نبدل $\varepsilon_0 \longrightarrow -\varepsilon_0$

$$\Rightarrow U^{+}[R(-\varepsilon_0\vec{k})] = U[R(\varepsilon_0\vec{k})]$$

$$\langle x,y|U[R] = \langle x + y\varepsilon_0 ,\ -x\varepsilon_0 + y|$$

ناخذ الجداء السلمي مع $|\psi\rangle$

$$\langle x,y|U[R]|\psi\rangle = \langle x + y\varepsilon_0 ,\ -x\varepsilon_0 + y|\psi\rangle$$

$$= \psi(x + y\varepsilon_0 ,\ y - x\varepsilon_0)$$

نستعمل نشر $U[R]$ بدلالة ε_0 ونشر $\psi(x + y\varepsilon ,\ y - x\varepsilon)$ للدالة Taylor بجوار ε_0.

$$U[R] = 1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon_0 A_z$$

$$\psi(x + y\varepsilon_0 ,\ y - x\varepsilon) = \psi(x,y) + y\varepsilon\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} - x\varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial y} + o(\varepsilon_0^2)$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) - \frac{i}{\hbar}\varepsilon\langle x,y|A_z|\psi\rangle = \psi(x,y) + \varepsilon\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(x,y)$$

$$\Rightarrow \langle x,y|A_z|\psi\rangle = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(x,y)$$

$$= \langle x,y|xP_y - yP_x|\psi\rangle$$

اذن :

$$\boxed{A_z = xP_y - yP_x = L_z}$$

نلاحظ أن المؤثر الهرميتي A_z هو المركبة الثالثة للعزم الحركي

اذن :

$$\boxed{U[R(\varepsilon\vec{k})] = e^{-i/\hbar\, \varepsilon L_z}}$$

• نعتبر الآن دوران منتهيا بزاوية φ_0

$$\varphi_0 = N\varepsilon \qquad (N \longrightarrow \infty ,\ \varepsilon \ll)$$

$$U[R(\varphi_0\vec{k})] = \underbrace{U[R(\varepsilon\vec{k})] \times \cdots \times U[R(\varepsilon\vec{k})]}_{N\ \text{مرة}}$$

$$= U^N[R(\varepsilon\vec{k})] = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\varphi_0}{N}L_z + \cdots\right)^N \underset{N\to\infty}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi_0 L_z}$$

تمرين :

أكتب $U[R(\varphi_0\vec{k})]$ في الإحداثيات القطبية وبرهن أن

$$e^{-\varphi_0\frac{\partial}{\partial\varphi}}\psi(\rho,\varphi) = \psi(\rho,\varphi - \varphi_0)$$

الإجابة :

نطبق النتيجة التالية :

$$\langle x,y|U[R(\varphi_0\vec{k})]|\psi\rangle = \langle x,y|e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi_0 L_z}|\psi\rangle$$

في الإحداثيات القطبية :

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\langle x,y|e^{-i/\hbar\,\varphi_0 L_z}|\psi\rangle = e^{-\varphi_0\frac{\partial}{\partial\varphi}}\psi(\rho,\varphi)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\varphi_0)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}\psi(\rho,\varphi)$$

$$= \psi(\rho,\varphi) - \varphi_0\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\varphi_0^2}{2!}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \cdots$$

$$= \psi(\rho,\varphi - \varphi_0)$$

وهو نشر Taylor للدالة ψ بجوار φ.

التفسير الفيزيائي للمؤثر L_z :

في الفيزياء الكلاسيكية :

• ازاحة زمنية ← مصونية الطاقة الكلية
$$\frac{dH}{dt}=0$$

• ازاحة فضائية ← مصونية الدفع
$$\frac{dP}{dt}=0$$

• دوران ← العزم الحركي $\frac{dL}{dt}=0$

• باستعمال أقواس بواسون :
$$\frac{df}{dt}=\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

في الميكانيك الكمية :
$$\boxed{\frac{d\hat F}{dt}=\frac{i}{\hbar}[\hat F,H]+\frac{\partial \hat F}{\partial t}}$$

نطبق هذا القانون على العزم الحركي :
$$\frac{dL_z}{dt}=\frac{i}{\hbar}[L_z,H].$$

• قانون تحويل المؤثرات في عملية تغيير الأساس :
$$\{|x,y\rangle\} \xrightarrow{U} \{|\bar x,\bar y\rangle\}$$
$$|\psi\rangle \xrightarrow{U} |\psi_R\rangle$$
$$O \xrightarrow{U} U^+OU$$

في عملية الدوران يجب على الفيزياء أن تبقى صامدة. أي :

H قبل الدوران = H بعد الدوران

أو
$$U^+HU=H$$

إذن :
$$e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L_z}He^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon L_z}=H$$
$$\Rightarrow \left(1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon L_z\right)H\left(1-\frac{i}{\hbar}\varepsilon L_z\right)=H$$
$$\Rightarrow \left(\cancel{H}+\frac{i}{\hbar}\varepsilon L_z H-\frac{i}{\hbar}\varepsilon HL_z=H\right.$$
$$\Rightarrow \frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(L_zH-HL_z\right)=0$$
$$\Rightarrow L_zH-HL_z=0$$
$$\Rightarrow [L_z,H]=0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt}=0$$

إستنتجنا إذن أن L_z مصونة في عملية الدوران وتمثل كذلك مولد الدوران حول المحور $\vec k$ (le générateur المولد).

تمرين 1 : برهن أن الهاملتوني ثابت الحركة عندما نقوم بإزاحة زمنية قدرها ε.

تمرين 2 : نعتبر دوران حول المحور $\vec k$ بزاوية φ متبوع بدوران حول المحور (ox) بزاوية φ أحسب $[L_x,L_z]$.

• في الفقرات السابقة درسنا تأثير الدوران على توابع موجية ~~سلمية~~ (ذات ~~مركبات~~) سلمية (مركبة واحدة) لندرس الآن تأثير الدوران على عدة توابع موجية شعاعية (عدة مركبات)
$$\vec\psi(x,y,z)=\psi_x\vec i+\psi_y\vec j+\psi_z\vec k.$$

في عملية الدوران :

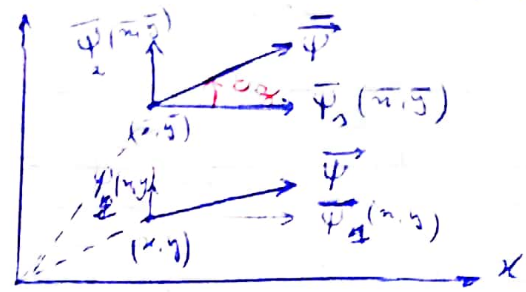
① نقوم بتدوير $\vec\psi$ بزاوية $\delta\vec\theta$

② $(x,y,z)\leftarrow(\bar x,\bar y,\bar z)$ ونحسب $\vec\psi$ بعد التدوير عند $(\bar x,\bar y,\bar z)$.

نقوم بالعملية الأولى باستعمال المؤثر $\vec L$. أما العملية الثانية فنستعمل مؤثرا جديدا نرمز لها بـ $\vec S$ ونعرف ...

Scanné avec CamScanner

نعتبر الوضعية التالية في بعدين



$$\vec\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \longrightarrow \bar{\vec\psi} = \begin{pmatrix}\bar\psi_1\\ \bar\psi_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\bar x\\ \bar y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\varepsilon_z\\ \varepsilon_z & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\bar\psi_1(\bar x,\bar y)\\ \bar\psi_2(\bar x,\bar y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\varepsilon_z\\ \varepsilon_z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(\bar x,\bar y)\\ \psi_2(\bar x,\bar y)\end{pmatrix}$$

$$\bar\psi_1(\bar x,\bar y) = \psi_1(x-\varepsilon_z y, x\varepsilon_z + y) + -\varepsilon_z\psi_2(x-\varepsilon_z y, x\varepsilon_z + y)$$

$$\bar\psi_2(\bar x,\bar y) = \varepsilon_z\psi_1(x-\varepsilon_z y, x\varepsilon_z + y) + \psi_2(x-\varepsilon_z y, x\varepsilon_z + y)$$

نستعمل نشر Taylor :

$$\psi_1(x-\varepsilon_z y, x\varepsilon_z + y) = \psi_1(x,y) - \varepsilon_z y\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \varepsilon_z x\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + O(\varepsilon_z^2)$$

$$= \psi_1(x,y) + \frac{i}{\hbar}\varepsilon_z\left[\frac{\hbar}{i}x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar}{i}y\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi_1$$

$$= \psi_1(x,y) + \frac{i}{\hbar}\varepsilon_z L_z\psi_1(x,y)$$

ومنه =

$$\begin{pmatrix}\bar\psi_1(\bar x,\bar y)\\ \bar\psi_2(\bar x,\bar y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon_z L_z & -\varepsilon_z\\ \varepsilon_z & 1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon_z L_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\bar\psi_1(\bar x,\bar y)\\ \bar\psi_2(\bar x,\bar y)\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{i}{\hbar}\varepsilon_z\begin{pmatrix}L_z & 0\\ 0 & L_z\end{pmatrix} + \frac{i}{\hbar}\varepsilon_z\begin{pmatrix}0 & +i\hbar 1\\ -i\hbar 1 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$= \left[1 + \frac{i}{\hbar}\varepsilon_z J_z\right]\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

نضع :

$$J_z = L_z^{(1)}\otimes 1^{(2)} + 1^{(1)}\otimes S_z^{(2)}$$

إذن :

$$\begin{pmatrix}\bar\psi_1(\bar x,\bar y)\\ \bar\psi_2(\bar x,\bar y)\end{pmatrix} = e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_z J_z}\begin{pmatrix}\psi_1(x,y)\\ \psi_2(x,y)\end{pmatrix}$$

أو :

$$\bar{\vec\psi}(\bar x,\bar y) = [U(R(\varepsilon_z\vec k))]\vec\psi(x,y)$$

نستنتج أن $\vec J$ تخضع إلى علاقات تبديل مماثلة لعلاقات تبديل $\vec L$

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$$

وبما أن :

$$\vec J = \vec L + \vec S$$
$$J_i = L_i + S_i$$

$$[J_i, J_j] = [L_i + S_i, L_j + S_j]$$

$$\cancel{= [J_i, J_j] + [L_i}$$

$$= [L_i, L_j] + \cancel{[L_i, S_j]} + \cancel{[S_i, L_j]} + [S_i, S_j]$$

$$i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k = i\hbar\varepsilon_{ijk}(L_k + S_k)$$

$$\Rightarrow [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

نفرض أن المصفوفات التالية تحقق علاقات التبديل المذكورة:

$$S_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إذن نفرض التابع الموجي على الشكل:

$$\psi(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_+(x,y) \\ \psi_-(x,y) \end{pmatrix}$$

حسب القيم الذاتية لـ S_z يعطيها $\pm\frac{\hbar}{2}$ و

$$S_z\psi_+ = \frac{\hbar}{2}\psi_+$$

$$S_z\psi_- = -\frac{\hbar}{2}\psi_-$$

ليكن الأساس $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\psi = \psi_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

• هل $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ هو أساس؟

(+) $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0$$

(+) التعامد:

$$(0,1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$$

التنظيم:

$$(0,1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1$$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$$

علاقة الغلق:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

ملاحظة:

الفرق بين العزم المداري الزاوي والعزم الزاوي للسبين هو: أننا نستطيع تغيير العزم الزاوي المداري بتطبيق حقول خارجية ولكن لا نستطيع تغيير العزم الزاوي للسبين لأن طويلته ثابتة.

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\,\mathbb{1}$$

• نعتبر فضاء هلبرت Hilbert: الجسيم له سبين $\frac{1}{2}$، بإدخال خاصية السبين نضاعف من بعد فضاء Hilbert.

$$\psi(x,y,z) = \begin{pmatrix}\psi_+(x,y,z)\\\psi_-(x,y,z)\end{pmatrix}$$

$$= \psi_+(x,y,z)\,|+\rangle + \psi_-(x,y,z)\,|-\rangle$$

حيث: $|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ومن جهة أخرى

$$\psi_+(x,y,z) = \langle xyz|\psi_+\rangle$$

$$\psi_-(x,y,z) = \langle x,y,z,\psi_-\rangle$$

نلاحظ أن بعد فضاء Hilbert تضاعف هو $2 = (2s+1)$ ، $s=\frac{1}{2}$

$$\psi(x,y,z) = \begin{pmatrix}\psi_+(-\infty,-\infty,-\infty)\\ \vdots \\ \psi_+(+\infty,+\infty,+\infty)\\ \psi_-(-\infty,-\infty,-\infty)\\ \vdots \\ \psi_-(+\infty,+\infty,+\infty)\end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} - q\phi + \frac{q}{mc}(\vec{P}\cdot\vec{A})$$

$$\hat{H}|\psi\rangle = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m}|\psi\rangle$$

$$-q\phi|\psi\rangle + \frac{q}{mc}(\vec{P}\cdot\vec{A})|\psi\rangle$$

في تمثيل الإحداثيات :

$$\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

والحالات ، $i\hbar\frac{q}{mc}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

ومنه فإن :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 - q\phi$$

لناخذ $\phi = 0$:

$$\hat{H} = \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\vec{A}\cdot\vec{P} - \frac{q}{2mc}\vec{P}\cdot\vec{A} + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2$$

في تمثيل الإحداثيات :

$$\hat{H}|\psi\rangle = \left(\frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\vec{A}\cdot\vec{P} + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2\right)|\psi\rangle$$

$$-\frac{q}{2mc}\vec{P}\cdot\vec{A}|\psi\rangle$$

$$\vec{P}\cdot\vec{A}|\psi\rangle = \vec{P}(\vec{A}|\psi\rangle)$$

$$= -i\hbar\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot|\psi\rangle)$$

$$= -i\hbar\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot|\psi\rangle)$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{P}|\psi\rangle.$$

اذن :

$$\hat{H}|\psi\rangle = \left(\frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{q}{mc}\vec{A}\cdot\vec{P} + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2\right)|\psi\rangle$$

ليكن : $\vec{A} = \frac{B}{2}(x\vec{j} - y\vec{i})$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{B}{2}y & \frac{B}{2}x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = B\vec{k}.$$

ونكتب : $\vec{\omega} = \gamma\cdot\vec{B}$

$\vec{\omega}$ هو تردد الدوران.

ب) الدراسة الكلاسيكية :

في غياب الحقل الكهرومغناطيسي

$$H_{cl} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \longrightarrow \hat{H}_{qu} = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{X})$$

في حضور حقل كهرومغناطيسي :

$(\vec{E}, \vec{B})$ أو $(\phi, \vec{A})$

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} = \vec{F}_{\acute{e}l\acute{e}c} + \vec{F}_{magn}$$

$$= q\vec{E} + \frac{q}{c}(\vec{v}\wedge\vec{B})$$

$$W = +\int\vec{F}d\vec{x}$$

$$= \int +q\vec{E}d\vec{x} + \frac{q}{c}\int\vec{v}\wedge\vec{B}\,d\vec{x}$$

$$= +q\int -\vec{\nabla}\phi\,d\vec{x} + \frac{q}{c}\int\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})d\vec{x}$$

$$= -q\phi + \frac{q}{c}\int\left(\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)d\vec{x}$$

$$= q\phi + \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$+ \frac{q}{c}\int(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\,d\vec{x}$$

لدينا : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow W = -q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{cl} = T - V$$

$$= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\phi - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}.$$

$$\vec{P} = \frac{\partial\mathcal{L}_{cl}}{\partial\vec{v}} = m\vec{v} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$\vec{P} = \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$H = \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + q\phi + \frac{q}{mc}\vec{p}\cdot\vec{A}$$

نهمل الحد الثالث في الهاملتوني : $(c >> \quad q <<)$

$$\hat H = \frac{P^2}{2m} - \underbrace{\frac{q}{mc}\vec A\cdot\vec P}_{H_{int}}$$

$$\hat H_{int} = -\frac{q}{mc}\cdot\frac{B}{2}\left(-y\vec i + x\vec j\right)\left(P_x\vec i + P_y\vec j\right)$$

$$= -\frac{qB}{2mc}\left(\underbrace{-yP_x + xP_y}_{L_z}\right)$$

$$\hat H_{int} = \frac{-qBL_z}{2mc} = -q/2mc\ \vec B\cdot\vec L$$

نقارن مع $\mathcal{H}_{int}$:

$$\mathcal{H}_{int} = -\vec\mu_m\cdot\vec B$$

$$\hat H_{int} = -\vec\mu_m\cdot\vec B$$

إذن :

$$\vec\mu_m = \frac{q}{2mc}\vec L$$

$$\mu_z = \frac{q}{2mc}L_z$$

إذن :

$$\mu_z = \frac{q}{2mc}\hbar\left(0, \pm 1, \pm 2 \ldots\right)$$

نلاحظ أن تكميم العزم المداري المغناطيسي ناتج عن تكميم العزم الحركي.

حيث : $\mu_B = \frac{q\hbar}{2mc}$

μ_B : Magnéton de Bohr.

• العزم المغناطيسي الذاتي (السبين) :

نعتبر الشحنة $q=-e$ ونكتب عبارة العزم المغناطيسي الناتج عن السبين

$$\vec\mu = g\left(\frac{-e}{2mc}\right)\cdot\vec S$$

$$H_{int} = -\vec\mu\cdot\vec B$$

$$= \frac{ge\hbar}{4mc}\vec\sigma\cdot\vec B$$

نستنتج أن قيمة العزم المغناطيسي الذاتي للسبين هي

$$\mu_{Bs} = \frac{g}{2}\mu_{B0}$$

وتبين التجربة أن قيمة g قريبة جدا من 2.

وباستعمال معادلة Dirac النسبية نبرهن أن قيمة g هي فعلا 2 وباستعمال نظرية الحقول نتحصل على القيمة الصحيحة لـ g والتي تكون أكبر بقليل من 2.