III. Théorie cinétique des plasmas

Pour décrire complètement l'état du plasma, nous devons connaître les emplacements et les vitesses des particules et décrire le champ électromagnétique dans la région du plasma, mais il n'est pas nécessaire d'examiner toutes les particules du plasma, c'est pourquoi les physiciens fournissent une description moins détaillée des modèles connus, qu'ils divisent en deux types importants:

- Modèle fluide
- modèle cinétique

La théorie fluide utilisée est la description la plus simple d'un plasma

•L'approximation fluide repose sur l'hypothèse suivant laquelle les particules présentes dans le plasma sont à l'équilibre

•Les vitesses moyennes sont alors représentées par une distribution de Maxwell-Boltzman

•On peut donc parler de température T définie à partir de cette distribution

•Les éléments du fluide possèdent une vitesse moyenne u

•Dans la théorie fluide, les quantités dépendent de quatre variables, x,,z,t

Lorsque les conditions de densité et de température dans le plasma sont telles qu'il n'y a pas assez de collisions, on ne peut plus utiliser une distribution de Maxwell-Boltzman

•Ceci se produit lorsque la température est élevée ou la densité très faible

•Il faut alors considérer directement la fonction de distribution des vitesses (v)

•La théorie cinétique consiste a appliquer directement les concepts de la physique statistique sur l'ensemble des particules représentées par une fonction de distribution

•La théorie cinétique est plus élaborée que la théorie fluide

•On doit retrouver cette dernière dans la limite ou la distribution des vitesses peut être représentée par une distribution de Maxwell-Boltzmann

Fonctions de distribution

La densité est une fonction de quatre variables (r,t), lorsque l'on considère la distribution des vitesses, nous avons 7 variables indépendantes: $f = f(r,v,t)$

•f = f(r, v, t) représente le nombre de particules par m^3 a la position r au temps t avec des composantes de la vitesse

- comprissent entre v_x et $v_x + dv_x$, v_y et $v_y + dv_y$, v_z et $v_z + dv_z$

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z \quad (1)$$

- L'intégrale de la fonction de distribution peut s'écrire de plusieurs façons

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) && (2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v && (3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && (4) \end{aligned}$$

- Si f est normalisée de facons à définir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 1$$

  $\hat{f}$ est une probabilité et

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, t) \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

- $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est toujours une fonction à sept variables car la forme ainsi que la densité peuvent changer dans l'espace et le temps
- $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ s'exprime en $(m/s)^{-3}$
- $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ s'exprime en s^3/m^6

- ou dv n'est pas un vecteur mais un élément de volume dans l'espace des vitesses
- L'équation fondamentale devant être satisfaite par la fonction de distribution est l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c$$

- F est la force agissant sur les particules
- $(\partial f/\partial t)_c$ est la variation temporelle de f due aux collisions
- r représente le gradient dans l'espace (x, y, z)
- $\partial/\partial \mathrm{v}$ représente le gradient dans l'espace des vitesses

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial v_z}$$

- Pour interpréter l'équation de Boltzmann, on pose la dépendance explicite de la fonction de distribution sur les sept variables de temps, d'espace et de vitesse

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_y}\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_z}\frac{\partial v_z}{\partial t}$$

- Le premier terme représente la dépendance temporelle explicite de f
- Les trois termes suivants représentent $\mathrm{v}.\nabla f$
- En utilisant la troisième loi de Newton

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

- on remarque que les trois termes suivants sont simplement

$(F/m).(\partial f/\partial \mathrm{v})$

- Remarque
- Maxwell-Boltzmann: est une fonction de distribution importante est la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$\hat{f}_m = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} exp(-v^2/v_{th}^2)$$

avec $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ et $v_{th} = (2k_B T/m)^{1/2}$

- Maxwell-Boltzmann: moyennes

La vitesse moyenne v est définie comme

$$\bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} v\hat{f}(\mathbf{v})d^3v$$

- L'équation de Boltzmann montre que ${}^{df}/_{dt}$ est nulle en l'absence de collisions
- Lorsque les collisions sont négligeables et que les forces sont E.M., l'équation de Boltzmann prend la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla f + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

- C'est ce que l'on appelle l'équation de Vlasov.
- Lorsque les collisions sont importantes il faut ajouter a l'équation de Vlasov la contribution de $({}^{\partial f}/_{\partial t})_c$ représentant le changement local de la fonction de distribution

Comme $\hat{f}_m$ est symmétrique suivant v_x, v_y, v_z l'intégrale s'obtient en passant en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}\bar{v} &= (m/2\pi k_B T)^{3/2} \int_0^\infty v exp(-v^2/v_{th}^2) 4\pi v^2 dv \\ &= (\pi v_{th}^2)^{-3/2} 4\pi v_{th}^4 \int_0^\infty [exp(-y^2)] y^3 dy\end{aligned}$$

avec $\int_0^\infty [exp(-y^2)] y^3 dy = \frac{1}{2}$, la vitesse moyenne est

$$\bar{v} = 2v_{th}/\sqrt{\pi} = 2\sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}$$

Deux moyennes importantes, souvent calculées pour la distribution de M.B., la vitesse moyenne et l'écart quadratique moyen permettant d'obtenir l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}(\bar{v^2}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} v^2 exp\left(-\frac{v^2}{v_{th}^2}\right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} v_{th}^3 y^2 exp(-y^2) dy \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} v_{th}^3 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 exp(-y^2) dy\end{aligned}$$

En intégrant par partie

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 exp(-y^2) dy = [-\frac{1}{2} y exp(-y^2)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} exp(-y^2) dy$$

$$= {}^1/_2 \sqrt{\pi}$$

L'écart quadratique moyen est alors

$$
\begin{aligned}
(\bar{v^2}) &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} v_{th}^3 \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
(\bar{v^2})^{1/2} &= \sqrt{\frac{k_B T}{m}}
\end{aligned}
$$

Ce résultat se généralise à trois dimensions en notant que la fonction de distribution des vitesses est symmétrique suivant v_x, v_y, v_z.

$$
(\bar{v^2})^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}
$$

La norme de la vitesse moyenne dans une direction a une moyenne déférente que la composante dans une direction $\bar{v}_x = 0$

$$
\begin{aligned}
|\bar{v_x}| &= \int |v_x| \hat{f}_m(\mathbf{v}) d^3v \\
&= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_y exp\left(\frac{-v_y^2}{v_{th}^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv_z exp\left(\frac{-v_z^2}{v_{th}^2}\right) \\
&\quad \times \int_0^{\infty} 2v_x exp\left(\frac{-v_x^2}{v_{th}^2}\right) dv_x
\end{aligned}
$$

- Les deux premières intégrales sont chacunes égales à $\sqrt{\pi} v_{th}$.
- La dernière intégrale est égale à v_{th}^2
- La norme de la vitesse moyenne dans une direction est donc

$$
\begin{aligned}
|\bar{v_x}| &= (\pi v_{th}^2)^{-3/2} \pi v_{th}^4 \\
&= (\pi)^{-1/2} v_{th} = \left(\frac{2k_B T}{\pi m}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

En résumé, une fonction de type Maxwell-Boltzmann (Gaussienne) possède les propriétés suivantes

$$
\begin{aligned}
(\bar{v^2})^{1/2} &= \left(\frac{3k_BT}{m}\right)^{1/2} \\
\bar{|v|} &= 2\left(\frac{2k_BT}{\pi m}\right)^{1/2} \\
\bar{|v_x|} &= \left(\frac{2k_BT}{\pi m}\right)^{1/2} \\
\bar{v_x} &= 0
\end{aligned}
$$